Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas

Admissão na Pós-Graduação do Departamento de Astronomia – IAG/USP

EXAME ESCRITO – 27 de setembro de 2011

GABARITO

Nome:

...

Instruções ao candidato:

a. A prova é individual, sem qualquer consulta. É permitido o uso de calculadora. A duração da prova é de no máximo 4 horas.

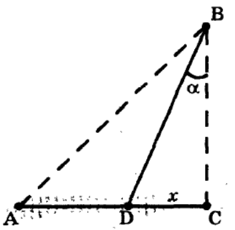
b. A prova **não poderá** ser feita a lápis. Escreva seu nome em cada folha prova e numere-as.

c. Se estiver fazendo a prova fora do IAG/USP, use papel A4, mas deixe margens de pelo menos 2 cm nos quatro lados de cada folha. Use somente um lado da folha de respostas e numere-as. Solicitamos que a prova seja enviada ao IAG por fax (+55-11)-3091-2860 ou por email [secret@astro.iag.usp.br] e as folhas originais de respostas enviadas pelo correio: A/C Sra. Marina Freitas, Departamento de Astronomia, Rua do Matão, 1226 – Cidade Universitária – 05508-090 São Paulo /SP.

---

1. Uma pessoa está na beira de um rio, no ponto A. Ela quer chegar até o ponto B, localizado no rio. Calcule o caminho mais rápido para percorrer de A até B.
   Dados: a velocidade de percurso pela terra, V_1 , a velocidade de percurso pela água, V_2 ($V_2 < V_1$). A distância mínima do ponto B até a beira do rio é *d*.

   Resposta: AD (trecho pela terra) + DB (trecho pela água)

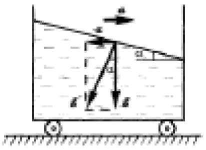


Calculamos os tempos de percorrer o trecho AD e trecho DB, resolvemos a geometria do triângulo, minimizamos a soma dos tempos calculando a derivada. Assim obtemos $x=dV_1/\mathrm{sqrt}(V_{12}-V_{22})$, BC=d

Também, pode ser usado o princípio de Ferma de óptica: sen(α) $=V_2/V_1$,
Mas, x = tan(α). Assim obtemos x.

2. A superfície da água em um reservatório é plana e horizontal quando o reservatório está em repouso. Obtenha a forma da superfície da água em um reservatório que se move horizontalmente, com aceleração $\vec{a}$. (Justificar qualquer afirmação.)

Resposta: plano inclinado com ângulo alpha=tan(a/g) em relação a horizontal. No sistema referencial não-inercial (dentro do reservatório) a resultante da força é vetor **g'** (soma de peso **g** e força de inércia **a,** em unidades de massa). A superfície de água deve ser perpendicular ao vetor **g'**.



3. Esboce um fluxograma para cálculo da soma de todos os números naturais, ímpares e menores de 1000000.

4. Suponha um arranjo onde um feixe de luz linearmente polarizada com intensidade I_0 atravessa dois polarímetros. O primeiro com um eixo a 45° em relação ao feixe incidente e o segundo 90° em relação ao mesmo feixe inicial.
a) Usando a lei de Malus calcule a intensidade e direção do feixe que emerge do segundo polarímetro.
b) Suponha agora que o primeiro polarímetro é removido. Calcule a intensidade e direção do feixe que emerge do sistema.
c) Comente o resultado de b) comparando com a).

Resposta:

Lei de Malus: $I = I_0 \cos^2 \theta$

a) $I' = I_0 \cos^2 45 = 0{,}5\ I_0$ – Direção a 45 graus do feixe inicial
$I'' = I' \cos^2 (90-45) = 0{,}5\ I' = 0{,}25\ I_0$ – Direção a 90 graus do feixe inicial

b) $I' = I_0 \cos^2 90 = 0$
Como não há o elemento polarizador que provoca uma alteração de 45° do ângulo de polarização, o feixe que agora atinge o segundo polarizador tem um ângulo de 90° em relação a esse, de modo que nenhuma luz é transmitida. Esse experimento demonstra a natureza vetorial da polarização da luz.

5. Use o princípio da incerteza de Heisenberg para estimar a energia cinética (em MeV) de um próton ligado a um núcleo de raio 10^{-15} m. Dica: A energia total de uma partícula relativística é dada por: $E^2 = (c^2 p^2 + m^2c^4)$

Constantes em unidades naturais: $\hbar = 1.973\ 10^{-17}$ MeV m^{-1} / c
$m_p = 938.3$ MeV / c^2

Resposta:
$\Delta px \, .\Delta x = \hbar$

Suponha que a incerteza no momento é igual ao momento: $\Delta px = p$

$cp = \hbar c/\Delta x = 1{,}973\ 10^{-17}$ MeV m^{-1} / 10^{-15} m = 197,3MeV

$E = (c^2\ p^2 + m_p^2 c^4)^{1/2} = [(197{,}3)^2 + (938{,}3)^2]^{1/2} = 958.82$MeV

Energia cinética: $T = E - mc^2 = 958{,}82 - 938{,}3 = 20.52$MeV:

6. Uma caixa selada foi encontrada. Afirmava-se que ela continha uma liga composta de partes iguais em peso de dois metais A e B. Esses metais são radiativos, com meias-vidas de 12 anos e 18 anos, respectivamente. Quando a caixa foi aberta, encontrou-se 0,53 kg de A e 2,20 kg de B. Deduza a idade da liga.

   Resposta:

   Usando a lei de radioatividade:

   $N_A = N_A^0\ exp\ (\ -\lambda_A\ t)$ (1)

   $N_B = N_B^0\ exp\ (\ -\lambda_B\ t)$ (2)

   Dividindo (2) por (1)

   $N_A/N_B = exp(\lambda_A - \lambda_B)\ t$ porque $N_A^0 = N_B^0$

   Aplicando o log em ambos os lados da eq. acima:

   $$t = \frac{1}{(\lambda_A - \lambda_B)\ ln\left(\frac{N_A}{N_B}\right)}$$

   Dado que $N_A/N_B = 2.2/0.53 = 4.15$

   $\lambda_A = 0.693/T_{1/2}(A) = 0.693/12 = 0.05775$ ano^{-1}
   $\lambda_B = 0.693/T_{1/2}(B) = 0.693/18 = 0.0385$ ano^{-1}

   Assim, a idade do composto é $t = 73.93$ anos.

7. Estime a temperatura na qual a velocidade quadrática média da molécula de nitrogênio na atmosfera da Terra é igual à velocidade de escape do campo gravitacional terrestre. Considere a massa da molécula de N = 23.24 uma e o raio da Terra = 6400 km.

   Resposta:

$$Ec = Ep \qquad \frac{mv_e^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

$$g = \frac{GM}{r^2},$$

$$V_e = (2gR)^{1/2} \quad ; \quad V_{rms} = (3kT/m)^{1/2}$$

$$V_{rms} = V_e$$

$$T = \frac{2mgR}{3k} = \frac{2 \times (2 \times 23.24 \times 10^{-27})(9.8)(6.37 \times 10^6)}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 1.4 \times 10^5 K$$

8. Após ser acelerado via uma diferença de potencial de 5000 V, um único íon carregado de carbono se move em um círculo de raio 21 cm no campo magnético de um espectrômetro de massa. Qual a magnitude do campo?

Resposta:
A energia cinética KE de uma partícula é conservada no campo magnético:

$$\frac{1}{2}mv^2 = Vq \qquad \text{or} \qquad v = \sqrt{\frac{2Vq}{m}}$$

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2Vq}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Vm}{q}}$$

$$m_C = (12\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) = 19.9 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

$$B^2 = \frac{2Vm_C}{r^2 q} = \frac{2(5000\ \text{V})(19.9 \times 10^{-27}\ \text{kg})}{(0.21\ \text{m})^2(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})}$$

$$= 2.82 \times 10^{-2}\ \text{T}^2 \qquad B = \underline{0.168\ \text{T}}$$

9. Os pontos abaixo tendem a uma distribuição do tipo $y_i = \theta x_i + \varepsilon_i$, com intersecção no ponto (0,0). Usando o método de mínimos quadrados, encontre o valor de *y* que corresponde a *x=15* para esse ajuste. O resultado será considerado válido somente se todas as etapas utilizadas nos cálculos forem explicitadas.

Dica: Determinar o valor de θ tal que $\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon^2)$ seja mínima
Dados: (-10, -50); (5, 5); (20, 80); (35,105); (40, 95)

Resposta:

Sabemos que a distribuição é uma função do tipo $y_i = \theta x_i + \varepsilon_i$
Devemos encontrar o valor de θ tal que $\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon^2)$ seja mínima, ou seja,

min θ; $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta x_i)^2$

Para encontrar o mínimo, é necessário que a primeira derivada seja zero e a segunda derivada seja negativa. Como a derivada da soma é a soma das derivadas, temos:

$$\frac{d}{d\theta}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \theta x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{d\theta}(y_i - \theta x_i)^2 = -\sum_{i=1}^{n}2x_i(y_i - \theta x_i)$$

Neste caso, a segunda derivada é -2 < 0. Assim, podemos encontrar o mínino impondo:

$$-\sum_{i=1}^{n}2x_i(y_i - \theta x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \theta(x_i)^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i y_i = \sum_{i=1}^{n}\theta(x_i)^2$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}$$

$$\theta = \frac{(-10 * -50) + (5 * 5) + (20 * 80) + (35 * 105) + (40 * 95)}{(-10)^2 + (5)^2 + (20)^2 + (35)^2 + (40)^2}$$

$$\theta = \frac{(500) + (25) + (1600) + (3675) + (3800)}{100 + 25 + 400 + 1225 + 1600}$$

$$\theta = \frac{9600}{3350} = 2.8656$$

Para x=15 → y=42.98

10. A região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo x e as retas x = 1 e x = 2 sofrem uma rotação em torno do eixo x. Encontre o volume do sólido de revolução gerado.

Resposta:

O volume de um sólido de revolução em torno do eixo x é dado por

V= $\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$, onde o limite do sólido é definido pelas retas x = a e x = b

Assim, V= $\pi\int_1^2 [x]^4\,dx$

V = $\pi(\frac{1}{5}x^5)\Big]_1^2$

V = $\frac{31}{5}\pi$