Exame Unificado das Pós-graduações em Física

EUF

para o primeiro semestre de 2014

Parte 1 — 15/10/2013

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Eletromagnetismo, Física Moderna e Termodinâmica. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.

Boa prova!

Q1. Considere um condutor macroscópico de forma arbitrária, cuja superfície é fechada e suave. Partindo da lei de Gauss e considerando que o rotacional do campo eletrostático é nulo:

(a) Calcule o campo elétrico no interior do condutor;

(b) Obtenha a componente normal do campo elétrico na superfície externa do condutor em termos da densidade superficial de carga;

(c) Obtenha a componente tangencial do campo elétrico na superfície do condutor.

Q2. Considere um conjunto de soluções de ondas planas eletromagnéticas no vácuo, cujos campos (elétrico e magnético) são descritos pela parte real de funções: $\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{A}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, onde $\vec{k}$ é o vetor de onda, que determina a direção de propagação da onda, e ω é a frequência angular, que se relaciona com o vetor de onda por $\omega = v|\vec{k}|$, onde $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ é a velocidade de propagação das ondas.

(a) Mostre que o divergente de $\vec{u}(\vec{x},t)$ satisfaz: $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = i\vec{k}\cdot\vec{u}$;

(b) Mostre que o rotacional de $\vec{u}(\vec{x},t)$ satisfaz: $\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$;

(c) Demonstre que as ondas são transversais e que os vetores $\vec{E}$, $\vec{B}$ e $\vec{k}$ são mutuamente perpendiculares.

Q3. Em 1913, Niels Bohr introduziu seu modelo atômico através da adaptação do modelo de Rutherford às ideias de quantização propostas na época. Em homenagem a esse evento, aborde os itens abaixo em termos de grandezas fundamentais.

(a) Use a regra de quantização para o momento angular, $L = \hbar n$, para encontrar uma expressão para os raios das órbitas permitidas de um elétron ao redor de um átomo de número atômico Z .

(b) Segundo o modelo de Bohr, a transição entre diferentes órbitas é acompanhada pela emissão/absorção de um fóton. Determine a energia do fóton emitido como resultado da transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental de um átomo de hidrogênio.

(c) Considere um elétron preso em um poço unidimensional quadrado infinito de largura a. Determine uma expressão para os níveis de energia eletrônicos usando a regra de quantização de Bohr-Sommerfeld $\oint p dx = hn$.

(d) Determine a largura a desse poço, em termos do raio de Bohr, para que a energia de um fóton emitido devido à transição entre o primeiro estado excitado e o estado fundamental seja igual àquela obtida no item (b).

Q4. Os raios-γ produzidos por aniquilação de pares apresentam um espalhamento Compton considerável. Considere que um fóton com energia m_0c^2 seja produzido pela aniquilação de um elétron e um pósitron, onde m_0 é a massa de repouso do elétron e c é a velocidade da luz. Suponha que esse fóton seja espalhado por um elétron livre e que o ângulo de espalhamento seja θ.

(a) Encontre a máxima energia cinética possível do elétron em recuo nesse espalhamento.

(b) Se o ângulo de espalhamento for $\theta = 120°$, determine a energia do fóton e a energia cinética do elétron após o espalhamento.

(c) Se $\theta = 120°$, qual é a direção de movimento do elétron após o espalhamento, em relação à direção do fóton incidente?

Q5. Um mol de um gás ideal simples está contido em um recipiente de volume inicial v_0 e pressão p_0. O gás ideal é descrito pelas equações $pv = RT$ e $u = cRT$, onde p é a pressão, v é o volume molar, T a temperatura absoluta, u é a energia molar; R e c são constantes. O gás se expande a partir desse estado inicial até o estado correspondente a um volume final $2v_0$ através de um dado processo. Determine o trabalho W realizado pelo gás e o calor Q recebido pelo gás para cada um dos processos listados abaixo. As respostas finais devem ser dadas apenas em termos de (v_0, p_0) e de c.

(a) Expansão livre. Determine também a variação de temperatura ΔT.

(b) Expansão quase-estática isentrópica. Obtenha também a pressão final p_{f}, utilizando o fato de que, nesse processo para um gás ideal, $pv^{\gamma} = \text{constante}$, onde $\gamma = (c+1)/c$.

(c) Expansão quase-estática isobárica.

(d) Expansão quase-estática isotérmica.

Exame Unificado
das Pós-graduações em Física

EUF

para o primeiro semestre 2014

Parte 2 — 16/10/2013

Instruções:

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame unificado das Pós-Graduações em Física.

  Ela contém problemas de: Mecânica Clássica, Mecânica Quântica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.
- O tempo de duração desta prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **RESOLVA CADA QUESTÃO NA PÁGINA CORRESPONDENTE DO CADERNO DE RESPOSTAS.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou . . .) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.**
  Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE**. As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas**.
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. Duas partículas, A e B, de massas m e M ($m \neq M$), respectivamente, estão conectadas às extremidades de um fio inextensível de comprimento ℓ e de massa massa desprezível que passa por um orifício em uma mesa horizontal, como mostrado na figura abaixo. A partícula A move-se sem atrito sobre a mesa enquanto a outra o faz verticalmente sob a ação conjunta da gravidade, de aceleração $\vec{g}$, e da tração do fio (desconsidere também o atrito entre o fio e o orifício).

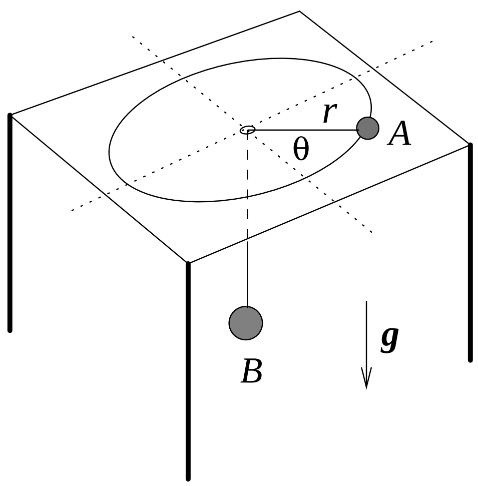
(a) Supondo que a posição inicial de A seja $r = r_0$, que velocidade inicial deve ser conferida a ela para que B permaneça em repouso abaixo da superfície da mesa?

(b) Obtenha as equações do movimento, admitindo que a lagrangiana que descreve um movimento arbitrário desse sistema é dada por

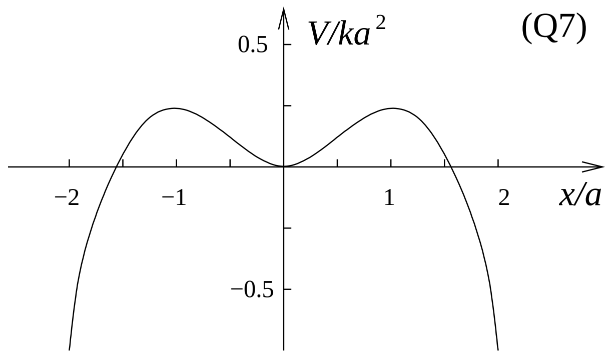
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - Mg(r-\ell).$$

(c) Obtenha as grandezas conservadas e dê o significado de cada uma delas.

(d) Se B for ligeiramente e verticalmente deslocada da sua posição, ocorrerão pequenas oscilações no sistema. Obtenha o período dessas oscilações em termos do raio de equilíbrio r_{eq} e das demais grandezas que caracterizam o sistema (m, M e g).



(Q6)



Q7. Uma partícula de massa m está sujeita ao potencial unidimensional

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{k}{4a^2}x^4,$$

mostrado na figura acima, onde k e a são constantes positivas.

(a) Determine a força $F(x)$ e obtenha os pontos de equilíbrio, determinando sua natureza

(b) Calcule o período das pequenas oscilações que ocorrem em torno do ponto de equílibrio estável.

(c) Admita que a partícula esteja em repouso no ponto $x = 0$ e que receba um impulso que lhe confere, instantaneamente, uma velocidade de módulo v na direção de x positivo. Discuta o que ocorre nos seguintes casos: $0 < v \leq a\sqrt{k/2m}$ e $v > a\sqrt{k/2m}$.

(d) Esboce o diagrama de fase do sistema ($\dot{x}$ versus x para energia constante) para os diversos tipos de movimento. Indique claramente a curva que corresponde à transição de movimento periódico para não periódico, bem como o valor da energia correspondente.

Q8. Considere o problema de uma partícula de massa m cujo movimento ao longo do eixo-x está restrito ao intervalo $0 \leq x \leq a$, isto é, ela encontra-se confinada em uma caixa com paredes colocadas nas posições $x = 0$ e $x = a$.

(a) Determine a função de onda e a energia do estado fundamental.

(b) Suponha que a partícula seja descrita pela seguinte função de onda:

$$\psi(x) = A\left[\sin\frac{\pi x}{a} - 3i\sin\frac{2\pi x}{a}\right],$$

onde A é uma constante de normalização. Determine A e calcule a probabilidade de obter o resultado $2\pi^2\hbar^2/ma^2$ para a medida da energia.

(c) Suponha agora que a partícula esteja no estado fundamental. Qual é a distribuição de probabilidades do momento da partícula nesse estado?

(d) Considerando novamente que a partícula esteja no estado fundamental, suponha que as paredes sejam removidas, de forma instantânea, deixando a partícula livre ($\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}^2/2m$). Qual é a energia dessa partícula livre?

Q9. Considere uma partícula de spin 1/2, cujo momento magnético é $\vec{M} = \gamma\vec{S}$, onde γ é uma constante. Podemos descrever o estado quântico dessa partícula utilizando o espaço gerado pelos autovetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$ do operador $\hat{S}_z$, que mede a projeção do spin na direção z,

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \qquad \hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle.$$

A partícula encontra-se sujeita a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{y}$, orientado ao longo do eixo y, de forma que que o hamiltoniano é dado por

$$\hat{\mathcal{H}} = -\vec{M}\cdot\vec{B} = -\gamma B\hat{S}_y.$$

Inicialmente, no instante $t = 0$, ela está no estado $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$.

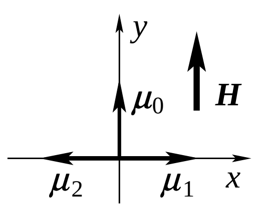
(a) Quais são as possíveis valores da projeção do spin no eixo-y?

(b) Encontre os autovetores de $\hat{S}_y$.

(c) Obtenha $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ em termos de $|+\rangle$ e $|-\rangle$ definidos acima.

(d) Obtenha os valores médios dos observáveis S_x, S_y e S_z em função do tempo.

Q10. Um determinado material magnético é composto por N átomos magnéticos não-interagentes, cujos momentos magnéticos $\boldsymbol{\mu}$ podem apontar em três direções possíveis, conforme mostra a figura ao lado: $\boldsymbol{\mu}_0 = \mu\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{\mu}_1 = \mu\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\boldsymbol{\mu}_2 = -\mu\hat{\boldsymbol{x}}$. O sistema encontra-se em equilíbrio térmico a temperatura T e na presença de um campo magnético uniforme orientado ao longo da direção y, $\boldsymbol{H} = H\hat{\boldsymbol{y}}$, de modo que os níveis de energia correspondentes a um único átomo são $\epsilon_0 = -\mu H$, $\epsilon_1 = 0$ e $\epsilon_2 = 0$.



(a) Obtenha a função de partição canônica z de um átomo, a função de partição canônica Z do sistema e a energia livre de Helmholtz f por átomo.

(b) Determine a energia média $u = \langle\epsilon_n\rangle$ e a entropia s por átomo.

(c) Obtenha a magnetização por átomo $\boldsymbol{m} = m_x\hat{\boldsymbol{x}} + m_y\hat{\boldsymbol{y}} = \langle\boldsymbol{\mu}_n\rangle$.

(d) Verifique que a susceptibilidade isotérmica $\chi_T = (\partial m_y/\partial H)_T$ a campo nulo obedece à lei de Curie, $\chi_T \propto 1/T$.

Joint Entrance Examination for Postgraduate Courses in Physics

EUF

For the first semester 2014

Part 1 — 15 October 2013

Instructions:

- **DO NOT WRITE YOUR NAME ON THE TEST.** It should be identified **only by your candidate number (EUFxxx)**.
- This test is the **first part** of the joint entrance exam for Postgraduate Physics.

  It contains questions on: Electromagnetism, Modern Physics, and Thermodynamics. All questions have the same weight.
- The duration of this test is **4 hours**. Candidates must remain in the exam room for a minimum of **90 minutes**.
- The use of **calculators** or other electronic instruments is **NOT** permitted during the exam.
- **ANSWER EACH QUESTION ON THE CORRESPONDING PAGE OF THE ANSWER BOOKLET.** The sheets with answers will be reorganized for correction. If you need more answer space, use the extra sheets in the answer booklet. **Remember to write the number of the question (Q1, or Q2, or . . .) and your candidate number (EUFxxx) on each extra sheet. Extra sheets without this information will be discarded. Use separate extra sheets for each question. Do not detach the extra sheets.**
- If you need spare paper for rough notes or calculations, use the sheets marked SCRATCH at the end of the answer booklet. **DO NOT DETACH THEM**. The scratch sheets will be discarded and **solutions written on them will be ignored**.
- Do **NOT** write **ANYTHING** on the list of Constants and Formulae; **RETURN IT** at the end of the test, as it will be used in the test tomorrow.

Have a good exam!

Q1. Consider an arbitrary macroscopic conductor whose surface is closed and smooth. Using Gauss's law and considering that the curl of the electrostatic field is zero:

(a) Calculate the electric field inside the conductor;

(b) Determine the normal component of the electric field at the external surface of the conductor in terms of the surface charge density;

(c) Determine the tangential component of the electric field at the surface of the conductor.

Q2. Consider a set of solutions of electromagnetic plane waves in vacuum, whose fields (electric and magnetic) are described by the real part of the functions: $\vec{u}(\vec{x},t) = \vec{A}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$, where $\vec{k}$ is the wave vector, which determines the direction of wave propagation, and ω is the angular frequency, which is related to the wave vector through $\omega = v|\vec{k}|$, where $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ is the velocity of the wave propagation.

(a) Show that the divergence of $\vec{u}(\vec{x},t)$ satisfies: $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = i\vec{k}\cdot\vec{u}$;

(b) Show that the curl of $\vec{u}(\vec{x},t)$ satisfies: $\vec{\nabla}\times\vec{u} = i\vec{k}\times\vec{u}$;

(c) Show that the waves are transversal and that the vectors $\vec{E}$, $\vec{B}$ and $\vec{k}$ are mutually perpendicular.

Q3. In 1913, Niels Bohr introduced his atomic model by adapting the Rutherford model to the quantization ideas that were arising at that the time. In honor of this event, address the following items in terms of fundamental quantities.

(a) Use the quantization rule for the angular momentum, $L = \hbar n$, of an electron around an atom of atomic number Z to find an expression for the radii of the allowed orbits.

(b) According to the Bohr model, the transition between different orbits is accompanied by the emission/absorption of a photon. Determine the energy of the photon emitted as the result of the transition between the first excited state and the ground state of a hydrogen atom.

(c) Consider an electron trapped in a one-dimensional infinite square well of width a. Determine an expression for the electronic energy levels using the Bohr-Sommerfeld quantization rule $\oint p dx = hn$.

(d) Find the width a of the well in terms of the Bohr radius, so that the energy of a photon emitted on account of the transition between the first excited state and the ground state is equal to the energy obtained in part (b).

Q4. γ-rays produced by pair annihilation show a considerable Compton scattering. Consider that a photon with energy m_0c^2 is produced by the annihilation of an electron and a positron, where m_0 is the rest mass of the electron and c is the light velocity. Suppose that the photon is scattered by a free electron and the scattering angle is θ.

(a) Find the maximum possible kinetic energy of the back scattered electron.

(b) If the scattering angle is $\theta = 120°$, determine the photon energy and the kinetic energy of the electron after the scattering.

(c) If $\theta = 120°$, what is the direction of motion of the electron after the scattering, relative to the direction of the incident photon?

Q5. One mole of a simple ideal gas is enclosed in a vessel with initial volume v_0 and initial pressure p_0. The ideal gas is described by the equations $pv = RT$ and $u = cRT$, where p is the pressure, v is the molar volume, T is the absolute temperature, u is the molar energy, R and c are constant. The gas expands from the initial state to a state corresponding to a final volume $2v_0$ through a given process. Determine the work W performed by the gas and the heat Q received by the gas for each one of the processes listed below. The final answers should be given only in terms of (v_0,p_0) and c.

(a) Free expansion. Determine also the variation in temperature ΔT.

(b) Quasi-static isentropic expansion. Also, find the final pressure p_{f}, using the fact that, in this process for an ideal gas, $pv^{\gamma} = \text{constant}$, where $\gamma = (c+1)/c$.

(c) Quasi-static isobaric expansion.

(d) Quasi-static isothermal expansion.

Joint Entrance Examination for Postgraduate Courses in Physics

EUF

For the first semester 2014

Part 2 — 16 October 2013

Instructions:

- **DO NOT WRITE YOUR NAME ON THE TEST.** It should be identified **only by your candidate number (EUFxxx)**.
- This test is the **first part** of the joint entrance exam for Postgraduate Physics.

  It contains questions on: Classical Mechanics, Quantum Mechanics, and Statistical Mechanics. All questions have the same weight.
- The duration of this test is **4 hours**. Candidates must remain in the exam room for a minimum of **90 minutes**.
- The use of **calculators** or other electronic instruments is **NOT** permitted during the exam.
- **ANSWER EACH QUESTION ON THE CORRESPONDING PAGE OF THE ANSWER BOOKLET.** The sheets with answers will be reorganized for correction. If you need more answer space, use the extra sheets in the answer booklet. **Remember to write the number of the question (Q1, or Q2, or . . .) and your candidate number (EUFxxx) on each extra sheet. Extra sheets without this information will be discarded. Use separate extra sheets for each question. Do not detach the extra sheets.**
- If you need spare paper for rough notes or calculations, use the sheets marked SCRATCH at the end of the answer booklet. **DO NOT DETACH THEM**. The scratch sheets will be discarded and **solutions written on them will be ignored**.
- It is **NOT** necessary to return the list of Constants and Formulae.

Have a good exam!

Q6. Two particles, A and B, of masses m and M ($m \neq M$), respectively, are connected to the ends of an inextensible thread of length ℓ and of negligible mass which passes through a hole in a horizontal table, as shown in the figure below. The particle A moves without friction over the table while the other moves vertically under the combined action of gravity, acceleration $\vec{g}$, and the traction of the thread (disregard the friction between the thread and the hole).

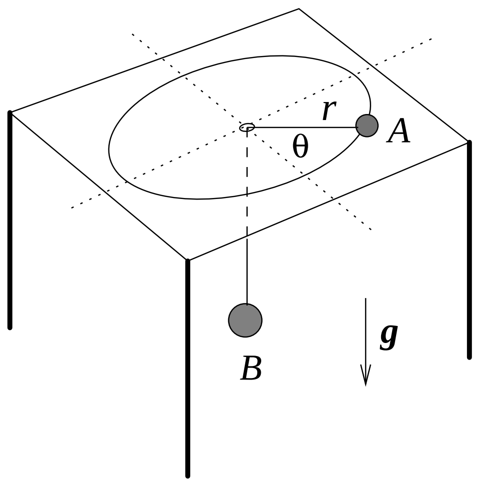
(a) Assuming that the initial position of A is $r = r_0$, which initial velocity should be given to the particle so that B remains at rest below the surface of the table?

(b) Obtain the equations of motion, assuming that the Lagrangian that describes an arbitrary movement of this system is given by

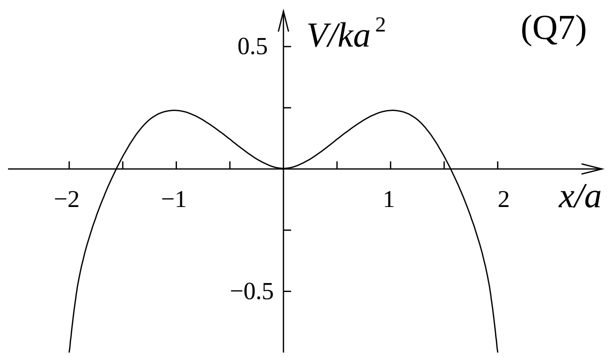
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - Mg(r-\ell).$$

(c) Determine the conserved quantities and give the meaning of each of them

(d) If B is slightly and vertically displaced from its position, there will occur small oscillations in the system. Obtain the period of these oscillations in terms of the equilibrium radius r_{eq} and the other quantities that characterize the system (m, M and g).



(Q6)



(Q7)

Q7. A particle of mass m is subject to the one-dimensional potential

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{k}{4a^2}x^4,$$

shown in the figure above, where k and a are positive constants.

(a) Determine the force $F(x)$, obtain the equilibrium points, and describe their nature.

(b) Calculate the period of small oscillations occurring around the point of stable equilibrium.

(c) Assume that the particle is at rest at the point $x = 0$ and receives, instantaneously, an impulse that gives the particle a speed v in the direction of positive x. Address the following cases: $0 < v \leq a\sqrt{k/2m}$ and $v > a\sqrt{k/2m}$.

(d) Sketch the phase diagram of the system ($\dot{x}$ versus x for a constant energy) for the several types of motion. Indicate clearly the curve corresponding to the transition from the periodic to the non-periodic motion as well as the corresponding values of the energy.

Q8. Consider the problem of a particle of mass m whose motion along the x-axis is restricted to the interval $0 \le x \le a$, that is, it is confined in a box with walls placed at positions $x = 0$ and $x = a$.

(a) Determine the wave function and the energy of the ground state.

(b) Suppose that the particle is described by the following wave function:

$$\psi(x) = A\left[\sin\frac{\pi x}{a} - 3i\sin\frac{2\pi x}{a}\right],$$

where A is a normalization constant. Determine A and calculate the probability of finding the result $2\pi^2\hbar^2/ma^2$ in the measurement of the energy.

(c) Suppose now that the particle is in the ground state. What is the probability distribution of the linear momentum of the particle in this state?

(d) Considering, again, that the particle is in the ground state, suppose that the walls are removed instantaneously, so that the particle becomes free ($\hat{\mathcal{H}} = \hat{p}^2/2m$). What is the energy of this free particle?

Q9. Consider a particle of spin 1/2, whose magnetic moment is $\vec{M} = \gamma\vec{S}$, where γ is a constant. It is possible to describe the quantum state of this particle using the space spanned by the eigenvectors $|+\rangle$ and $|-\rangle$ of the operator $\hat{S}_z$, which measures the projection of the spin in the z direction,

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \qquad \hat{S}_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle.$$

The particle is subject to a uniform magnetic field $\vec{B} = B\hat{y}$, parallel to the y axis, so that the Hamiltonian is given by

$$\hat{\mathcal{H}} = -\vec{M}\cdot\vec{B} = -\gamma B\hat{S}_y.$$

Initially, at time $t = 0$, the particle is in the state $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$.

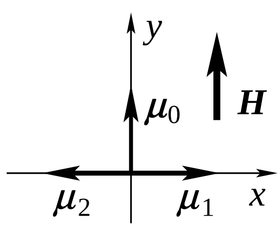
(a) What are the possible values of the projection of the spin on the y axis?

(b) Find the eigenvectors of $\hat{S}_y$.

(c) Obtain $|\psi(t)\rangle$ for $t > 0$ in terms of $|+\rangle$ and $|-\rangle$ defined above.

(d) Obtain the average values of the observables S_x, S_y e S_z as functions of time.

Q10. A certain magnetic material comprises N noninteracting magnetic atoms, whose magnetic moments $\boldsymbol{\mu}$ can be in three possible directions, according to the figure: $\boldsymbol{\mu}_0 = \mu\hat{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{\mu}_1 = \mu\hat{\boldsymbol{x}}$ and $\boldsymbol{\mu}_2 = -\mu\hat{\boldsymbol{x}}$. The system is in thermal equilibrium at temperature T in the presence of a magnetic field parallel to the y direction, $\boldsymbol{H} = H\hat{\boldsymbol{y}}$, so that the levels of energy of an atom are $\epsilon_0 = -\mu H$, $\epsilon_1 = 0$ and $\epsilon_2 = 0$.



(a) Obtain the canonical partition function z of an atom , the canonical partition function Z of the system and the Helmholtz free energy f per atom.

(b) Determine the average energy $u = \langle\epsilon_n\rangle$ and the entropy s per atom.

(c) Obtain the magnetization per atom $\boldsymbol{m} = m_x\hat{\boldsymbol{x}} + m_y\hat{\boldsymbol{y}} = \langle\boldsymbol{\mu}_n\rangle$.

(d) Verify that the isothermal susceptibility $\chi_T = (\partial m_y/\partial H)_T$ at zero field obeys the Curie law, $\chi_T \propto 1/T$.