Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas

Admissão na Pós-Graduação do Departamento de Astronomia – IAG/USP

EXAME ESCRITO – 13 de março de 2012

Nome:

..

Instruções ao candidato:

a. A prova é individual, sem qualquer consulta. É permitido o uso de calculadora. A duração da prova é de no máximo 4 horas. Não é permitido o uso de telefone celular.
b. A prova **não poderá** ser feita a lápis. Escreva seu nome em cada folha prova e numere-as.
c. Se estiver fazendo a prova fora do IAG/USP, use papel A4, mas deixe margens de pelo menos 2 cm nos quatro lados de cada folha. Use somente um lado da folha de respostas e numere-as. Solicitamos que a prova seja enviada ao IAG por fax (+55-11)-3091-2860 ou por email [rossi@astro.iag.usp.br] e as folhas originais de respostas enviadas pelo correio: A/C Sra. Marina Freitas, Departamento de Astronomia, Rua do Matão, 1226 – Cidade Universitária – 05508-090 São Paulo /SP.

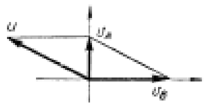
---

1. (a) Um automóvel se move na direção norte com velocidade 60 km/h, enquanto outro se move na direção leste com velocidade 80 km/h. Calcule a velocidade (a direção e o módulo) do primeiro automóvel em relação do segundo.

Resposta:

Resposta:
Vec(u) = Vec(v_A) – Vec(v_B)

Direção: **~ norte-oeste**



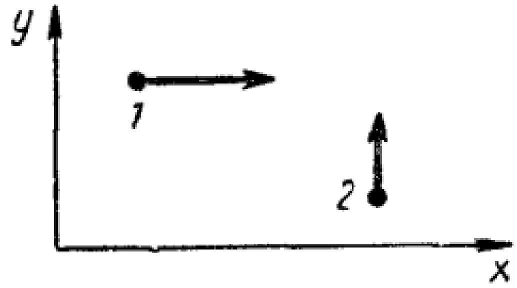
Modulo:

$$u = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} = \sqrt{\left(60\frac{km}{h}\right)^2 + \left(80\frac{km}{h}\right)^2} = 100\ \frac{km}{h}$$

(b) Um balão é levado pelo vento na direção sul. Que direção indicam as bandeiras amarradas a sua cesta? Argumente a resposta.

Resposta: Balão, junto com sua cesta e bandeiras, é levado pelo ar, segue que a velocidade de todos relativa ao ar é zero; segue que as bandeiras não 'sentem' o vento e por isso não indicam a direção nenhuma.

2. Duas partículas, 1 e 2, de massas m_1 e m_2, respectivamente, movem-se no plano com velocidades v_1 e v_2, como mostra a figura.



Depois de algum tempo, as duas partículas colidem.

(a) No caso quando a primeira partícula parar depois de colisão, calcule a velocidade da segunda partícula, considerando que $m_1=m_2=m$.

Resposta:

Na ausência das forças externas, a quantidade de movimento linear a partícula 2 depois da colisão deve ser igual à soma de movimentos lineares das duas partículas antes da colisão. Se introduzimos a velocidade u, obtivemos:

(b) No caso de colisão completamente inelástica, obtenha a velocidade das partículas depois da colisão.

Resposta:

Na ausência das forças externas, a quantidade de movimento linear do sistema é conservada tanto em direção X, como em direção Y. Se ux e uy são as componentes da velocidade depois da colisão, podemos escrever:

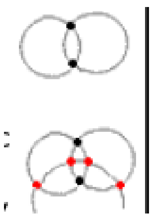
$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)\, u_x, \quad m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, u_y$$

Segue que o modulo da velocidade é:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}.$$

3. Calcular o número máximo de pontos de intersecção entre 8 circunferências de raios diferentes.

Resposta:



2+2x2+2x3+2x4+2x5+2x6+2x7 = 56

4. (a) Determine a energia cinética máxima de fotoelétrons ejetados de um superfície de potássio por uma luz ultra-violeta de comprimento de onda 2000 Å .

   (b) Qual é a diferença de potencial retardatária necessária para frear esses elétrons? O comprimento de onda limiar para a emissão de elétrons do potássio é 4400 Å.

Resposta

a)

$$W_{min} = h\nu_{min} = \frac{hc}{\lambda_{max}} = \frac{6.626\,10^{-34} \times 2.998\,10^{8}}{4400\,10^{-10}} = 4.515\,10^{-19}\,J$$

b)

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{max}} = (9.932 - 4.515) \times 10^{-19} = 5.418 \times 10^{-19}\,J$$

$$K = eV \Rightarrow V = \frac{K}{e} = \frac{5.418 \times 10^{-19}}{1.602 \times 10^{-19}} = 3.381\,Volts$$

5. Mede-se a largura angular do máximo de um padrão de difração de Fraunhoffer por uma fenda única, onde a fenda é iluminada por uma luz monocromática com 6000 Å de comprimento de onda. Ao iluminarmos a fenda com uma luz de outro comprimento de onda, notamos que a largura do máximo decresce de 30%. Qual o comprimento de onda desse novo feixe incidente? Admita que os ângulos aqui envolvidos são todos pequenos.

Resposta

A posição do primeiro mínimo é dada por: $d \sin\theta = \lambda$, onde d é a distância da fenda até o anteparo onde o padrão de difração é projetado. Supondo que θ é pequeno temos: $\lambda = d\theta$.
A largura total do primeiro máximo é a distância entre os mínimos de ambos os lados, ou seja: $2\theta(\lambda) = \frac{2\lambda}{d}$.

Temos então que:

$$\frac{\theta(\lambda_1)}{\theta(6000\text{Å})} = 0.7 = \frac{\lambda_1}{6000} \Rightarrow \lambda_1 = 4200\text{Å}$$

6. Dada a função f(x,y) = $ax^3 + by^2 + ce^x + d$ (sen y) + k, determine as derivadas df/dx e df/dy, e a integral dupla $F = \iint f(x, y)\, dx\, dy$.

7. Uma carga q é uniformemente distribuída em uma esfera de raio R.

   (a) Sabendo que a carga q' dentro da esfera é dada por $q' = q\,(r/R)^3$ obtenha a expressão para o campo elétrico E.
   (b) Sabendo que na superfície (r=R) o potencial é dado pela lei de Coulomb $V(R) = q / (4\,\pi\,\varepsilon_0\,R)$, obtenha a expressão para o potencial V(r) em um ponto distante r do centro (r < R).

   Resposta

The electric field will be $E = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

The potential $V(r) = -\int E dr = -\int \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + C$

$$= -\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + C \tag{1}$$

where C is a constant.

At $r = R$, the point is just on the surface and the potential will be given by Coulomb's law.

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{2}$$

Using (2) in (1), the value of C is determined as $C = \dfrac{3}{2}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ and (1) becomes

$$V(r) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

8. Uma fonte de ^{131}I (iodo 131) com vida-média de 11,52 dias tem uma atividade inicial de 3 mCi. Encontre a meia-vida e o número total de desintegrações da fonte.

Resposta:

T = 11,52 dias A_0= 3 mCi   τ = ?   N = ?

T = 1/λ ⇒ λ = 1/T = 1/11,52 = 0,0868 $dias^{-1}$ = 0,000001 s^{-1}

λ . τ = 0,693 ⇒ τ = 0,693/0,0868 = 7,98 dias

A = λ N ⇒ 3 . 10^{-3} . 3,7 . 10^{10} = 0,000001 . N

N = 1,105 . 10^{14} desintegrações

9. Mostre que o efeito fotoelétrico não pode ocorrer com um eletron livre. Utilize a demonstração por absurdo.

<u>Resposta:</u>

Suppose the photoelectric effect does take place with a free electron due to the absorption of a photon of energy T . The photoelectron must be ejected with energy in the incident direction. Energy and momentum conservation give
T = h v (1)
P = h v /c (2)
Equation (1) can be written as the relativistic relation connecting momentum and kinetic energy
T 2 = c2 p2 = T 2 + 2Tmc2 (3)
Using (1) and (2) in (3), we get
2h v . mc2 = 0
Neither h nor mc2 is zero. We thus end up with an absurd situation. This only means that both energy and momentum cannot be conserved for photoelectric effect with a free electron.

10. A energia máxima de um elétron emitido no decaimento do isótopo ^{14}C é E_{max}. Se o número de elétrons com energia entre E e $E + dE$ tem a forma aproximada

$$N(E)\, dE \propto E^{1/2} (E_{max} - E)^2\, dE$$

Encontre a taxa de evolução de calor por uma fonte de ^{14}C que emite X elétrons/s

<u>Resposta:</u> a resposta será literal, sem valores numéricos.

The mean energy of electrons

$$< E >= \int_0^{E\,max} E\, n(E) dE / \int_0^{E\,max} n(E)\, dE$$

Given $n(E)dE = c\sqrt{E}(E_{max} - E)^2\, dE$
where c = constant

$$< E >= \frac{c\int_0^{E\,max} E\sqrt{E}(E_{max} - E)^2 dE}{c\int_0^{E\,max} \sqrt{E}(E_{max} - E)^2\, dE} = \frac{E_{max}}{3}$$

If all the electrons emitted are absorbed then the kinetic energy of the electrons is converted into heat.
Heat evolved/sec = (mean energy)(no. of electrons emitted/second) $= (0.156) \times (3.7 \times 10^7)/3\ \text{MeV/s} = 1.92 \times 10^6\ \text{MeV/s}$

Dados Adicinais:

$c = 2.99792458\ 10^8$ m/s
$h = 6.626068\ 10^{-34}\ m^2$ kg / s
hc = 1240 eV nm
$e = 1.60217646 \times 10^{-19}$ C
uma $= 1.66 \times 10^{-27}$ kg
