Universidade de São Paulo

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas

# Admissão na Pós-Graduação

## do Departamento de Astronomia – IAG/USP

EXAME ESCRITO – 22 de Novembro de 2010

**Nome:** ..........................................................................

**Instruções ao candidato:**

**a.** A prova é individual, sem qualquer consulta. É permitido o uso de calculadora. A duração da prova é de no máximo 4 horas.

**b.** A prova **não poderá** ser feita a lápis. Escreva seu nome em cada folha da prova.

**c.** Se estiver fazendo a prova fora do IAG/USP, use papel A4, mas deixe margens de pelo menos $\sim 2$ cm nos quatro lados de cada folha. Use somente um lado da folha de respostas e numere-as. Solicitamos que a prova seja enviada ao IAG ou por fax [(+55-11)-3091-2860] ou por email [`secret@astro.iag.usp.br`] e as folhas originais de respostas enviadas pelo correio:
A/C Sra. Marina Freitas, Depto. de Astronomia, Rua do Matão, 1226 – Cidade Universitária – 05508-090 São Paulo/S.P.

---

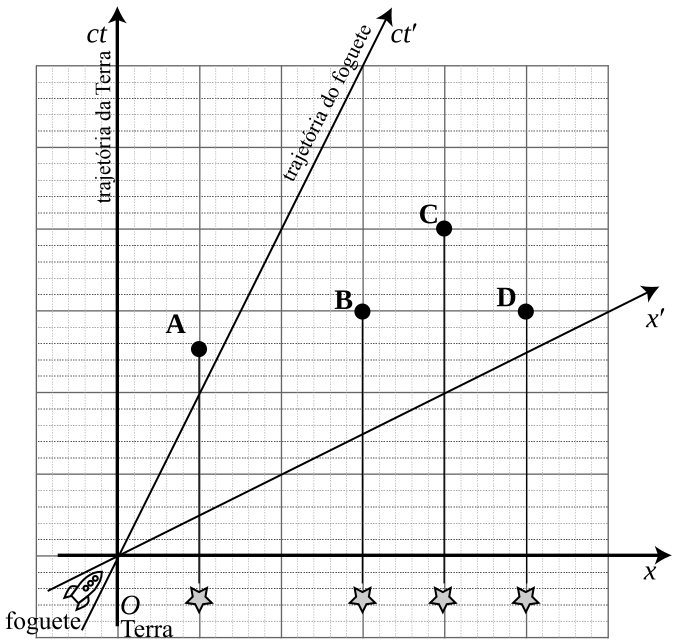
1. O diagrama espaço-tempo ao lado mostra 4 estrelas que se tornam supernovas nos pontos **A**, **B**, **C**, e **D**. Estas supernovas são observadas na Terra e em um foguete relativístico; as trajetórias são ilustradas no diagrama.

   Responda às seguintes questões:

   **(a)** Em qual ordem cronológica as supernovas ocorrem no referencial da Terra?

   **(b)** Em qual ordem cronológica as supernovas ocorrem no referencial do foguete?

   **(c)** Em qual ordem cronológica as supernovas são observadas na Terra?

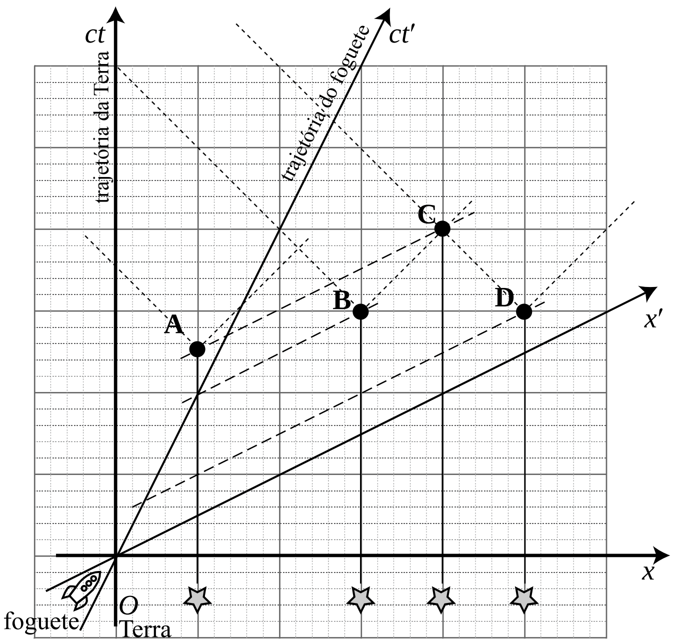



**Solução:**

a No ref. da Terra, os eventos ocorrem na seguinte ordem cronológica: **A**, **B** e **D** simultaneamente, e **C**.

b No ref. do foguete: **D**, **B**, e **A** e **C** são simultâneos.

c Na Terra, os eventos são observados na seguinte ordem: **A**, **B**, e **C** e **D** simultaneamente.




2. Calcule o momento de inércia de um cilindro homogêneo de massa $M$, raio $R$ e altura $h$, com relação a seu eixo maior.

**Solução:**

O momento de inércia é dado por:

$$I_z = 2\pi h\rho \int_0^R r^3\, dr = 2\pi h\rho \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} h\rho R^4 \,.$$

onde a densidade é $\rho = M/(\pi R^2 h)$. Portanto, o momento de inércia do cilindro homogêneo é:

$$I_z = \frac{M}{2} R^2 \,.$$

3. A meia-vida de um dado isótopo é de 6,5 horas. Se existirem inicialmente $48 \times 10^{19}$ átomos deste isótopo, quantos átomos dele restarão após 26h?

**Solução:**

Para o decaimento radioativo temos $N = N_0 \times \exp[-\lambda\, t]$ e $\lambda = \ln(2)/\tau$. Portanto,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{6,5} = 0,10664 \quad \Rightarrow \frac{N}{N_0} = \exp[-0,10664 \times 26] = 0,0625 \,.$$

$$\Rightarrow \quad N = 48 \times 10^{19} \times 0,0625 = 3 \times 10^{19} \quad \text{átomos} \,.$$

Logo, restarão 6,25% dos átomos iniciais, isto é, $3 \times 10^{19}$.

4. Segundo a teoria de Kolmogorov para a turbulência atmosférica o *seeing* – definido como a largura a meia-altura (FWHM) de imagens pontuais, p.ex., estrelas – apresenta a seguinte dependência com o comprimento de onda: $\theta_{\text{seeing}} \propto \lambda^{-1/5}$. Supondo que você está observando com um telescópio cujo espelho primário possui um diâmetro, $D$, de 1,0 m e que o *seeing* medido na banda $V$ (5500 Å) seja de 0,6 segundos de arco:

   **(a)** Calcule em que comprimento de onda o *seeing* e o limite de difração ($\theta = 1,22\lambda/D$) são iguais?

   **(b)** Supondo que a qualidade da imagem final pode ser calculada como a soma em quadratura do *seeing* com o limite de difração, calcule a qualidade da imagem no comprimento de onda do item **(a)**.

   **(c)** A que região do espectro eletro-magnético corresponde o comprimento de onda calculado no item **(a)**: raios-gama, raios-X, ultravioleta, óptico, infravermelho ou rádio?

**Solução:**

**(a)** Colocando em termos de segundo de arco, temos que o limite de difração tem à seguinte expressão:

$$\theta_D = \frac{1,22 \times 10^{-10}\lambda(\text{Å})}{D_{\text{metro}}}\, 3600\frac{180}{\pi} = 2,51643 \times 10^{-5}\frac{\lambda(\text{Å})}{D_{\text{metro}}} \ \text{arcsec}\,.$$

Já para o *seeing* podemos escrever que:

$$\theta_{\text{seeing}} \equiv \theta_S = 0.6 \times \left[\frac{5500}{\lambda(\text{Å})}\right]^{0,2} \ \text{arcsec}\,.$$

Fazendo $\theta_D = \theta_S$ e usando o fato de que $D_{\text{metro}} = 1,0$, temos que:

$$2,516 \times 10^{-5}\lambda(\text{Å}) = 0,6'' \times 5500^{0,2}\lambda(\text{Å})^{-0,2}$$
$$\Rightarrow \lambda(\text{Å}) = \left(\tfrac{0,6'' \times 5500^{0,2}}{2,516\times 10^{-5}}\right)^{1/1,2} = 18672 \text{ Å} \ \text{ ou } \ 1,8\ \mu\text{m}\,.$$

**(b)** Em $\lambda = 18672$ Å temos que:

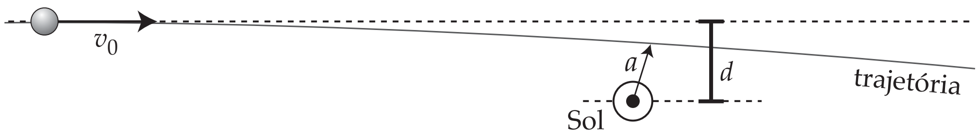
$$\theta_D = \theta_S = 0,6 \times \left(\frac{5500}{18672}\right)^{0,2} = 0,47 \ \text{ segundo de arco}\,.$$

Desse modo a qualidade final da imagem será a seguinte:

$$\theta_F = \sqrt{\theta_D^2 + \theta_S^2} = \theta_S \times \sqrt{2,0} = 0,66 \ \text{ segundo de arco}\,.$$

**(c)** Infravermelho ou, mais precisamente, infravermelho próximo (banda $H$).

5. Um corpo de massa $m$ se aproxima do Sistema Solar com velocidade $v_0$ e parâmetro de impacto $d$ em relação ao Sol (veja figura abaixo). Usando as leis de conservação de momento e energia calcule a distância de maior aproximação do Sol, $a$. Ignore os efeitos gravitacionais dos planetas e de outros corpos do Sistema Solar.




**Solução:**

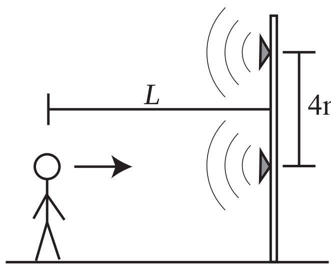
A distância de maior aproximação é:

$$a = \left(d^2 - d_0^2\right)^{1/2} - d_0, \quad \text{onde} \quad d_0 = G\,M_\odot/v_0^2\,,$$

e $M_\odot$ é a massa do Sol.

Se $d \ll d_0$ então $a = d^2/(2d_0)$.

6. Dois auto-falantes estão em um poste, separados por uma distância de 4 metros (veja figura ao lado). Eles emitem um som na mesma frequência, $f = 200$ Hz. Uma pessoa, com a cabeça na mesma altura do auto-falante mais baixo caminha em direção ao poste. Adote a velocidade do som $v_s = 330$ m/s. **(a)** Quantas vezes ele vai escutar um som com amplitude mínima? **(b)** Qual será sua distância ao poste nestes mínimos?




**Solução:**

Os pontos de interferência destrutiva correspondem a $\Delta r = (2n+1)\lambda/2$, onde $\Delta r$ é a diferença de distâncias entre as fontes de som e a pessoa. Usando $\lambda = v_s/f$.

As posições, $L$, de mínimo serão: $(d^2 + L^2)^{1/2} - L = (2n+1)v_s/(2f)$, com a condição de que $L > 0$, onde $d$ é a distância entre os auto-falantes.

Portando, haverá **2** pontos de mínimo ($n = 0$ e $n = 1$), com as respectivas distâncias de 9,28 e 1,99 metro.

7. Sabendo que o potencial de ionização do átomo de hidrogênio neutro é 13,6 eV responda:

   **(a)** Qual a energia e comprimento de onda (em Å) da linha de $H_\beta$? Essa linha possui o segundo maior comprimento de onda de série de Balmer.

   **(b)** Suponha que essa linha está sendo gerada por uma população de estrelas numa galáxia elíptica que possui uma dispersão de velocidade $\sigma = 200$ km/s. Qual é a largura aproximada dessa linha $\Delta\lambda$ devido ao efeito Doppler? Caso você não tenha respondido o item **(a)** use letras para representar os valores desconhecidos. (Resposta em Å)

   **(c)** Dado que o tempo de vida média dessa transição é da ordem de $10^{-8}$s, qual é o alargamento natural que essa linha possui devido ao princípio da incerteza? Caso você não tenha respondido o item **(a)** use letras para representar os valores desconhecidos. (Resposta em Å)

**Solução:**

**(a)** A série de Balmer é aquela que se inicia a partir do nível $n = 2$. Assim, a segunda linha de maior comprimento de onda, corresponde à transição entre os níveis $n = 2$ e $n = 4$. Como a energia associada a um dado nível do átomo de hidrogênio pode ser calculada como $E = 13,6/n^2$ eV, tem-se que:

$$E_{H_\beta} = -13,6 \times \left(\tfrac{1}{2^2} - \tfrac{1}{4^2}\right) = 2,55 \text{ eV} = 4,08 \times 10^{-19} \text{ J}.$$
$$\lambda_{H_\beta} = \tfrac{kc}{E_{H_\beta}} = 4,862 \times 10^{-6} \text{ m} = 4862 \text{ Å}.$$

**(b)**

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \approx \frac{\sigma}{c} \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda = 4862\frac{200}{2,998 \times 10^5} = 3,24 \text{ Å}.$$

**(c)**

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta E}{E - E_0}\,.$$

De **(a)** temos que $E - E_0 = 4,08 \times 10^{-19}$ J. Usando o princípio da incerteza temos que:

$$\Delta E\,\Delta t \approx \hbar \Rightarrow \Delta E = 1,0546 \times 10^{-34}\,10^{-8} = 1,0546 \times 10^{-42} \text{ J}.$$

Usando os resultados acima temos então que:

$$\Delta\lambda = 4862\frac{1,0546 \times 10^{-42}}{4,08 \times 10^{-19}} = 1,26 \times 10^{-20}\text{Å}\,.$$

8. Para os seguintes processos, calcule a mudança na energia interna do sistema:

**(a)** Um balão é aquecido pela adição de 670 J de calor. Ele expande, exercendo 332 J de trabalho sobre a atmosfera.

**(b)** Uma amostra de 10 g de água é resfriada de 20 °C para 10 °C [o calor específico da água é 4180 J/(kg °C)].

**(c)** Uma reação química que produz 8,65 kJ de calor e não exerce trabalho nas vizinhanças.

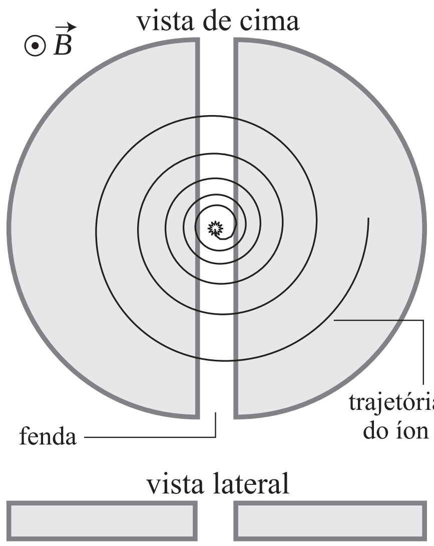
**Solução:**

**(a)** $\Delta E = +650 - 332 = +338$ J.

**(b)** $\Delta E = Q = 0,01 \text{ kg} \times [4180J/(kg\,°\text{C})] \times (10 - 20)°\text{C} = -418$ J.

**(c)** $\Delta E = Q = -8650J$.

9. A figura ao lado mostra o esquema de um cíclotron. Um campo elétrico oscilante é aplicado na separação (fenda) entre os hemisférios, sendo o campo magnético perpendicular ao plano do desenho. Considere que o cíclotron está acelerando núcleos de deutério, com massa $3,3 \times 10^{-27}$ kg e carga $+e$.
**(a)** Qual é a frequência de oscilação do campo elétrico, se o campo magnético é $B = 1,5T$?
**(b)** Quantas vezes devem os núcleos passar pela fenda para adquirir uma energia cinética de 15 MeV se a diferença de potencial na fenda é de 50 keV?




**Solução:**

**(a)** O período de oscilação do campo elétrico deve ser igual ao período orbital:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m_0} = 11,6 \text{ MHz}.$$

**(b)** Cada vez que o deutério cruza a fenda, ele ganha 50 keV. Para ganhar um total de 15 MeV, o deutério precisa passar pela fenda $15 \times 10^6 / 5 \times 10^4 =$ **300 vezes**.

10. A órbita da Lua ao redor da Terra é um caminho aproximadamente circular de raio $3,8 \times 10^8$ metro. Ela leva 27 dias para completar uma órbita. Qual é a massa da Terra a partir desses dados? Considere $G = 6,7 \times 10^{-11}$ no SI.

**Solução:**

Igualando a força centrípeta à força gravitacional entre a Terra e a Lua temos:

$$\frac{m_{\text{lua}} v^2}{r} = G\frac{M_{\text{terra}} m_{\text{lua}}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad M_{\text{terra}} = \frac{v^2 r}{G}.$$

A velocidade da Lua pode ser calculada por $v = 2\pi r/P = 1023,5$ m/s. Logo,

$$M_{\text{terra}} = \frac{(1023,5)^2 \times 3,8 \times 10^8}{G} \simeq 5,94 \times 10^{24} \text{ kg}.$$

---

**Dados adicionais:**

| | |
|---|---|
| $c = 2{,}998 \times 10^5$ km s$^{-1}$ | $hc = 1240$ eV nm |
| $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ m$^2$ kg s$^{-1}$ | $uma = 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg |
| energia de ionização do H = 13,6 eV | 1 eV $= 1,6022 \times 10^{-19}$ J. |

---