Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas

Departamento de Astronomia

Prova de Proficiência de Matemática e Física

Necessário para o processo seletivo do curso de Pós-Graduação em Astronomia

3 de maio de 2016

Nome: ....

Instruções ao candidato (leia com atenção):

a. A prova é individual, sem qualquer consulta. É permitido o uso de calculadora. A duração da prova é de no máximo 4 horas. Não é permitido o uso de telefone celular ou acesso à Internet.

b. A prova **não poderá** ser feita a lápis. Escreva seu nome em cada folha da prova e numere-as.

c. Se estiver fazendo a prova fora do IAG/USP, use papel A4, mas deixe margens de pelo menos 2 cm nos quatro lados de cada folha. Use somente um lado da folha de respostas e numere-as. Solicitamos que a prova seja enviada ao IAG por e-mail a `cpgiag@usp.br`.

---

1. (Mecânica Quântica)

   Um dado nucleon, que possui uma energia de repouso de 940,0 MeV, está ligado a um núcleo atômico de raio 1 fm ($= 10^{-15}$ m). Use o princípio da incerteza de Heisenberg para estimar a energia cinética deste nucleon.

   Solução:

   Princípio da incerteza: $\Delta p \, \Delta x \simeq \hbar/2$. Considerando a incerteza no momentum como a quantidade de movimento (*momentum*) do nucleon, temos $\Delta p = p$. Portanto,

$$p \simeq \frac{\hbar}{2\Delta x} \quad \rightarrow \quad c\,p \approx \frac{c\hbar}{2\Delta x} = \frac{197{,}3 \text{ MeV fm}}{2 \text{ fm}} = 98{,}66 \text{ MeV}\,,$$

   (1 fm $= 10^{-15}$ m). Usando a expressão da energia total de uma partícula relativística:

$$E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} = \sqrt{(98{,}66)^2 + (940{,}0)^2} = 945{,}16 \text{ MeV}\,.$$

   Considerando a energia cinética:

$$K = E - mc^2 = 945{,}16 - 940{,}0 = 5{,}16 \text{ MeV}\,.$$

   Obs.: Se for usada o princípio da incerteza como $\Delta p \, \Delta x \simeq \hbar$, o resultado será 20,48 MeV.

2. (Relatividade)

Num sistema inercial S um evento é observado num ponto A num dado eixo x e 10^{-6} s depois outro evento é observado num ponto B, no mesmo eixo, a 900 m de distância. Ache a velocidade de S em relação a S' no qual ambos os eventos são observados simultaneamente.

Solução:

Considerando as transformadas inversas de Lorentz:

$$t_A = \gamma\left(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2}\right) \quad \text{e} \quad t_B = \gamma\left(t'_B + \frac{vx'_B}{c^2}\right)\ ;$$

Fazendo

$$t_B - t_A = \gamma\,(t'_B - t'_A) + \gamma\frac{v\,(x'_B - x'_A)}{c^2}\,,$$

e considerando a simultaneidade como $t'_B - t'_A = 0$, então:

$$t_B - t_A = \gamma v\frac{(x'_B - x'_A)}{c^2} \quad \rightarrow \quad 10^{-6} = \gamma\frac{v}{c^2}\times 900 = \gamma\frac{v}{c}\times\frac{900}{3\times 10^8}\,,$$

ou seja,

$$\gamma\frac{v}{c} = \frac{1}{3}\,.$$

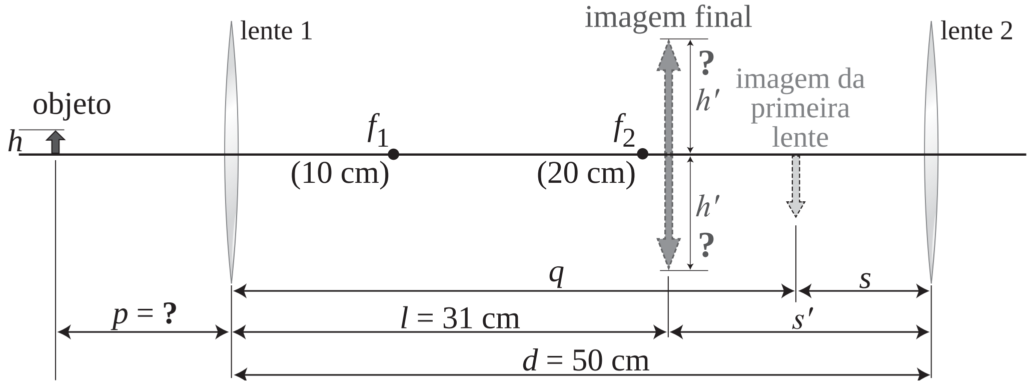
Usando o fator de Lorentz obtemos

$$\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \pm\frac{1/3}{1+(1/3)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad v = 0{,}316c = 9{,}473{\times}10^7\ \text{m/s}\,.$$

(tomando só a solução positiva). A velocidade de S' é $0{,}316\,c$ com respeito a S.

3. (Óptica)

Duas lentes convergentes de distâncias focais $f_1 = 10$ cm e $f_2 = 20$ cm são posicionadas 50 cm uma da outra, como mostra a figura abaixo. A imagem final está localizada entre as lentes na posição indicada na figura, a 31 cm à direita da primeira lente. **(A)** Quanto à esquerda da primeira lente o objeto deverá estar? **(B)** De quanto é a sua ampliação, h'/h? **(C)** A imagem final estará invertida ou não?



Solução:

(A): Construímos as quatro equações para o sistema, considerando que as distâncias medidas no mesmo sentido dos raios de luz incidentes (da esquerda para direita) são positivas e as de sentido contrário são negativas (s'):

$$\text{Para a primeira imagem, (1):}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f_1}\,,$$

$$\text{Para a segunda imagem, (2):}\ \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f_2}\,.$$

Além disto, pela geometria do problema temos:

$$(3)\text{:}\ \ q+s=d\,,\quad \text{e}\quad (4)\text{:}\ \ l-s'=d\,.$$

Determinando $s'=-(d-l)=-19$ cm. Usando (2):

$$s=\left(\frac{1}{f_2}-\frac{1}{s'}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{20\ \text{cm}}-\frac{1}{-19\ \text{cm}}\right)^{-1}\simeq 9{,}74\ \text{cm}\,,$$

é a posição da primeira imagem em relação à *segunda* lente. A posição da primeira imagem em relação à *primeira* lente fica, da Eq. (3): $q=d-s\simeq 40{,}26$ cm.

Usando (1) temos:

$$p=\left(\frac{1}{f_2}-\frac{1}{q}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{20\ \text{cm}}-\frac{1}{40{,}26\ \text{cm}}\right)^{-1}\simeq 13{,}3\ \text{cm}\,.$$

Ou seja, o objeto se encontra a 13,3 cm à esquerda da primeira lente.

(B): Usando triângulos formados pelos eixos ópticos, os feixes principais, o objeto e as imagens, podemos escrever:

$$\frac{-h'}{-H}=\frac{-s'}{s}\qquad \text{e}\qquad \frac{-H}{h}=\frac{q}{p}\,.$$

Eliminando H, a ampliação da imagem fica:

$$M=\frac{h'}{h}=-5{,}9\,.$$

(C): A imagem está invertida.

4. (Estatística)

   O sangue humano tem 4 grupos: A, B, AB, e O. Independentemente do grupo, um indivíduo pode ter o chamado fator Rh positivo ou negativo (Rh+ ou Rh−).

   Para uma dada população temos a seguinte distribuição de grupos:

A	B	AB	O
45%	9%	3%	43%

   Para cada grupo, a repartição da população em relação ao fator Rh é a seguinte:

Grupo	A	B	AB	O
Rh+	87%	78%	67%	86%
Rh−	13%	22%	33%	14%

(A) Qual é a probabilidade para que um indivíduo escolhido aleatoriamente seja um doador universal? (tipo sanguíneo O−).

(B) Qual é a probabilidade para que um indivíduo escolhido aleatoriamente tenha um Rh−?

Solução:

(A) A probabilidade é 14% de 43%, isto é $0{,}14 \times 0{,}43 = 0{,}0602$ ou 6,02%.

(B) A probabilidade é:

$$\underbrace{0{,}45 \times 0{,}13}_{\text{grupo A}} + \underbrace{0{,}09 \times 0{,}22}_{\text{grupo B}} + \underbrace{0{,}03 \times 0{,}33}_{\text{grupo AB}} + \underbrace{0{,}43 \times 0{,}14}_{\text{grupo O}} = 0{,}1484$$

isto é, 14,84%.

5. (Ondas)

Você quer avaliar uma corda para uso em um piano. Esta corda tem 3,00 metros de comprimento e uma densidade específica linear $\mu = 0{,}00250$ kg m^{-1}. Ao testar a corda, você encontrou duas frequências ressonantes adjacentes em 252 Hz e 336 Hz. **(A)** Qual é a frequência fundamental da corda? **(B)** Qual é a tração F_T em Newtons usada nesta corda? Dica: a velocidade de propagação de uma onda transversal em uma corda é $\sqrt{F_T/\mu}$.

Solução: A velocidade de propagação da onda é $v = \sqrt{F_T/\mu}$, ou seja, $F_T = \mu v^2$.

Por outro lado, a velocidade e a frequência se relacionam por: $v = f\,\lambda$, onde λ é o comprimento de onda.

O comprimento de onda fundamental de uma corda $\lambda_1 = 2L$. Logo, a velocidade de propagação neste caso é $v = f_1 \times 2L$. A tração da corda pode ser escrita como: $F_T = 4\mu\, f_1^2\, L^2$.

Os harmônicos **consecutivos** medidos são: $nf_1 = 252$ Hz e $(n+1)f_1 = 336$ Hz. Eliminando f_1, obtemos:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{252}{336} \quad \Rightarrow \quad n = (n+1)0{,}75 \quad \Rightarrow \quad n = 3\,.$$

(252 Hz e 336Hz são, respectivamente, o terceiro e quarto harmônico).

Podemos determinar a frequência fundamental f_1: $3 \times f_1 = 252$ Hz, isto é, $f_1 = 84$ Hz.

Finalmente, obtemos a tração: $F_T = 4 \times 0{,}0025 \times 84^2 \times 3^2$, isto é, $F_T = 635{,}04$ N.

6. (Mecânica)

Uma partícula de massa m está sob ação de duas forças: uma força central f_1 e uma força de atrito f_2 dadas por:

$$\vec{f_1} = \frac{\vec{r}}{r} f(r) \qquad \text{e} \qquad \vec{f_2} = -\lambda \vec{v}\,;\ (\lambda > 0)\,,$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula e λ é uma constante. Se a partícula tiver inicialmente ($t = 0$) um momento angular J_0 em relação à origem ($r = 0$), determine a evolução do momento angular para qualquer instante $t > 0$. *Obs.*: O uso de coordenadas polares facilita a resolução deste problema.

Solução:

As equações de movimento em coordenadas polares são escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = f(r) - \lambda\dot{r}\,; \\ m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) = -\lambda r\dot{\theta}\,. \end{cases}$$

A segunda equação acima pode ser escrita como:

$$\frac{1}{r}\frac{d\left(mr^2\dot{\theta}\right)}{dt} = -\lambda r\dot{\theta}\,.$$

O momento angular é $J = mr^2\dot{\theta}$, logo podemos escrever a equação acima:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{-\lambda J}{m}\,.$$

Integrando a equação acima e usando a condição inicial J_0 em $t = 0$, obtemos:

$$J = J_0 e^{-\lambda t/m}\,.$$

7. (Lógica)

Problema de Euler: um fazendeiro comprou cavalos e bois e pagou no total 1770 reis. Se o preço de um cavalo foi 31 reis e de um boi 21 reis, quantos cavalos e quantos bois o fazendeiro comprou? Note que a quantidade de cavalos e de bois são números inteiros positivos.

Solução:

Seja x o número de cavalos e y o número de bois. Então:

$$31x + 21y = 1770 \quad \rightarrow \quad y = 84 - x - 2\frac{(5x-3)}{21}\,.$$

A quantidade $(5x - 3)/21$ deve ser um número inteiro. A condição para isto é:

$$5x–3 = 21z \quad \rightarrow \quad x = 4z + (z+3)/5\,,$$

onde z é um número inteiro.

Mas x também deve ser um inteiro, logo, $(z+3)/5$ também deve ser um número inteiro. Para isto precisamos ter:

$$z = 5t - 3\,, \text{ onde } t = 1, 2, 3, \ldots \text{ é um inteiro.}$$

Garantimos assim que z é um inteiro e, consequentemente, que x também seja um inteiro.

Assim, temos:

$$t = 1; z = 2; x = 9; y = 71; \text{tot} = 1770$$
$$t = 2; z = 7; x = 30; y = 40; \text{tot} = 1770$$
$$t = 3; z = 12; x = 51; y = 9; \text{tot} = 1770$$

Por exemplo, para $t = 3$, $z = 12$ o que resulta em $x = 51$ (cavalos) e $y = 9$ (bois). Verificando:

$$31 \times 51 + 21 \times 9 = 1770\,.$$

OBS.: Também são soluções: 9 cavalos e 71 bois; 30 cavalos e 40 bois. Para $t \geq 4$ não temos mais duas soluções inteiras e positivas.

8. (Cálculo)

   Prove que $(\cos\theta)^p \leq \cos(p\,\theta)$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 < p < 1$.

   Solução:

   Seja $f(\theta) = \cos(p\,\theta) - (\cos\theta)^p$. Nós temos $f(0) = 0$ e, para $0 < \theta < \pi/2$,

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -p\,\mathrm{sen}(p\,\theta) + p\cos^{p-1}\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \\ &= p\left(-\,\mathrm{sen}(p\,\theta) + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^{1-p}\theta}\right) \\ \text{se} &\quad \left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^{1-p}\theta} - \mathrm{sen}(p\,\theta)\right) > 0 \\ f'(\theta) &> 0\,, \end{aligned}$$

   já que o seno é uma função que aumenta monotonicamente no intervalo $[0,\pi/2]$ e $\cos^{1-p}\theta \in (0,1)$. Como $f'(\theta) > 0$ e $f(0) = 0$, então $f(\theta)$ sempre aumenta no intervalo em questão. Concluímos que $f(\theta) \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Assim,

$$f(\theta) = \cos(p\,\theta) - (\cos\theta)^p \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (\cos\theta)^p \leq \cos(p\,\theta)\,,$$

   como queríamos provar.

9. (Termodinâmica)

   Defina, em palavras e matematicamente, o livre caminho médio de um gás. Calcule o livre caminho médio de uma molécula em um gás se o número de colisões por segundo é 2×10^{10} e a velocidade média da molécula é 1000 m s^{-1}.

   Solução:

   O livre caminho médio, λ, de um gás de moléculas é a distância média viajada pelas moléculas entre sucessivas colisões:

$$\lambda = x/N\,,$$

   onde x é a distância total percorrida e N é o número de colisões.

   Em termos da frequência, f, o tempo médio de colisão, T, e a velocidade média das moléculas, v, temos:

$$\lambda = v\,T = \frac{v}{f} = \frac{1000}{2 \times 10^{10}} = 5 \times 10^{-8}\ \text{m}.$$

10. (Eletromagnetismo)

No modelo do átomo de hidrogênio de Bohr o elétron gira em uma órbita circular de raio 0,53 Å com um período P de $1{,}5 \times 10^{-16}$ s. Encontre a corrente que corresponde a este movimento.

Solução:

A corrente I é:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q_e}{P} = \frac{1{,}6 \times 10^{-19}}{1{,}5 \times 10^{-16}} = 1{,}06 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}.$$

Dados adicionais: $c = 2{,}998 \times 10^5$ km s^{-1}; $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ m^2 kg s^{-1},
$\hbar = h/2\pi = 6{,}58211889 \times 10^{-22}$ MeV s.
Carga do elétron $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ C
Transformadas de Lorentz:
$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$
$x' = \gamma(x - vt) \iff x = \gamma(x' + vt')$
$t' = \gamma(t - vx/c^2) \iff t = \gamma(t' + vx'/c^2)$.
Equação de lentes:

$$\frac{1}{\text{distância do objeto}} + \frac{1}{\text{distância da imagem}} = \frac{1}{\text{distância focal}}$$

Velocidade e aceleração em coordenadas polares (r,θ):
$v_r = \dot{r}$; $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
$v_\theta = r\dot{\theta}$; $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
