

# EUF

## Exame Unificado das Pós-graduações em Física

Para o primeiro semestre de 2015

14 outubro 2014

Parte 1

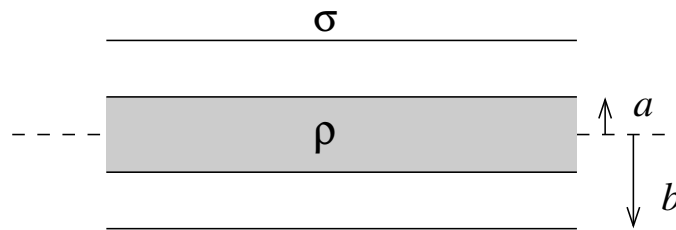
---

### Instruções

- **Não escreva seu nome na prova.**  
Ela deverá ser identificada apenas através do código (EUFxxx).
  - Esta prova contém problemas de:  
eletromagnetismo, física moderna e termodinâmica.  
Todas as questões têm o mesmo peso.
  - O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.  
O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
  - Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
  - **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**  
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
  - Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
  - Não escreva nada no formulário.  
Devolva-o ao fim da prova, pois será utilizado na prova de amanhã.
- 

**Boa prova!**

- Q1. a) Um cilindro dielétrico maciço, de comprimento infinito e raio  $a$ , possui uma densidade de carga volumétrica uniforme e positiva  $\rho$ . Uma casca cilíndrica, também dielétrica, de raio  $b > a$ , com eixo comum ao cilindro, tem uma densidade de carga superficial uniforme e negativa  $\sigma$ , de forma que a carga total do cilindro mais casca, em certo comprimento, é zero, e portanto  $\sigma = -\rho a^2/2b$ . Calcule o campo elétrico  $\vec{E}(r)$  para as regiões  $r < a$ ,  $a < r < b$  e  $b < r$  sendo  $r$  a distância ao eixo do cilindro.
- b) Considere em seguida que o conjunto cilindro mais casca se move para a direita com velocidade  $\vec{v}$ . O movimento dá origem a uma corrente elétrica  $I = \pi a^2 \rho v$  no cilindro maciço, para a direita e uniformemente distribuída na seção reta, de forma que a densidade de corrente fica sendo dada por  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ . Da mesma forma, a casca em movimento dá origem a uma corrente de mesma intensidade  $I$ , mas em sentido contrário (para a esquerda). Calcule a indução magnética  $\vec{B}$  para as regiões  $r < a$ ,  $a < r < b$  e  $b < r$ .



- Q2. O campo elétrico de uma onda plana monocromática no vácuo é dado por

$$\vec{E}(z,t) = (E_1 \hat{x} + E_2 \hat{y})e^{i(kz - \omega t)}.$$

onde  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são versores cartesianos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $E_1$  e  $E_2$  são constantes.

- a) Encontre a indução magnética  $\vec{B}(z,t)$ .
- b) Mostre que o campo elétrico e a indução magnética são ortogonais entre si.
- c) Encontre o vetor de Poynting da onda.
- Q3. Considere um gás de moléculas diatômicas com frequência de oscilação  $\omega$  e momento de inércia  $I$ . À temperatura ambiente, as energias dos estados moleculares vibracionais são muito maiores do que  $k_B T$ . Portanto, a maioria das moléculas se encontra no estado vibracional de menor energia. Por outro lado, a energia característica dos estados rotacionais é muito menor do que  $k_B T$ . A energia rotacional-vibracional  $E(n,\ell)$  do estado de uma molécula diatômica é caracterizada pelo número quântico  $n$ , para a energia vibracional, e pelo número quântico  $\ell$ , para a energia rotacional.
- a) Escreva  $E(n,\ell)$  para  $n = 0$  e  $\ell$  qualquer.
- b) Suponha que uma molécula sofra uma transição de um estado inicial com  $n = 0$  e  $\ell$  qualquer para um estado excitado com  $n = 1$ . Determine as duas energias totais permitidas para a molécula após a transição, lembrando que a regra de seleção impõe  $\Delta\ell = \pm 1$ . Calcule a diferença de energia entre esses dois estados permitidos e o estado inicial, bem como as respectivas frequências de transição.
- c) Considere o estado da molécula no qual  $n = 0$  e  $\ell$  qualquer. Sabendo que a degenerescência do estado é  $2\ell + 1$ , determine a população do estado rotacional-vibracional,  $N(E)$ , como função de  $E$ , a partir da distribuição de Boltzmann.

- d) Para  $n = 0$ , o estado  $\ell = 0$  não é o estado mais populado à temperatura ambiente. Para pequenos valores de  $\ell$ , a população do estado aumenta ligeiramente em relação a  $\ell = 0$  por causa do aumento da densidade de estados. Para grandes valores de  $\ell$ , a população diminui por causa do fator de Boltzmann. Determine o valor de  $\ell$  para o qual a população é máxima.

Q4. Suponha que um fóton encontre um elétron que está inicialmente em repouso no referencial S, como na figura 1A. Na maioria das vezes, o fóton é simplesmente desviado da trajetória original, mas, ocasionalmente, o evento resulta no desaparecimento do fóton e na criação de um par elétron-pósitron, na presença do elétron original. Suponha que os detalhes da interação que produziu o par sejam tais que as três partículas resultantes se movam para direita, como na figura 1B, com a mesma velocidade  $u$ , isto é, que estejam todas em repouso no referencial S', que está se movendo para a direita com velocidade  $u$  em relação a S.

- Escreva as leis de conservação de energia e momento antes e depois da criação do par.
- Usando a conservação da energia-momento no caso relativístico, obtenha no sistema S' a energia do fóton para que seja criado um par de partículas com energia equivalente à energia de repouso de 2 elétrons.
- Utilize a relação  $m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$  para obter a relação  $u/c = pc/E$ .
- Determine a partir do item (c) a velocidade  $u$  com a qual as três partículas se movem no referencial S.



Figura 1: (A) Situação anterior à colisão, no referencial S. (B) Situação após a colisão, no referencial S.

Q5. Um gás ideal contido num recipiente, inicialmente com volume  $V_A$  e pressão  $p_A$  (estado A), sofre expansão isobárica até atingir o volume  $V_B$  (estado B). O gás sofre então uma expansão adiabática, até que sua pressão seja  $p_C$  (estado C), de forma que uma contração isobárica (até o estado D) seguida de uma compressão adiabática levem o gás novamente à situação inicial (estado A). Considere dada a razão  $\gamma$  entre os calores específicos do gás a pressão constante e a volume constante.

- Represente as transformações descritas acima em um diagrama  $p-V$ , indicando os estados A, B, C e D.
- Calcule o calor trocado em cada trecho do ciclo, em termos de  $p_A$ ,  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $p_C$  e  $\gamma$ .
- Determine a eficiência do ciclo, isto é, a razão entre o trabalho realizado pelo gás e o calor absorvido por ele.

**EUF**

**Exame Unificado  
das Pós-graduações em Física**

Para o primeiro semestre de 2015

15 outubro 2014

Parte 2

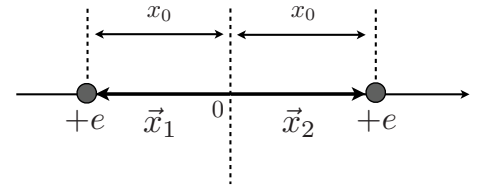
---

**Instruções**

- **Não escreva seu nome na prova.**  
Ela deverá ser identificada apenas através do código (**EUFxxx**).
  - Esta prova contém problemas de:  
mecânica clássica, mecânica quântica e mecânica estatística.  
Todas as questões têm o mesmo peso.
  - O tempo de duração desta prova é de **4 horas**.  
O tempo mínimo de permanência na sala é de 60 minutos.
  - Não é permitido o uso de calculadoras ou outros instrumentos eletrônicos.
  - **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.**  
As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Qx) e o seu código de identificação (EUFxxx). Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas. Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
  - Se precisar de rascunho, use as folhas identificadas como **rascunho**, que se encontram no fim do caderno de respostas. Não as destaque. As folhas de rascunho serão descartadas e questões nelas resolvidas não serão consideradas.
  - Não é necessário devolver o formulário.
- 

**Boa prova!**

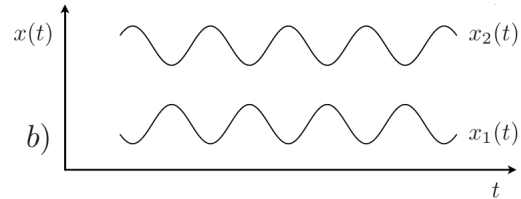
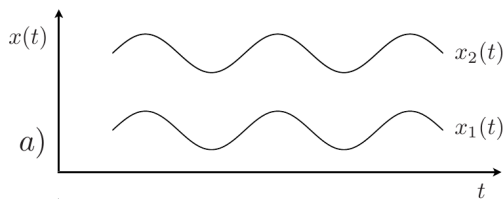
Q6. É possível construir armadilhas capazes de confinar íons de massa  $m$  e carga  $q$ . Em particular, a armadilha pode restringir o movimento dos íons a apenas uma dada direção espacial,  $x$ . Assim, considere dois íons de cálcio uma vez ionizado ( $\text{Ca}^+$ ), submetidos a um potencial confinante externo harmônico  $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ . Esses íons interagem adicionalmente através da repulsão coulombiana,



$$F_C = \frac{e^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são as posições dos íons de cálcio e, por simplicidade, foi definido:  $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$ . A figura acima define um sistema de coordenadas conveniente e representa os íons na posição de equilíbrio em que  $-x_1 = x_2 = x_0$ . O objetivo deste problema é estudar os modos normais dessa cadeia unidimensional constituída pelos dois íons de cálcio.

- Obtenha a posição de equilíbrio  $x_0$  em termos de  $e$ ,  $m$  e  $\omega$ .
- Escreva as equações de Newton para o movimento de cada íon e obtenha a frequência de oscilação do sistema quando a separação entre os íons for constante. Este é o primeiro modo normal de oscilação dessa cadeia.
- O segundo modo normal corresponde a um movimento antissimétrico dos íons, em cujo caso o centro de massa está parado em  $x = 0$ . Obtenha esse segundo modo normal no limite de pequenas oscilações. Obtenha a razão entre as frequências dos dois modos normais de oscilação do sistema.
- As figuras a) e b) abaixo representam os modos normais de oscilação desse sistema de dois íons. Identifique o primeiro e o segundo modo normal obtidos, respectivamente, nos itens b e c acima. Qual deles tem menor energia?



Q7. Um satélite artificial de massa  $m$  está em órbita elíptica em torno da Terra. Admita que a Terra seja uma esfera de densidade uniforme com raio  $R$  e massa  $M$ , e denote por  $G$  a constante de gravitação universal. Considere conhecidos  $d$  e  $D$ , as distâncias entre o centro da Terra e o satélite nos pontos de menor e maior afastamento, respectivamente. Uma partícula de massa  $m_0$  menor do que  $m$ , choca-se centralmente e de forma completamente inelástica com o satélite no ponto de menor afastamento da Terra. No instante da colisão, o satélite e a partícula tinham velocidades iguais em módulo, mas com sentidos opostos.

- Obtenha a velocidade  $v_S$  do sistema satélite-partícula *imediatamente após* a colisão em termos de  $v_p$ , a velocidade no ponto de menor afastamento.
- Expresse o momento angular do satélite nos pontos de mínimo e máximo afastamento em termos de  $v_p$  e de  $v_a$  (a velocidade no ponto de maior afastamento), respectivamente, antes da colisão.
- Obtenha a velocidade  $v_p$ , antes da colisão, em termos de  $M$ ,  $d$ ,  $D$  e  $G$ .

- d) Obtenha a energia  $E_S$  e o momento angular  $L_S$  do sistema satélite-partícula, depois da colisão, em termos de  $m_0$  e das grandezas que caracterizam o movimento do satélite antes da colisão.

Q8. Seja o estado do spin de um elétron dado por

$$|\psi\rangle = \alpha \left( |z_+\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2} |z_-\rangle \right)$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lembrando que os operadores de spin  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$ ,  $\hat{S}_z$  podem ser escritos em termos das matrizes de Pauli como  $\hat{\mathbf{S}} = \hbar \vec{\sigma}/2$  (veja formulário), onde

$$\begin{aligned} \hat{S}_x|x_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|x_+\rangle, & \hat{S}_x|x_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|x_-\rangle, \\ \hat{S}_y|y_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|y_+\rangle, & \hat{S}_y|y_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|y_-\rangle, \\ \hat{S}_z|z_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2}|z_+\rangle, & \hat{S}_z|z_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle, \end{aligned}$$

- Qual é o valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  para que  $|\psi\rangle$  fique normalizado?
- Qual é a probabilidade de se medir  $-\hbar/2$  para o spin na direção  $z$ ?
- Qual é a probabilidade de se medir  $+\hbar/2$  para o spin na direção  $x$ ?
- Qual é o valor esperado do spin no plano  $y = 0$  em uma direção de  $45^\circ$  entre os eixos  $x$  e  $z$ ?

Q9. Seja o operador  $\hat{A}$  associado a um certo observável físico  $A$  de um sistema satisfazendo  $[\hat{A}, \hat{H}] \neq 0$ , onde  $\hat{H}$  é um operador hamiltoniano independente do tempo. Sejam agora os autovetores normalizados,  $\phi_+$ ,  $\phi_-$ , e autovalores correspondentes,  $a_+$ ,  $a_-$  ( $a_+ \neq a_-$ ) de  $\hat{A}$ :

$$\hat{A}\phi_+ = a_+\phi_+, \quad \hat{A}\phi_- = a_-\phi_-,$$

com

$$\phi_+ = \frac{u_+ + u_-}{\sqrt{2}}, \quad \phi_- = \frac{u_+ - u_-}{\sqrt{2}}$$

onde

$$\hat{H}u_+ = E_+u_+, \quad \hat{H}u_- = E_-u_-$$

- Calcule o valor esperado de  $\hat{A}$  no estado  $\phi_+$ .
- Calcule a projeção de  $\hat{H}u_+$  no estado  $u_-$ .
- Admitindo que o sistema esteja inicialmente em um estado arbitrário,  $\psi(0)$  escreva quanto valerá o estado  $\psi(t)$  em um instante posterior como função de  $\hat{H}$ .
- Calcule o valor esperado do observável  $A$  no instante  $t = \hbar\pi/[3(E_+ - E_-)]$  admitindo que o sistema esteja inicialmente no estado  $\psi(0) = \phi_+$  e  $E_+ \neq E_-$ .

Q10. Considere  $N$  osciladores harmônicos tridimensionais clássicos não-interagentes, de massa  $m$  e frequência angular  $\omega$ , em contato com um reservatório térmico à temperatura  $T$ .

- Escreva a hamiltoniana do sistema e obtenha a função de partição canônica.
- Obtenha o valor médio da energia por oscilador. Qual a capacidade térmica do sistema?

# EUF

## Joint Entrance Examination for Postgraduate Courses in Physics

For the first semester 2015

14 October 2014

Part 1

---

### Instructions

- **Do not write your name on the test.**

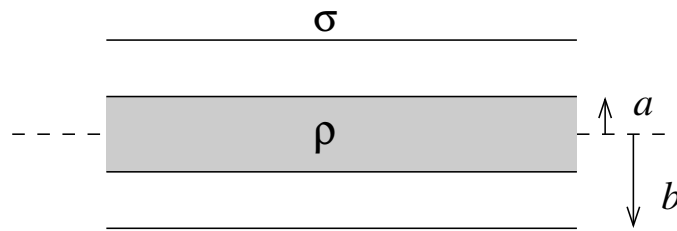
It should be identified only by your candidate number (EUFXxx).

- This test contains questions on:  
electromagnetism, modern physics, and thermodynamics.  
All questions have the same weight.
- The duration of this test is **4 hours**.  
Candidates must remain in the exam room for a minimum of 60 minutes.
- The use of calculators or other electronic instruments is not permitted during the exam.
- **Answer each question on the corresponding page of the answer booklet.**  
The sheets with answers will be reorganized for correction. If you need more answer space, use the extra sheets in the answer booklet. Remember to write the number of the question (Qx) and your candidate number (EUFXxx) on each extra sheet. Extra sheets without this information will be discarded. Use separate extra sheets for each question. Do not detach the extra sheets.
- If you need spare paper for rough notes or calculations, use the sheets marked **scratch** at the end of the answer booklet. Do not detach them. The scratch sheets will be discarded and solutions written on them will be ignored.
- Do not write anything on the list of constants and formulae.  
Return it at the end of the test, as it will be used in the test tomorrow.

---

**Have a good exam!**

- Q1. a) A solid dielectric cylinder, of infinite length and radius  $a$ , has a positive and uniform bulk charge density  $\rho$ . A cylindrical shell, also dielectric, of radius  $b > a$ , with its axis coinciding with that of the solid cylinder, has a negative and uniform surface charge density  $\sigma$ , such that the total charge of the cylinder plus the shell, in a given length, vanishes, so that  $\sigma = -\rho a^2/2b$ . Determine the electric field  $\vec{E}(r)$  in the regions  $r < a$ ,  $a < r < b$  and  $b < r$  where  $r$  is the distance from the axis of the cylinder.
- b) Next, suppose that the cylinder plus the shell moves together to the right with velocity  $\vec{v}$ . The motion gives rise to an electric current  $I = \pi a^2 \rho v$  in the massive cylinder, to the right and uniformly distributed on the cross section, such that the current density is given by  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ . Similarly, the shell in motion gives rise to a current of the same intensity  $I$ , but in the inverse direction (to the left). Determine the magnetic induction  $\vec{B}$  in the regions  $r < a$ ,  $a < r < b$  and  $b < r$ .



- Q2. The electric field of a monochromatic plane wave in vacuum is given by

$$\vec{E}(z,t) = (E_1 \hat{x} + E_2 \hat{y})e^{i(kz - \omega t)}.$$

where  $\hat{x}$  and  $\hat{y}$  are the Cartesian versors in directions  $x$  and  $y$ , respectively, and  $E_1$  and  $E_2$  are constant.

- a) Find the magnetic induction  $\vec{B}(z,t)$ .
- b) Show that the electric field and the magnetic induction are orthogonal to each other.
- c) Find the Poynting vector of the wave.
- Q3. Consider a gas of diatomic molecules with frequency of oscillation,  $\omega$ , and moment of inertia,  $I$ . At room temperature, the energies of molecular vibration are much larger than  $k_B T$ . Therefore, the majority of the molecules are found in the vibrational state of lowest energy. On the other hand, the characteristic energy of the rotational states is much lower than  $k_B T$ . The rotational-vibrational energy  $E(n,\ell)$  of the state of a diatomic molecule is characterized by the quantum number  $n$ , for the vibrational energy, and by the quantum number  $\ell$ , for the rotational energy.
- a) Write  $E(n,\ell)$  for  $n = 0$  and any  $\ell$ .
- b) Suppose that a molecule suffers a transition from an initial state with  $n = 0$  and any  $\ell$  to an excited state with  $n = 1$ . Determine the two allowed total energies for the molecule after the transition, bearing in mind that the selection rules impose  $\Delta\ell = \pm 1$ . Determine the difference in energy between these two allowed states and the initial state, as well as the respective transition frequencies.
- c) Consider the state of the molecule in which  $n = 0$  and any  $\ell$ . Knowing that the degeneracy of the state is  $2\ell + 1$ , determine the population of the rotational-vibrational state,  $N(E)$ , as a function of  $E$ , from the Boltzmann distribution.



- d) For  $n = 0$ , the state  $\ell = 0$  is not the most populated state at room temperature. For small values of  $\ell$ , the population of the state increases slightly with relation to  $\ell = 0$  due to the increase in the density of states. For large values of  $\ell$ , the population decreases due to the Boltzmann factor. Determine the value of  $\ell$  for which the population is a maximum.

Q4. Suppose that a photon collides with an electron that is initially at rest in a reference frame S, as in figure 1A. Most of the time, the photon is simply scattered from its original trajectory, but, occasionally, the event results in the annihilation of the photon and the creation of an electron-positron pair, in the presence of the original electron. Assume that the details of the interaction that produce the pair are such that the three resulting particles move to the right, as seen in figure 1B, with the same velocity  $u$ , that is, in a way that all are at rest in a reference frame  $S'$ , which is moving to the right with velocity  $u$  with respect to S.

- Write down the energy and momentum conservation laws before and after the pair creation.
- Using relativistic energy-momentum conservation, find, in the system  $S'$ , the photon energy for the creation of a pair of particles with energy equivalent to the rest energy of 2 electrons.
- Use the relation  $m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$  to find the relation  $u/c = pc/E$ .
- Determine from (c) the velocity  $u$  with which the three particles move in the frame S.



Figure 1: (A) Situation before the collision, in the frame S. (B) Situation after the collision in the frame S.

Q5. An ideal gas enclosed in a vessel, initially with volume,  $V_A$ , and pressure  $p_A$  (state A), undergoes an isobaric expansion until reaching a volume  $V_B$  (state B). The gas then undergoes an adiabatic expansion, until its pressure becomes  $p_C$  (state C), so that an isobaric contraction (until state D) followed by an adiabatic compression, will drive the gas again to the initial situation (state A). Assume that the ratio  $\gamma$  between the specific heat at constant pressure and constant volume is given.

- Show the transformations described above in a  $p - V$  diagram, indicating the states A, B, C and D.
- Calculate the heat exchanged in each part of the cycle, in terms of  $p_A$ ,  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $p_C$  and  $\gamma$ .
- Determine the efficiency of the cycle, that is, the ratio between the work performed by the gas and the heat absorbed by the gas.

**EUF**

**Joint Entrance Examination  
for Postgraduate Courses in Physics**

For the first semester 2015

15 October 2014

Part 2

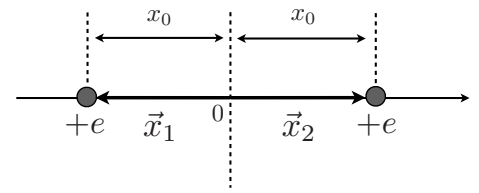
---

**Instructions**

- **Do not write your name on the test.**  
It should be identified only by your candidate number (**EUFXxx**).
  - This test contains questions on:  
classical mechanics, quantum mechanics, and statistical mechanics.  
All questions have the same weight.
  - The duration of this test is **4 hours**.  
Candidates must remain in the exam room for a minimum of 60 minutes.
  - The use of calculators or other electronic instruments is not permitted during the exam.
  - **Answer each question on the corresponding page of the answer booklet.**  
The sheets with answers will be reorganized for correction. If you need more answer space, use the extra sheets in the answer booklet. Remember to write the number of the question (Qx) and your candidate number (EUFXxx) on each extra sheet. Extra sheets without this information will be discarded. Use separate extra sheets for each question. Do not detach the extra sheets.
  - If you need spare paper for rough notes or calculations, use the sheets marked **scratch** at the end of the answer booklet. Do not detach them. The scratch sheets will be discarded and solutions written on them will be ignored.
  - It is not necessary to return the list of constants and formulae.
- 

**Have a good exam!**

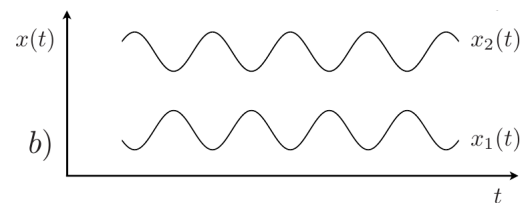
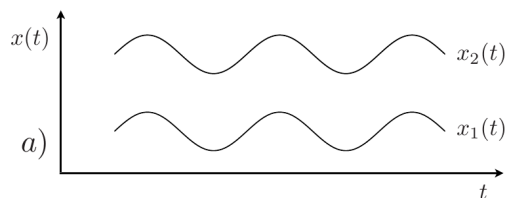
Q6. It is possible to set up traps capable of confining ions of mass  $m$  and charge  $q$ . In particular, the trap can restrict the motion of the ions to just one spatial direction,  $x$ . Thus, consider two calcium ions singly ionized ( $\text{Ca}^+$ ), subject to an external harmonic confining potential,  $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ . In addition, these ions interact through the Coulomb repulsion,



$$F_C = \frac{e^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

where  $x_1$  and  $x_2$  are the positions of the calcium ions and, for simplicity, we define:  $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$ . The figure above defines a convenient coordinate system and represents the ions at the equilibrium positions for which  $-x_1 = x_2 = x_0$ . The aim of this problem is the study of the normal modes of this one-dimensional chain comprising the two calcium ions.

- Find the equilibrium position  $x_0$  in terms of  $e$ ,  $m$  and  $\omega$ .
- Write down Newton's equations for the motion of each ion and obtain the frequency of oscillation of the system when the separation of the ions is constant. This is the first normal mode of oscillation of the chain.
- The second mode corresponds to an antisymmetric motion of the ions, in which case the center of mass is at rest at  $x = 0$ . Obtain the second mode in the limit of small oscillations. Obtain the ratio between the frequencies of the two normal modes of oscillation of the system.
- Figures a) and b) below represent the normal mode of oscillation of this system of two ions. Identify the first and the second normal mode obtained, respectively, in items b and c above. Which one has the smaller energy?



Q7. An artificial satellite of mass  $m$  is in an elliptic orbit around the Earth. Assume that the Earth is a sphere of uniform density with radius  $R$  and mass  $M$ , and denote by  $G$  the universal gravitational constant. Consider known  $d$  and  $D$ , the distances between the Earth's center and the points of smallest and greatest separation, respectively. A particle of mass  $m_0$  smaller than  $m$ , collides head on and completely inelastically with the satellite at the point of smallest separation from the Earth. At the instant of collision, the satellite and the particle have the same speed but opposite velocities.

- Obtain the velocity  $v_S$  of the satellite-particle system *just after* the collision in terms of  $v_p$ , the velocity at the point of smallest separation.
- Express the angular momentum of the satellite at the points of minimum and maximum separation in terms of  $v_p$  and of  $v_a$  (the velocity at greatest separation), respectively, before the collision.
- Find the velocity  $v_p$ , before the collision, in terms of  $M$ ,  $d$ ,  $D$  and  $G$ .

- d) Find the energy  $E_S$  and the angular momentum  $L_S$  of the satellite-particle system, after the collision, in terms of  $m_0$  and the quantities that characterize the motion of the satellite before the collision.

Q8. Let the spin state of an electron be given by

$$|\psi\rangle = \alpha \left( |z_+\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2} |z_-\rangle \right)$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bearing in mind that the spin operators  $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$  can be written in terms of the Pauli matrices as  $\hat{\mathbf{S}} = \hbar \vec{\sigma}/2$  (see the list of formulae), where

$$\begin{aligned} \hat{S}_x |x_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |x_+\rangle, & \hat{S}_x |x_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |x_-\rangle, \\ \hat{S}_y |y_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |y_+\rangle, & \hat{S}_y |y_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |y_-\rangle, \\ \hat{S}_z |z_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |z_+\rangle, & \hat{S}_z |z_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |z_-\rangle, \end{aligned}$$

- What is the value of  $\alpha \in \mathbb{R}$  such that  $|\psi\rangle$  is normalized?
- What is the probability of measuring  $-\hbar/2$  for the spin in the direction  $z$ ?
- What is the probability of measuring  $+\hbar/2$  for the spin in the direction  $x$ ?
- What is the expectation value of the spin in the plane  $y = 0$  in a direction of  $45^\circ$  between the axes  $x$  and  $z$ ?

Q9. Let  $\hat{A}$  be an operator associated with a physical observable  $A$  of a system satisfying  $[\hat{A}, \hat{H}] \neq 0$ , where  $\hat{H}$  is a time independent Hamiltonian operator. Now, let  $\phi_+, \phi_-$  be the normalized eigenvectors and  $a_+, a_-$  ( $a_+ \neq a_-$ ) the corresponding eigenvalues of  $\hat{A}$ :

$$\hat{A}\phi_+ = a_+\phi_+, \quad \hat{A}\phi_- = a_-\phi_-,$$

with

$$\phi_+ = \frac{u_+ + u_-}{\sqrt{2}}, \quad \phi_- = \frac{u_+ - u_-}{\sqrt{2}}$$

where

$$\hat{H}u_+ = E_+u_+, \quad \hat{H}u_- = E_-u_-$$

- Calculate the expectation value of  $\hat{A}$  in state  $\phi_+$ .
- Calculate the projection of  $\hat{H}u_+$  onto state  $u_-$ .
- Assuming that the system is initially in an arbitrary state  $\psi(0)$ , write down the state  $\psi(t)$  at a later time as a function of  $\hat{H}$ .
- Calculate the expectation value of the observable  $A$  at time  $t = \hbar\pi/[3(E_+ - E_-)]$  assuming that the system is initially in state  $\psi(0) = \phi_+$  and  $E_+ \neq E_-$ .

Q10. Consider  $N$  three-dimensional non-interacting classical harmonic oscillators, of mass  $m$  and angular frequency  $\omega$ , in contact with a heat reservoir at temperature  $T$ .

- Write down the Hamiltonian of the system and find the canonical partition function.
- Obtain the average value of the energy per oscillator. What is the heat capacity of the system?