

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

1º Semestre/2013

Parte 1 – 16/10/2012

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUFXxx).
- Esta prova constitui a primeira parte do exame unificado das Pós-Graduação em Física. Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de 4 horas. O tempo mínimo de permanência na sala é de 90 minutos.
- NÃO é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFXxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. NÃO AS DESTAQUE. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- NÃO escreva nada no formulário; DEVOLVA-O ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

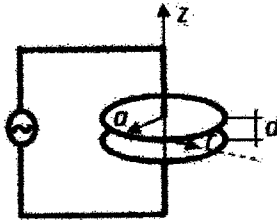
Boa prova!

Q1. Considere uma esfera sólida, uniformemente carregada, de carga Q e raio R .

- Determine o vetor campo elétrico \vec{E} em um ponto à distância r do centro da esfera, nos casos $r > R$ e $r \leq R$.
- Obtenha a força $d\vec{F}$ sobre um elemento de volume dV da esfera, localizado na posição \vec{r} .
- Determine agora, por integração, a força total \vec{F} que age sobre o hemisfério superior da esfera.

Q2. Um capacitor de placas planas paralelas é formado por dois discos circulares de raio a , separados entre si de uma distância $d \ll a$, no vácuo. As placas estão ligadas a um gerador de corrente alternada de frequência ω , que produz uma carga uniforme na placa do capacitor, dada por $q(t) = q_0 \sin(\omega t)$. São desprezados efeitos de borda. Supondo baixas frequências, de forma que $\omega a/c \ll 1$ (onde $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ é a velocidade da luz), o campo elétrico \vec{E} entre as placas pode ser considerado uniforme. Considere um sistema de coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) , com eixo z passando pelo centro das placas, conforme indicado na figura.

- Calcule a expressão para o campo elétrico \vec{E} entre as placas.
- Calcule o campo magnético \vec{B} , em função do raio r , na região entre as placas do capacitor.
- Calcule o vetor de Poynting $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$.
- Usando a aproximação de baixas frequências, mostre que é satisfeita a conservação de energia, expressa pela condição $\nabla \cdot \vec{S} + \partial u/\partial t = 0$, onde $u = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \vec{B}^2/\mu_0)$ é a densidade de energia contida no campo eletromagnético.



Q3. Uma partícula de massa m confinada em um poço de potencial unidimensional possui função de onda dada por:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -L/2 \\ A \cos \frac{3\pi x}{L} & \text{para } -L/2 < x < L/2 \\ 0 & \text{para } x > L/2 \end{cases}$$

- Calcule a constante de normalização A .
- Calcule a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo entre $-L/4 < x < L/4$.
- Através da solução da equação de Schrödinger independente do tempo para esta partícula no referido poço de potencial, ache a energia correspondente à função de onda, em termos de m , L e \hbar .
- Calcule o comprimento de onda do fóton emitido na transição desta partícula para o estado fundamental, em termos de m , L e \hbar .

Q4. O decaimento dos múons obedece à seguinte equação diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = -RN(t)$$

onde $N(t)$ é o número de múons presentes no instante de tempo t e $dN(t)/dt$ representa a taxa de variação de múons no mesmo instante de tempo t . A constante de proporcionalidade R é chamada de constante de decaimento. O tempo de vida médio do múon é $\bar{t} = 2\mu\text{s}$, isto é, neste intervalo de tempo $N(\bar{t})/N(0) = 1/e \approx 1/2,73$. Sendo a velocidade dos múons na direção da superfície da Terra igual a $0,998c$, responda:

- No sistema inercial de referência do múon, qual o valor de R para o decaimento de múons?
- Sem considerar correções relativísticas, estime quantos múons seriam detectados ao nível do mar, correspondentes a 10^8 múons detectados a 9 km de altitude.
- Considere agora a previsão relativística e repita a estimativa do item (b).

Q5. Um gás ideal monoatômico de N moléculas de massa m está em equilíbrio térmico a uma temperatura absoluta T . O gás está contido em uma caixa cúbica de aresta L , cujos lados de baixo e de cima estão paralelos à superfície da Terra. Considere o efeito do campo gravitacional sobre as moléculas. A aceleração da gravidade é g . Determine:

- a função de partição de uma molécula do gás;
- a energia cinética média de uma molécula do gás;
- a energia potencial média de uma molécula do gás;
- a energia potencial média de uma molécula do gás no caso em que $mgL/k_B T \ll 1$. Faça o cálculo até 2ª ordem da razão $mgL/k_B T$.

Q10. A radiação em uma cavidade ressonante pode ser vista como um gás de fótons cuja pressão sobre as paredes de uma cavidade de volume V é dada por

$$P = \frac{aT^4}{3},$$

onde a é uma constante. A energia interna desse gás é dada pela equação $U = aT^4V$. Considere que inicialmente a temperatura da cavidade seja T_0 e seu volume V_0 .

- (a) Determine o trabalho realizado em um processo isotérmico no qual o volume da cavidade é duplicado. Forneça a resposta em termos de T_0 , V_0 e da constante a apenas.
- (b) Determine o calor fornecido em um processo isotérmico no qual o volume da cavidade é duplicado. Forneça a resposta em termos de T_0 , V_0 e da constante a apenas.
- (c) Usando a relação

$$dQ = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV,$$

determine a equação que descreve um processo adiabático em termos das variáveis V e T .

- (d) Determine o trabalho realizado em um processo adiabático no qual o volume da cavidade é duplicado. Expresse o resultado em termos de T_0 , V_0 e da constante a apenas.

Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUf

1º Semestre/2013

Parte 2 – 17/10/2013

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUfxxx).
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduação em Física. Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica, Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUfxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q6. Um equilibrista de massa m está inicialmente parado na extremidade de uma barra larga, horizontal, homogênea, de comprimento D e massa $M = 3m$. A barra gira em torno de um eixo vertical que passa pelo seu centro. O equilibrista começa então a caminhar sobre a barra, em direção ao eixo de rotação, com velocidade constante. Considere o período inicial de rotação do sistema igual a T_0 .

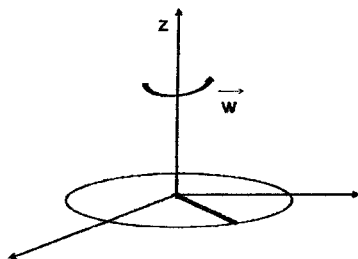
- Determine o torque das forças que atuam sobre o equilibrista em relação ao centro da barra.
- Determine o momento angular do sistema quando o equilibrista atinge o centro da barra. Determine o período de rotação do sistema nessa situação.
- Determine as energias nas posições inicial e final do sistema. Nesse movimento, a energia do sistema variou?

Considere o equilibrista como uma massa puntiforme.

$$\text{Dado: } I_{CM}(\text{barra}) = \frac{1}{12}MD^2$$

Q7. Uma partícula de massa m se encontra no interior de um cano oco, liso, estreito e longo que gira num plano horizontal com velocidade angular ω constante. O eixo fixo de rotação passa por uma das extremidades do cano, como mostra a figura.

- Escreva a Lagrangiana da partícula.
- Obtenha as equações de Lagrange do movimento da partícula.
- Determine o movimento da partícula, considerando que inicialmente ela é lançada do centro de rotação com velocidade \vec{v}_0 .
- Obtenha a função Hamiltoniana (H) do movimento dessa partícula e as equações de Hamilton do movimento.
- Dentre as grandezas físicas H e E (energia), quais são conservadas? Justifique sua resposta.



Q8. Considere um oscilador harmônico (em uma dimensão, x) de massa m e frequência ω . No instante $t = 0$, o estado do oscilador é $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle$ onde os $|\phi_n\rangle$ são os estados estacionários, isto é, $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, sendo H a hamiltoniana e $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ com $n = 0, 1, 2, \dots$

- Considerando que os estados $|\phi_n\rangle$ são normalizados, determine a condição que os coeficientes c_n devem satisfazer para que o estado $|\psi(0)\rangle$ seja também normalizado. Calcule, então, a probabilidade \mathcal{P} de que uma medida da energia do oscilador, feita num instante t posterior, dê um resultado maior que $2\hbar\omega$.
- Se apenas c_0 e c_1 são diferentes de zero, dê a expressão para o valor esperado da energia, $\langle H \rangle$, em termos de c_0 e c_1 . Com a condição $\langle H \rangle = \hbar\omega$, calcule $|c_0|^2$ e $|c_1|^2$.
- O vetor de estado $|\psi(0)\rangle$ está definido a menos de um fator de fase global, o que nos permite escolher c_0 real e positivo. Fazendo isso, escrevendo $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$ e mantendo a condição $\langle H \rangle = \hbar\omega$, determine θ_1 de modo que $\langle X \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

Observação: Lembremos que o efeito do operador posição X sobre os estados estacionários do oscilador harmônico é

$$X|\phi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\sqrt{n+1} |\phi_{n+1}\rangle + \sqrt{n} |\phi_{n-1}\rangle \right]$$

entendendo-se que o segundo termo acima é nulo para $n = 0$.

- Com $|\psi(0)\rangle$ determinado conforme o item anterior, escreva $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ e calcule $\langle X \rangle(t)$.

Q9. Sejam \vec{L}, \vec{R} e \vec{P} os operadores do momento angular, da posição e do momento linear, respectivamente.

- Usando as relações de comutação $[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k$, mostre que

$$\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}$$

- Com a definição $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ e usando $[R_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}$, mostre que

$$[L_i, R_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} R_k$$

- Sabendo que os operadores \vec{R} e \vec{P} são hermitianos, isto é, $R_i^\dagger = R_i$ e $P_i^\dagger = P_i$, mostre que as componentes do operador do momento angular $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ também são operadores hermitianos.

Observação: Nas expressões acima, ϵ_{ijk} é o tensor completamente antissimétrico, isto é:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se houver índices iguais;} \\ +1 & \text{se } ijk \text{ for } 123, 231 \text{ ou } 312; \\ -1 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Se precisar, use a identidade $\sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$.