

Marcelle Soares dos Santos

Ondas Gravitacionais Primordiais

São Paulo

Junho de 2006

Marcelle Soares dos Santos

Ondas Gravitacionais Primordiais

Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciências, com habilitação em Astronomia.

Orientadora: Elisabete Maria de Gouveia Dal Pino

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE ASTRONOMIA, GEOFÍSICA E CIÊNCIAS ATMOSFÉRICAS
DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

São Paulo

Junho de 2006

Agradecimentos

Este trabalho contou com apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (processo: 04/03893-7).

Resumo

SOARES-SANTOS, M. *Ondas gravitacionais primordiais*. São Paulo, 2006. 107f. Dissertação (Mestrado em Ciências: Astronomia) – Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo.

As ondas gravitacionais primordiais são as mais antigas relíquias já concebidas no âmbito científico para o Universo primordial. Tais relíquias devem – como consequência direta da teoria da relatividade geral no contexto do modelo cosmológico padrão – constituir um fundo cosmológico de radiação gravitacional, resultante de perturbações quânticas ocorridas no espaço-tempo em escalas de energia da ordem de 10^{15}GeV . A cosmologia é um dos campos teóricos particularmente tocados por essa previsão e o presente trabalho é parte integrante dela. A partir de primeiros princípios, a origem e evolução do fundo cosmológico de ondas gravitacionais é computada consistentemente, empregando as teorias da relatividade geral e de perturbações cosmológicas. A evolução temporal das perturbações tensoriais é regida, classicamente, por uma equação diferencial que pode ser interpretada como a de um oscilador excitado, de modo que o espectro de potências depende da evolução do fator de escala do Universo. As condições iniciais do problema são determinadas durante a era inflacionária (modelo de Sitter), em $z \gtrsim 10^{25}$, quando o regime quântico se estabelece. Ambos os regimes, clássico e quântico, são tratados e, por meio de um método semi-analítico, o sistema é evoluído até o presente, sem a necessidade de invocar aproximações simplificadoras como a de horizonte fino (ou super-adiabática) e a de transições instantâneas entre as sucessivas fases de domínio dos distintos fluidos cósmicos. A acurácia de tais aproximações, largamente empregadas na literatura, é posta em xeque. A forma do espectro depende das condições iniciais e do fator de escala nos instantes em que os modos estão no limiar do horizonte; a amplitude depende também da escala de energia da inflação. Como a natureza física do fluido que promove a expansão acelerada observada no Universo recente (conhecido como energia escura) ainda não está determinada, foram analisadas quatro categorias de modelos, nomeadas segundo o tipo de energia escura: constante cosmológica, fluido X (fantômico ou não), gás de Chaplygin generalizado e (uma forma parametrizada de) quintessência. Os resultados são conclusivos quanto à insensibilidade das ondas gravitacionais à energia escura, devido ao fato de que sua fase de domínio é recente ($z \sim 1$). A contrapartida empírica dessas previsões teóricas ainda inexistente, pois a sensibilidade e as frequências de operação dos experimentos já construídos são inadequadas. Os prospectos mais promissores são os de detectores espaciais, que devem entrar em operação em 2015 e ser sensíveis a amplitudes da ordem de $\sim 10^{-23}$ em frequências de $\sim 10^{-3} - 1\text{Hz}$. Por outro lado, a radiação cósmica de fundo em microondas fornece uma alternativa concreta de se obter essas informações indiretamente. Ambas as perspectivas observacionais são discutidas neste trabalho, mediante uma revisão dos empreendimentos observacionais mais importantes.

Palavras-chave: Universo primordial, modelos cosmológicos, perturbações tensoriais, ondas gravitacionais: teoria, ondas gravitacionais: detectores, modelos de energia escura.

Abstract

SOARES-SANTOS, M. *Ondas gravitacionais primordiais*. São Paulo, 2006. 107f. Dissertação (Mestrado em Ciências: Astronomia) – Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo.

Primordial gravitational waves are the oldest relics ever conceived in the scientific ambit for the early Universe. Such relics must – as a straightforward consequence of the general relativity theory in the context of the standard cosmological model – constitute a cosmological background of gravitational radiation resulting from quantum perturbations occurred in the space-time at energy scales of the order of 10^{15} GeV. Cosmology is one of the theoretical fields particularly touched by this prediction and the present work is part of it. From the very first principles, the origin and evolution of the cosmological background of gravitational waves is computed in a consistent way, using the general relativity and the theory of cosmological perturbations. The temporal evolution of tensor perturbations is classically governed by a differential equation that can be interpreted as the one of an excited oscillator, so that the power spectrum depends on the evolution of the scale factor of the Universe. The initial conditions of the problem are determined during the inflationary era (de Sitter model), at $z \gtrsim 10^{25}$, when the quantum regime is established. Both classical and quantum regimes are treated and, by means of a semi-analytic method, the system is evolved up to the present with no need of invoking simplifying approximations as the thin-horizon (or super-adiabatic) and the instantaneous transitions between the successive phases of domain of the different cosmic fluids. The accuracy of such approximations, broadly employed in the literature, is put in check. The shape of the spectrum depends on the initial conditions and on the scale factor at the moments that the modes are in the threshold of the horizon; the amplitude depends also on the energy scale of inflation. Since the physical nature of the fluid that leads the accelerated expansion observed in the recent Universe (known as dark energy) is still uncertain, four categories of models were analyzed, according to the type of dark energy: cosmological constant, X-fluid (phantom or not), generalized Chaplygin gas and (a parametrical form of) quintessence. The results are conclusive with respect to the insensitivity of the gravitational waves to the dark energy, due to the fact that its phase of domain is recent ($z \sim 1$). The empirical counterpart of those theoretical forecasts still inexists, for the noise levels and the frequencies of operation of the experiments already built are inadequate to detect this primordial gravitational radiation. The perspectives are more promising for the space detectors, which are planned to be sensitive to amplitudes of the order of 10^{-23} in frequencies of $10^{-3} - 1$ Hz, but those should not enter in operation before 2015. On the other hand, the cosmic microwave background radiation provides a concrete alternative of obtaining those information indirectly. Both observational perspectives are discussed in this work, by reviewing the most important projects.

Key-words: primordial Universe, cosmological models, tensor perturbations, gravitational waves: theory, gravitational waves: detection, dark energy models.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 9
2	Bases formais	p. 16
2.1	Prelúdio algébrico	p. 17
2.2	Do princípio variacional às equações de campo da gravitação	p. 19
2.2.1	Uma ação para o campo gravitacional	p. 20
2.2.2	A ação da matéria e o tensor momento-energia	p. 21
2.2.3	A ação total e (finalmente) as equações de Einstein	p. 22
2.3	Do princípio de equivalência à teoria da relatividade geral	p. 23
2.4	Do princípio cosmológico ao modelo padrão subjacente à teoria	p. 27
2.4.1	A métrica de Robertson-Walker	p. 28
2.4.2	Um tripé de equações fundamentais	p. 30
2.4.3	Inflação: uma emenda paradigmática	p. 32
2.5	Interlúdio empírico	p. 35
2.6	Da realidade observável à teoria de perturbações cosmológicas	p. 40
2.6.1	Abordagem clássica	p. 41
2.6.2	Teoria quântica	p. 45
2.6.2.1	Perturbações escalares	p. 48
2.6.2.2	Perturbações tensoriais	p. 49

3	O espectro teórico de perturbações tensoriais	p. 52
3.1	Duas soluções analíticas aproximadas	p. 58
3.2	Método semi-analítico para uma abordagem mais geral	p. 60
3.2.1	Condições iniciais	p. 62
3.3	Três definições equivalentes para o espectro de potências	p. 63
3.4	A evolução dos espectros	p. 65
3.4.1	Durante a inflação	p. 65
3.4.2	No período de expansão desacelerada	p. 66
3.4.3	Na fase de expansão acelerada	p. 69
3.5	Superando as aproximações analíticas	p. 70
4	Contrapartidas experimentais	p. 73
4.1	Duas vias de detecção direta	p. 74
4.1.1	Massas ressonantes	p. 75
4.1.2	Interferômetros	p. 78
4.2	Radiação cósmica de fundo: uma trilha alternativa	p. 81
4.2.1	O equacionamento do espectro de potências	p. 82
4.2.2	O cenário observacional	p. 91
5	Epílogo	p. 94
	Referências	p. 99

Lista de Figuras

1	Campo de forças produzido por ondas gravitacionais	p. 12
2	Deformações produzidas por ondas gravitacionais sobre um corpo de prova circular	p. 12
3	Densidades de energia, em função do redshift, para diversas equações de estado	p. 55
4	Equação de estado efetiva do Universo em diferentes cosmologias	p. 57
5	Espectros de ondas gravitacionais no final da inflação, para diversas escalas de energia	p. 66
6	Espectro de perturbações tensoriais durante a era da radiação	p. 67
7	Espectro de ondas gravitacionais em $x = 100$	p. 67
8	Região de baixas frequências do espectro de amplitude de perturbações tensoriais tomado em $x = 5$	p. 68
9	Espectro atual (em $x = 1$) de ondas gravitacionais para diversos modelos de energia escura	p. 69
10	Densidade espectral de energia em ondas gravitacionais primordiais, em $x = 1$, para o modelo Λ CDM.	p. 71
11	Espectro de ondas gravitacionais para três distintas escalas de energia, comparado com a estimativa de sensibilidade dos principais detectores .	p. 80
12	Perfil da profundidade óptica e função visibilidade em função do redshift.	p. 89
13	Espectros de anisotropias da RCF induzidas por ondas gravitacionais primordiais	p. 90

Lista de Tabelas

1	Fontes não cosmológicas de ondas gravitacionais	p. 14
2	Detectores de barras ressonantes	p. 76
3	Detectores esféricos	p. 77
4	Detectores interferométricos	p. 80

1 *Introdução*

No princípio o mundo não existia. As trevas cobriam tudo. Quando não havia nada, brotou uma mulher de si mesma (aconteceram coisas misteriosas para que ela pudesse criar-se a si própria; havia seis elementos invisíveis os quais ela usou para criar-se, por isso ela se chama 'a não-criada'). Surgiu sobre seus bancos mágicos e cobriu-se de enfeites que se transformaram em sua morada. E ela se chama Yebá bëló (terra, tataravó), ou seja a avó do universo. Depois, ela pensou como deveria ser o futuro mundo. Enquanto pensava, mascou *ipadu* e fumou cigarro mágico e seu pensamento tomou a forma de uma esfera que encobriu toda a escuridão. Dessa maneira, a escuridão ficou dentro daquela esfera que era o universo.

(Mito dos desanos, adaptado de *Antes o mundo não existia*, de Umúsin Panlôn Kumu e Tolamãñ Kenhíri.)

A ânsia de entender a origem, evolução e propriedades do tempo, do espaço e de tudo quanto possa preenchê-lo é o combustível que move inúmeros pensadores, das mais diversas épocas e etnias. Apresentadas sob as mais diversas roupagens – indígenas, folclóricas ou acadêmicas – as cosmologias expressam o entendimento que cada comunidade desenvolve sobre esse tema e, no que diz respeito à comunidade científica em particular, o nível de sofisticação atingido na elaboração das teorias cosmológicas é tal que já se ousa nomear um “modelo cosmológico padrão”.

A origem de tamanho entusiasmo está no sucesso da teoria da relatividade de Einstein, elaborada em sua forma restrita em 1905 – o ano miraculoso – e estendida para sua forma geral dez anos mais tarde. Na história da ciência moderna, a expressão “ano miraculoso” foi empregada duas vezes: a primeira em referência ao ano de 1666, quando Newton lançou as bases físicas e matemáticas da revolução científica do século XVII; a segunda em alusão

ao ano em que Einstein publicou os cinco importantes trabalhos que revolucionariam a física no século XX¹.

A profundidade da revolução newtoniana foi tal que atingiu as raízes da árvore da ciência cartesiana²: a metafísica. No século XVII, depois de Descartes e seus críticos, a metafísica assumira o status de uma disciplina racional, rigorosa e geometrizar, que pretendia demonstrar *a priori* as leis do movimento e todos os outros fenômenos naturais. Neste sentido, Descartes não foi o primeiro dos modernos e sim o último dos antigos e Newton, com sua postura céptico-fenomenista extraída em parte da tradição baconiana, ao limitar o campo da filosofia natural à percepção dos fenômenos, rejeita radicalmente a metafísica entendida como ciência primeira. Ao contrário, a árvore da ciência é colocada de ponta-cabeça e o que outrora lhe servia de raízes torna-se, no máximo, sua “flor inodora” (CASINI, 1995). No entanto, elementos metafísicos continuam presentes na teoria newtoniana. Cunningham (1921) chama a atenção para a distinção existente entre definições reais (*quid rei*) e nominais (*quid nominis*). Estas são simplesmente um conjunto de palavras e relações que podem ou não corresponder à realidade, enquanto aquelas são demonstradas por um experimento ou uma dedução lógica impecável. Os conceitos de espaço e tempo absolutos de Newton figuram entre as definições *quid nominis* e, na falta de uma dedução puramente lógica capaz de torná-las reais (pois fiar-se nas deduções lógicas seria um retorno às bases metafísicas cartesianas), é a experiência (mediante um criterioso método) que serve de prova. É neste ponto que residem os elementos metafísicos mencionados acima, pois não é possível obter uma prova última de que a realidade seja de fato representável através de um resultado experimental. Neste sentido, a questão persiste: o método experimental continua como pilar da ciência contemporânea. Depois do triunfo dos positivistas, no final do século XIX, o aspecto metafísico do método experimental caiu no esquecimento (ou melhor, ficou implícito) e a metafísica foi tomada como um obstáculo para o progresso da ciência. Temas como a cosmologia, até então intratável pelo método experimental, foram considerados temas não científicos, pertencentes ao “reino metafísico” do icognoscível (CARR, 1921).

Ao elaborar a teoria da relatividade restrita (TRR), Einstein baseou-se nas inúmeras experiências negativas quanto à existência do éter absoluto para propor uma outra concepção de espaço e tempo. Ou seja, assumiu integralmente a validade do método experimental e propôs uma nova definição, essa sim compatível com os resultados empíricos

¹A propósito das comemorações do centenário do ano miraculoso de Einstein, uma coletânea desses artigos, organizada por Stachel (2005), foi publicada no Brasil.

²Para Descartes (CASINI, 1995, p. 50), “a ciência é uma árvore cujas raízes são a metafísica, o tronco a física e os ramos que saem do tronco todas as outras ciências”.

(veja o Capítulo 2, a seguir). O sucesso da TRR e de sua posterior formulação geral, que incluiu a gravitação, contribuiu de modo definitivo para que a cosmologia fosse elevada ao status de tema digno de estudos científicos, dentre os quais inclui-se o trabalho ora apresentado.

Os avanços realizados nos campos experimental e observacional ao longo do século permitiram estabelecer um modelo cosmológico em razoável acordo com a realidade (ou pelo menos com o pálido espectro que dela obtemos por meio dos experimentos). Capaz de explicar com relativa precisão a história térmica do Universo, a gênese das estruturas em larga escala e as abundâncias de elementos químicos primordialmente sintetizados, o “modelo padrão” da cosmologia possui bases empíricas sólidas - tão sólidas que alguns entusiastas chegam a afirmar que o século XX inaugurou a era da cosmologia de precisão, mas não tanto quanto as bases do modelo padrão da física de partículas, onde os parâmetros de uma teoria firmemente estabelecida têm sido medidos.

Neste contexto, uma das previsões mais fascinantes é a existência de ondas gravitacionais decorrentes de perturbações do campo gravitacional, análogas em certo sentido àquelas produzidas pelas oscilações do campo eletromagnético. Esse resultado, quase tão antigo quanto a própria relatividade geral³, só foi comprovado indiretamente nos anos 70 e até hoje não há observações diretas bem sucedidas (cf. Capítulo 4).

A relatividade geral garante que as perturbações de primeira ordem do campo gravitacional constituem um campo tensorial transverso de traço-nulo, cuja propagação se dá à velocidade da luz. Como as fontes de ondas gravitacionais estão em geral distantes do observador, a aproximação de ondas planas é aplicável e, tomando um sistema coordenado x, y, z tal que a direção de propagação da onda esteja alinhada com o eixo z , a transversalidade das ondas implica que apenas as componentes xx , yy , yx e xy são diferentes de zero, sendo que yx e xy são idênticas; a propriedade de traço nulo, por sua vez, significa que as componentes yy e xx têm o mesmo módulo e sinais opostos. Por causa dessas propriedades, as ondas gravitacionais produzem um campo de forças quadrupolar com duas componentes que representam duas polarizações distintas do campo. Este campo de forças é mostrado na Figura 1, com as duas componentes, $+$ (esquerda) e \times (direita), explicitadas. A polarização $+$ é devida às componentes xx e yy do campo, a outra é produzida pelas componentes cruzadas. Ao ser atravessado por uma onda gravitacional, um corpo de prova sofrerá deformações devidas a esse campo de forças e o resultado final, se o corpo for inicialmente circular, por exemplo, é mostrado na Figura 2. Monitorar essas

³Einstein publicou em 1916 um cálculo de ondas fracas (linearizadas), emitidas por corpos com auto-gravitação nula, propagando-se através de um espaço-tempo plano. Cf. THORNE, 1987.

deformações é o princípio básico dos detectores de ondas gravitacionais em construção e a importância de se buscar detectá-las é esclarecida nas próximas linhas.

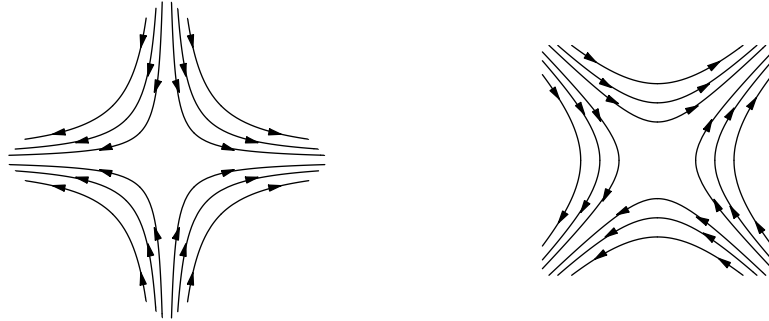


Figura 1: Campo de forças produzido por ondas gravitacionais com direção de propagação perpendicular ao papel. À esquerda, polarização $+$, produzida pelas componentes xx e yy ; à direita, polarização \times , devida às componentes cruzadas, xy e yx .

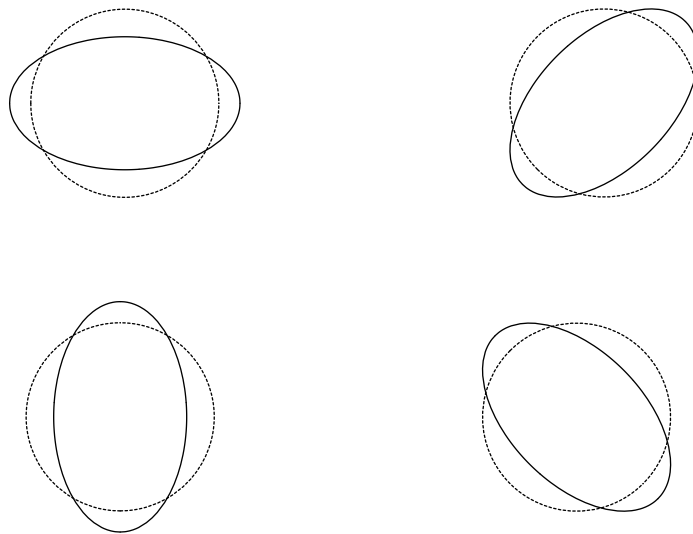


Figura 2: Deformações de um corpo de prova inicialmente circular quando submetido ao campo de forças da Figura 1. À esquerda, o resultado para polarização $+$, onde o círculo é alongado nas direções horizontal e vertical sucessivamente; à direita, o resultado para polarização \times é semelhante, apenas rotacionado de 45° .

A despeito das possíveis analogias quase imediatas, há importantes diferenças entre as ondas gravitacionais e suas primas eletromagnéticas: em primeiro lugar, as ondas gravitacionais são provocadas por movimentos de grandes objetos massivos ou por vibrações coerentes da curvatura do espaço tempo, ao passo que a radiação eletromagnética resulta da incoerente superposição de contribuições individuais de átomos, elétrons e partículas carregadas; além disso, quando se trata de regiões com campos gravitacionais extremos

(como a vizinhança de buracos negros) as ondas eletromagnéticas tendem a se obscurecer, enquanto a radiação gravitacional tende a ser emitida mais intensamente; ao contrário dos fótons, que interagem facilmente com a matéria, os grávitons (os quanta da radiação gravitacional) interagem muito fracamente e podem atravessar mesmo regiões tão densas quanto o núcleo de uma supernova ou o Universo primordial. Essas diferenças fazem com que as ondas gravitacionais, se (ou melhor, quando) detectadas e estudadas, forneçam informações às quais o acesso seria impossível apenas com as ondas eletromagnéticas, revolucinando nosso entendimento do Universo.

Embora o modelo padrão da cosmologia seja apresentado no Capítulo 2, por ora é interessante antecipar alguns fatos. Desde a singularidade inicial – o Big Bang – o Universo se expande e sua temperatura diminui. No início, todas as partículas estão em equilíbrio térmico, mas quanto mais fraca é a interação de uma partícula, mais alta é a escala de energia em que ela se desacopla do fluido cósmico. A condição de desacoplamento é que a taxa do processo que mantém o equilíbrio ($\Gamma = n\sigma|v|$, onde n é a densidade de partículas, σ é a seção de choque da interação e v é a velocidade das partículas) seja maior que a taxa de expansão do Universo H . No sistema natural de unidades ($\hbar = c = k_B = 1$), os parâmetros que definem a taxa de interação dos grávitons são: $n = T^3$, $\sigma \sim G^2 E^2 \sim G^2 T^2$ e $v = 1$, onde G é a constante gravitacional newtoniana, E é a escala de energia e T é a temperatura; a taxa de expansão do universo primordial pode ser aproximada por $H \sim T^2/m_{Pl}$. Assim, a escala de energia do desacoplamento pode ser estimada como $\Gamma/H \sim (T/m_{Pl})^3$. Dessa forma, as informações potencialmente acessíveis via ondas gravitacionais remetem ao universo primordial em escalas de temperatura de $\sim 10^{19}\text{GeV}$, ou seja, 10^{-46} segundos após o Big Bang. A título de comparação, toma-se o mesmo raciocínio para os fótons e os neutrinos, considerando a seção de choque do espalhamento Thomson ($\sigma_T = 6,65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$) para os primeiros e substituindo a constante gravitacional pela constante de Fermi ($G_F = 292,8 \text{ GeV}$) para os últimos. Desse cálculo resulta que os neutrinos desacoplam em escalas de MeV (poucos segundos após o Big Bang) e os fótons só o fazem 300 mil anos mais tarde. Ou seja, na linguagem dos desanos, dir-se-ia que os grávitons foram testemunhas das “coisas misteriosas” que aconteceram no início do universo.

Embora o tema deste trabalho seja precisamente as ondas gravitacionais primordiais, é interessante expor o rol completo das possíveis fontes não cosmológicas e isso é feito na Tabela 1 a seguir, compilada da revisão de Thorne (1987). Esta lista contém as fontes mais firmemente estabelecidas, mas ainda é possível adicionar outras mais especulativas, como as estrelas pré-galácticas de população III. A amplitude h_c será definida de modo

Tabela 1: Frequência e amplitude característica da radiação gravitacional emitida por diversas fontes não cosmológicas.

fontes	$\log_{10} \nu$ (Hz)	$\log_{10} h_c$
surtos		
colapso de supernovas	2,5 – 4	–22 – –18
formação de buracos negros	2,5 – 4	–22 – –20
coalescência de binárias compactas	–4 – 3	–23 – –16
acresção por buracos negros supermassivos	–5 – –2	–21 – –20
periódicas		
estrelas de nêutrons em rotação	1 – 3	< –20
sistemas binários de objetos compactos	< –3,5	< –24
estocásticas		
sistemas binários não resolvidos	–4 – –3	< –19

apropriado adiante, mas vale destacar que a variação $\Delta L/L$ observada em um círculo de raio L atravessado pela radiação gravitacional, como o da Figura 2, é aproximadamente igual a esta amplitude. É por esse motivo que as ondas gravitacionais são tão difíceis de se detectar. As fontes listadas na Tabela 1 se dividem em três categorias: as *periódicas*, com frequência e direção bem definidas; os *surtos*, que correspondem a emissões instantâneas e localizadas, em uma faixa de frequências estreita; e as fontes estocásticas, que são emissões isotrópicas e estacionárias.

O tema específico do presente trabalho é a geração e evolução de ondas gravitacionais primordiais, que devem constituir um fundo cosmológico de grávitons. As perturbações quânticas do espaço-tempo em seus primeiros instantes são computadas e servem de condições iniciais para a subsequente evolução, regida por uma equação de movimento que pode ser interpretada como a de um oscilador excitado. Todo o formalismo é detalhadamente descrito, em sua forma mais geral, no Capítulo 2, onde o modelo cosmológico padrão é apresentado. A evolução das ondas gravitacionais até o Universo recente, discutida no Capítulo 3, é feita através de um método semi-analítico. Como o fundo de ondas gravitacionais é estocástico, isto é, isotrópico e estacionário, sua principal propriedade é o espectro de frequências e é esse o espectro analisado. As perspectivas de detecção direta, cujos princípios básicos foram brevemente introduzidos acima, e indireta⁴ são abordadas no Capítulo 4, onde é feita uma revisão acerca dos empreendimentos observacionais mais importantes, comparando a sensibilidade dos detectores com a amplitude do espectro

⁴A via de detecção indireta é através do fundo de radiação eletromagnética, que desacoplou do fluido cósmico cerca de 300 mil anos depois das ondas gravitacionais, mas é sensível ao espectro inicial das perturbações tensoriais.

calculado teoricamente.

Até o presente não há dados observacionais disponíveis e, portanto, este trabalho consiste em um estudo teórico, capaz de estabelecer previsões para futuros experimentos. Outros autores realizaram cálculos nessa mesma linha, empregando aproximações analíticas cuja acurácia é discutida perante os resultados obtidos com o método semi-analítico desenvolvido, mais geral (veja a seção 3.5).

Além disso, é importante destacar que não há consenso quanto à natureza do fluido que contribui com cerca de 70% da densidade de energia total do Universo recente – é o problema da energia escura, discutido na seção 2.5. Há uma vasta gama de modelos concorrentes e os principais dentre eles foram investigados, a fim de identificar possíveis assinaturas que permitissem estabelecer vínculos, mediante futuros experimentos, sobre os diversos modelos em debate. Os resultados dessa análise encontram-se na seção 3.4.3.

A título de esclarecimento, vale destacar ainda que, exceto por algumas poucas passagens onde se afirma o contrário, o sistema natural de unidades é utilizado ao longo de todo o texto, como se nota nos parágrafos acima. Em tal sistema, a constante de Planck reduzida, a constante de Boltzmann e a velocidade da luz são iguais à unidade ($\hbar = k_B = c = 1$); conseqüentemente, $[\text{energia}] = [\text{massa}] = [\text{temperatura}] = [\text{comprimento}]^{-1} = [\text{tempo}]^{-1}$.

Concluídas as observações preliminares, o leitor é convidado ao Capítulo 2, onde são apresentadas as bases formais para uma descrição científica do que para os desanos seria a materialização do pensamento de Yebá bëló.

2 *Bases formais*

As equações de campo da gravitação, amplamente conhecidas como equações de Einstein, constituem a pedra de Roseta da teoria da Relatividade Geral, permitindo traduzir a geometria do espaço-tempo em campo gravitacional (e vice-versa), de tal modo que sua dedução inequivocamente precisa equivale ao valioso domínio de um novo idioma. Uma vez decifrada a pedra de Roseta, antigos textos amarelados podem ser lidos e respostas para problemas até então insolúveis – como o avanço do perihélio de Mercúrio, só para mencionar um exemplo concreto – são prontamente obtidas. Por outro lado, o domínio desse novo idioma conduz a novos e inéditos problemas, tanto de natureza conceitual quanto operacional, e motiva uma vasta gama de estudos, dentre os quais figura um precioso exemplo: o estudo de ondas gravitacionais.

Fazer uso do princípio de mínima ação para obter as equações de Einstein é uma opção que faz juz à importância da teoria nelas engendrada, pois essa formulação contém uma elegância intrínseca, manifesta através da conexão direta entre os princípios de simetria e as leis de conservação. Porém, a fim de manter a coerência com o paralelo pictórico sugerido acima, essa dedução será postergada, dando lugar – neste primeiro momento – às equações propriamente ditas. Exposta de modo tão prematuro, a representação matemática da teoria equipara-se ao achado das tropas de Napoleão, em 1799: uma pedra de Roseta algébrica, cujo significado físico torna-se claro mediante a aplicação dos princípios variacional e de equivalência, do mesmo modo que os hieróglifos e os caracteres demóticos egípcios foram decifrados, em 1822, a partir da língua grega. Quanto às conseqüências cosmológicas, estas estão para além do simples decifrar e exigem o uso de um princípio adicional: o princípio cosmológico, também contemplado neste capítulo.

O equacionamento da teoria da relatividade é amplamente padronizado e encontra-se portanto em diversas referências, mas Islam (1992) é particularmente objetivo neste ponto e, por isso, a abordagem ora apresentada segue seu estilo. A dedução subsequente, por sua vez, baseia-se naquela discutida por Landau e Lifchitz (1969b) no segundo volume de sua coleção de Física teórica (volume dedicado à teoria de campos), bem como na

completa demonstração de Weinberg (1972).

2.1 Prelúdio algébrico

A relatividade geral é formulada em um espaço riemanniano quadri-dimensional (três dimensões espaciais e uma temporal), no qual cada ponto é denotado por um conjunto de coordenadas $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$. A notação convencional relaciona os índices gregos às quatro coordenadas 0, 1, 2, 3 e os latinos às três espaciais 1, 2, 3. Além disso, índices latinos ou gregos repetidos indicam um somatório sobre as respectivas coordenadas. A geometria diferencial em espaços curvos é descrita em termos de tensores, grandezas que generalizam os vetores. Os elementos da álgebra tensorial podem ser encontrados por exemplo em Burke (1985), Weinberg (1972, Cap. 4) e Sigurdur (1978); aqui, apenas as definições e fórmulas essenciais são explicitadas.

Um tensor genérico $A_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}$ é definido por seu comportamento

$$\tilde{A}_{\nu_1\nu_2\dots}^{\mu_1\mu_2\dots} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \tilde{x}^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial \tilde{x}^{\nu_2}} \cdots A_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots}, \quad (2.1)$$

sob uma transformação de coordenadas $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$. Em particular, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ contém toda informação geométrica do espaço de Riemann, pois define o intervalo espaço-temporal ds^2 entre dois eventos (ou pontos) x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ infinitesimalmente separados:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Trata-se de um tensor simétrico ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) cuja forma contravariante $g^{\mu\nu}$ é definida por $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda$, onde δ_μ^λ é o delta de Kronecker (igual à unidade se $\lambda = \mu$ e zero no caso contrário). O caráter covariante ou contravariante de um tensor é modificado pelo tensor métrico (p. ex., $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ ou $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$).

A generalização da derivada parcial ordinária para o espaço de Riemann é a derivada covariante¹

$$\begin{aligned} A_{\beta_1\beta_2\dots;\sigma}^{\alpha_1\alpha_2\dots} &= A_{\beta_1\beta_2\dots,\sigma}^{\alpha_1\alpha_2\dots} + \left(\Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha_1} A_{\beta_1\beta_2\dots}^{\nu\alpha_2\dots} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha_2} A_{\beta_1\beta_2\dots}^{\alpha_1\nu\dots} + \cdots \right) \\ &- \left(\Gamma_{\beta_1\sigma}^\mu A_{\mu\beta_2\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} + \Gamma_{\beta_2\sigma}^\mu A_{\beta_1\mu\dots}^{\alpha_1\alpha_2\dots} + \cdots \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu$ é o pseudo-tensor conhecido como símbolo de Christoffel ou conexão afim,

¹Vale destacar aqui a notação utilizada para as derivadas parciais ordinárias – a vírgula: $\partial/\partial x^\lambda \equiv ,_\lambda$ – em comparação com aquela utilizada para as derivadas covariantes – o ponto-e-vírgula: equação (2.3).

cuja lei de transformação é dada por

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\lambda}} \tilde{\Gamma}_{\sigma\tau}^{\rho} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial \tilde{x}^{\nu} \partial \tilde{x}^{\lambda}} \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \quad (2.4)$$

e cuja expressão em termos do tensor métrico é

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\sigma\nu,\lambda} + g_{\sigma\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\sigma}). \quad (2.5)$$

Uma consequência da equação (2.5) é o anulamento da derivada covariante do tensor métrico, $g_{\mu\nu;\lambda} = g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0$.

Para qualquer vetor covariante, é possível demonstrar a relação $A_{\mu;\nu;\lambda} - A_{\mu;\lambda;\nu} = A_{\sigma} R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma}$, onde $R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma}$ é o tensor de Riemann (ou tensor de curvatura), definido pela relação

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma} = \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \quad (2.6)$$

e suas três propriedades de simetria,

$$\begin{aligned} R_{\sigma\mu\nu\lambda} &= -R_{\mu\sigma\nu\lambda} = -R_{\sigma\mu\lambda\nu} \\ R_{\sigma\mu\nu\lambda} &= R_{\nu\lambda\sigma\mu} \\ R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

O tensor de curvatura obedece ainda a identidade de Bianchi:

$$R_{\mu\nu\lambda;\rho}^{\sigma} + R_{\mu\rho\nu;\lambda}^{\sigma} + R_{\mu\lambda\rho;\nu}^{\sigma} = 0 \quad (2.8)$$

que, multiplicando por $g^{\mu\nu}$ e $g^{\sigma\rho}$, assume a forma

$$\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right]{}_{;\nu} = G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.9)$$

onde R é o escalar de curvatura, definido adiante por meio da equação (2.12), e $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein. A forma contraída do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma} R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \quad (2.10)$$

é conhecida como tensor de Ricci que, usando a definição (2.6), pode ser escrito em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}. \quad (2.11)$$

Uma terceira grandeza derivada do tensor de curvatura é o escalar de curvatura:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

As equações de Einstein são dadas por

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da fonte de campo gravitacional, G é a constante de Newton e c é a velocidade da luz no vácuo.

As equações (2.1-2.13) constituem a base algébrica da teoria da relatividade geral e seu significado físico é discutido a seguir, partindo dos princípios fundamentais.

2.2 Do princípio variacional às equações de campo da gravitação

De modo geral, o princípio variacional, ou princípio de mínima ação, estabelece que a ação, S , caracterizada pela integral de um funcional das variáveis dinâmicas do sistema com relação ao elemento de linha, é estacionária frente a pequenas variações das mesmas,

$$\delta S = \delta \int \mathcal{L} dx = 0.$$

Para que essa afirmativa tenha alguma aplicabilidade prática, é preciso ter em mente que a ação deve ser um invariante de Lorentz (pois, de outro modo, não seria possível garantir a validade do princípio para todos os referenciais), estar univocamente definida (para evitar ambigüidades) e ser constituída exclusivamente pelas variáveis dinâmicas e suas derivadas de primeira ordem (uma vez que o estado de um sistema físico qualquer deve estar inteiramente definido a partir de sua Lagrangeana, \mathcal{L}). Da primeira exigência conclui-se que a ação é uma grandeza escalar, resultante obviamente da integral sobre outro escalar; da segunda, que não depende dos potenciais do campo, mas apenas dele mesmo; da terceira, que estão excluídas as suas derivadas. Resta, portanto, a alternativa de construir a ação a partir de uma função escalar do campo.

O elemento de integração dx , válido no caso de um sistema unidimensional, é substituído por $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, quando se quer trabalhar no domínio quadri-dimensional cartesiano. Não obstante, em coordenadas curvilíneas gerais, d^4x deixa de ser um escalar e, neste caso, a grandeza a se comportar como um invariante é $d^4x \sqrt{|g|}$, onde $g = |g_{\mu\nu}|$ e

$g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico.

Num referencial não-inercial qualquer, o quadrado de um intervalo infinitesimal assume uma forma quadrática geral

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

onde cada componente depende das quatro coordenadas x^μ . Todas as propriedades geométricas do espaço tempo estão contidas nesse tensor métrico e o espaço cartesiano (descrito por $g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$, $g_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$, o que implica imediatamente em $|g_{\mu\nu}| = 0$) representa apenas um caso particular, dito galileano, no qual o referencial é inercial. O tensor métrico é a variável dinâmica em questão.

2.2.1 Uma ação para o campo gravitacional

Feitas as devidas considerações, é possível propor para o campo gravitacional uma ação sob a forma

$$S_g \propto \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L},$$

onde \mathcal{L} deve ser um escalar composto exclusivamente por $g_{\mu\nu}$ e suas primeiras derivadas. O escalar R , dito escalar de curvatura do espaço-tempo, seria perfeitamente aplicável ao caso em questão, se não fosse sua dependência (linear) em relação a derivadas de segunda ordem de $g_{\mu\nu}$. No entanto, graças ao caráter linear dessa dependência, pode-se escrever

$$\int d^4x \sqrt{g} R = \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L} + \int d^4x (w^\mu \sqrt{g})_{,\mu},$$

onde \mathcal{L} tem a dependência correta (mas deixou de ser um escalar) e o último termo, representando a integral do divergente de uma certa grandeza w^μ , é transformado, mediante o teorema de Gauss, numa integral de superfície. Por princípio, a variação do campo sobre a fronteira de integração é nula, logo, é válido escrever

$$\delta \int d^4x \sqrt{g} R = \delta \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L}.$$

Embora \mathcal{L} não seja um escalar, o termo à direita na expressão acima certamente o é, já que o lado esquerdo é inteiramente composto por escalares. Isso permite admitir que

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} R \quad (2.14)$$

é a ação do campo gravitacional, cuja variação, por princípio, deve ser nula. O fator $-c^3/16\pi G$ estabelece a devida relação entre as unidades físicas envolvidas.

2.2.2 A ação da matéria e o tensor momento-energia

Seja um sistema material hipotético cuja ação, submetida ao princípio variacional, resulta em

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Para demonstrar que a equação acima constitui uma definição consistente para o tensor momento-energia, $T^{\mu\nu}$, será suficiente provar (i) sua conservação covariante e (ii) seu caráter tensorial simétrico.

A fim de estabelecer a propriedade (i) é conveniente tomar uma transformação infinitesimal de variáveis, t.q., $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$, donde segue imediatamente que

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\lambda\mu} \epsilon^\lambda{}_{,\nu} - g_{\lambda\nu} \epsilon^\lambda{}_{,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda} \epsilon^\lambda. \quad (2.15)$$

Se S_m é uma grandeza escalar, então δS_m deve se anular. Por meio de uma integração por partes vê-se claramente que isso implica em

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{g} T^{\mu\nu} [g_{\lambda\mu} \epsilon^\lambda{}_{,\nu} + g_{\lambda\nu} \epsilon^\lambda{}_{,\mu} + g_{\mu\nu,\lambda} \epsilon^\lambda] &= \\ \frac{1}{c} \int d^4x \epsilon^\lambda \left[(\sqrt{g} T^\nu{}_\lambda)_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\lambda} \sqrt{g} T^{\mu\nu} \right] &= 0 \end{aligned}$$

e, dado que ϵ^λ é arbitrário, implica também em

$$(T^\nu{}_\mu)_{;\nu} = 0. \quad (2.16)$$

Deste modo, fica demonstrado que $T^{\mu\nu}$ é uma grandeza conservada, em termos covariantes, se e somente se a ação do sistema é um escalar.

A prova que resta obter, para a propriedade (ii), é imediata pois, uma vez que $\delta g_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, fica claro que $T^{\mu\nu}$ também será um tensor simétrico (de segunda ordem) se δS_m for um escalar.

A identificação de $T^{\mu\nu}$ com o tensor momento-energia está, portanto, assegurada e a ação da matéria pode ser escrita na forma

$$S_m = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{g} T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

2.2.3 A ação total e (finalmente) as equações de Einstein

A título de completeza, cabe deduzir agora as equações de campo da gravitação. A ação total do sistema em questão constituir-se-á de um termo puramente gravitacional e outro devido ao seu conteúdo material,

$$S = S_m + S_g.$$

Para computar as conseqüências da aplicação do princípio variacional sobre o segundo termo basta ter em mente a definição $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, donde se conclui que

$$\delta(R\sqrt{g}) = R_{\mu\nu}\sqrt{g}\delta g^{\mu\nu} + R\delta\sqrt{g} + g^{\mu\nu}\sqrt{g}\delta R_{\mu\nu}$$

e, por meio de um exercício de álgebra sobre as equações (2.11) e (2.5) – lembrando que a variação $\delta g_{\mu\nu}$ é infinitesimal (i.e., de primeira ordem) – obtém-se

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{,\kappa} - (\delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda})_{,\lambda} + \delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} - \delta\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} - \delta\Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}, \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} [(\delta g_{\kappa\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\kappa\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\kappa}], \\ \delta R_{\mu\nu} &= (\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda} \end{aligned}$$

onde a última expressão advém do uso da definição de derivada covariante (2.3). Logo, o termo

$$g^{\mu\nu}\sqrt{g}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{g} [(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}] = (\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}$$

não contribuirá para a ação, pois sua integral sobre todo espaço é nula. Resta agora tomar

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\frac{\delta g}{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \qquad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa}\delta g_{\lambda\kappa}$$

para computar os termos restantes e obter

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x.$$

A variação de S_m já foi discutida na seção 2.2.2, de modo que basta somar $\delta S_m + \delta S_g$ para obter, imediatamente, a equação de campo da gravitação:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.18)$$

Uma conseqüência adicional da variação da ação do campo gravitacional é a identidade de Bianchi (2.9). Se S_g também é um escalar, então o argumento empregado em 2.2.2

de que sua variação deve ser nula frente à variação (2.15) da métrica continua válido e a aplicação do mesmo algoritmo que levou à conservação do tensor momento-energia sobre o tensor $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ levará diretamente à identidade de Bianchi: $[R^\nu_\lambda - \frac{1}{2}\delta^\nu_\lambda R]_{;\nu} = 0$.

2.3 Do princípio de equivalência à teoria da relatividade geral

A equação de Einstein (2.18) e, de certo modo, todo o arranjo matemático formalmente estabelecido acima são o esteio da teoria da relatividade geral (doravante TRG), mas a discussão sobre a teoria propriamente dita – ou, em outras palavras, sobre o sentido físico inerente a tais cálculos – coube à presente seção. Como a TRG representa uma generalização sobre a TRR, é pertinente retomar a discussão iniciada no Capítulo 1 sobre essa teoria.

O princípio de relatividade especial afirma que (Cf. STACHEL, 2005) *todas as equações da física devem manter sua forma inalterada mediante a aplicação de uma transformação de Lorentz entre dois sistemas em movimento retilíneo uniforme entre si (sistemas inerciais)* ou, refraseando, que *a representação matemática das leis físicas deve ser invariante com relação a transformações de Lorentz*. Dois processos simultâneos estão atados a tal princípio: a alteração da métrica do espaço-tempo no sentido de contemplar a eletrodinâmica maxwelliana e a adaptação de toda a física restante a essa métrica modificada (EINSTEIN, 1921). Como conseqüências do primeiro tem-se a completa reformulação da cinemática, além dos novos conceitos de simultaneidade e de espaço-tempo enquanto uma entidade única. O segundo processo, por sua vez, levou a modificações nas leis de Newton e lançou uma luz totalmente nova ao conceito de massa inercial. Este fato é expresso através da equação $E = mc^2$ (que provavelmente é a mais famosa das equações matemáticas depois do teorema de Pitágoras e da segunda lei de Newton), na qual está explícita a idéia de que um corpo pode ser visto como um reservatório de energia igual à sua massa inercial vezes a velocidade da luz ao quadrado.

Não obstante esses notáveis sucessos, a TRR mostrou-se incapaz de incorporar a gravitação naturalmente à sua estrutura, pois seu princípio não contempla os referenciais acelerados. Além disso, do ponto de vista filosófico (CUNNINGHAM, 1921), não superou totalmente o problema da teoria newtoniana, pois a definição *quid nominis*² de movimento

²Como foi dito no Capítulo 1, as definições nominais são conjuntos de palavras e relações que, mesmo sem uma prova objetiva, constituem hipóteses de trabalho. A verificabilidade experimental dessas hipóteses é o que torna reais as definições nominais. Cf. CUNNINGHAM, 1921.

retilíneo uniforme faz parte de sua base, embora seu sentido real não esteja rigorosamente estabelecido.

A chave para obter a forma mais geral do princípio de relatividade (e solucionar ambos os problemas de uma só vez) é o fato de que todos os corpos caem com a mesma aceleração quando submetidos a um mesmo campo gravitacional, o que equivale a dizer que as massas inercial e gravitacional são numericamente idênticas para todos os corpos. Esta idéia está enraizada nos primórdios da história da filosofia natural, tempo em que Aristóteles afirmava exatamente o contrário daquilo que ficou posteriormente cristalizado com os experimentos de Galileu, Newton, Eötvös e outros (MISNER et al., 1970; WEINBERG, 1972). Assumir que esta identidade numérica é resultado de uma identificação conceitual mais profunda é o cerne do princípio de equivalência.

Para uma abordagem intuitiva dessa equivalência, é útil considerar a famosa imagem alegórica do elevador em queda livre. Dentro dele, um campo gravitacional externo estático e homogêneo jamais seria detectável, pois tanto os observadores quanto suas massas de prova, bem como o elevador em si, cairiam com a mesma aceleração. Embora esta cena pictórica possua uma forte restrição quanto a campos estáticos e homogêneos, é de se supor que, mesmo quando o exato cancelamento entre as forças inerciais e gravitacionais não for possível – i.e., mesmo no caso mais geral em que os campos são dinâmicos e inhomogêneos –, um cancelamento aproximado será sempre possível se a região considerada for pequena o bastante para que a aproximação estática e homogênea seja aplicável. Deste modo, o princípio de equivalência fica estabelecido ao afirmar que *em todo ponto do espaço-tempo submetido a um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema inercial local tal que, numa região suficientemente pequena em torno do ponto em questão, as leis da natureza assumem a mesma forma que num sistema cartesiano não-acelerado e desprovido de gravitação, ou seja, a forma descrita pela relatividade especial.*³ A analogia com o axioma da geometria não-euclidiana de Gauss, segundo o qual é sempre possível erguer um sistema cartesiano local sobre qualquer superfície globalmente curva, é imediata e o uso de fórmulas semelhantes às da geometria de Riemann no equacionamento da TRG não é de surpreender (cf. Weinberg (1972), Cap. 1), assim como a presença das componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como as únicas funções relevantes para tais equações. Se para Gauss, todas as propriedades de uma dada superfície curva são determinadas por derivadas do tipo $\xi^{\alpha}_{,\mu}$, onde a função $\xi^{\alpha}(x)$ define a transformação do sistema global

³Este enunciado é também conhecido como forma forte do princípio de equivalência, em contraposição à sua forma fraca, que não versa sobre as “leis da natureza”, mas apenas sobre as “leis do movimento de partículas em queda livre”.

de coordenadas x^μ para o sistema cartesiano local ξ^α , para os relativistas a situação é a mesma, salvo que x^μ e ξ^α possuem agora um significado físico claro: são os referenciais de “laboratório” e “inercial”, respectivamente.

O leitor atento a essa altura já percebeu que o primeiro dos dois problemas da TRR foi elucidado, mas o segundo – o problema filosófico – pode ter permanecido na penumbra e merece umas poucas linhas de esclarecimento. Uma definição nominal torna-se real mediante uma prova lógica ou experimental irrefutável. Ao assumir o princípio da relatividade restrita, Einstein assume que as experiências negativas quanto à existência de um tempo e um meio material (o éter) absolutos são um reflexo de seu caráter *quid nominis*, mas a formulação do princípio de relatividade restrita em termos de um “movimento retilíneo uniforme” indefinido é tão desprovido de sentido real quanto a idéia de “repouso absoluto com relação ao éter”. A velocidade de um observador não afeta sua percepção da gravidade, mas a experiência imaginária do elevador em queda livre demonstra que a aceleração é capaz disso. Desse modo, conciliar a gravitação à teoria da relatividade implica em promover os conceitos de tempo e espaço, ou melhor, de espaço-tempo enquanto uma entidade quadri-dimensional una, ao status de definição *quid rei*, isto é, uma definição rigorosamente testável por meio da experiência.

Uma forma alternativa do princípio de equivalência – que em última instância é uma simetria dinâmica, no sentido de se apresentar como um princípio de invariância cujo teor impõe uma restrição sobre as interações de um campo em particular – consiste em dizer que uma equação física é válida num campo gravitacional geral se (i) a equação é válida na ausência de gravitação e (ii) preserva sua forma mediante a uma transformação de coordenadas – ou seja, é covariante. Como essa idéia é aplicável somente em escalas pequenas comparadas com a escala do campo gravitacional, então é razoável esperar que somente $g_{\mu\nu}$ e suas primeiras derivadas aparecem nas equações covariantes estudadas.

Para obter as equações de campo a partir do princípio de equivalência (e dar o devido encerramento ao presente subcapítulo), é pertinente começar por escrever os tensores que podem ser construídos exclusivamente pelo tensor métrico e suas derivadas. As combinações de $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas de primeira ordem são impossíveis pois, em qualquer ponto é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual essas derivadas se anulam, o que reduz o novo tensor a um tensor construído apenas do tensor métrico. Considerando também as segundas derivadas (somente em dependência linear), o único novo tensor resultante é o tensor de Riemann (eq. 2.6).

A demonstração (WEINBERG, 1972, p. 132-135) pode ser feita partindo da regra de

transformação da conexão afim (eq. 2.4). Isolando o segundo termo do lado direito e derivando-o em relação a x^κ , resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \tilde{x}^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial \tilde{x}^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \right) \\ &\quad - \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\eta}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\tau}{\partial \tilde{x}^\eta} - \tilde{\Gamma}_{\rho\lambda}^\tau \tilde{\Gamma}_{\eta\sigma}^\lambda - \tilde{\Gamma}_{\lambda\sigma}^\tau \tilde{\Gamma}_{\eta\rho}^\lambda \right) \\ &\quad - \tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^\tau \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\nu} \right), \end{aligned}$$

onde houve um rearranjo, de modo a juntar os termos similares. Subtraindo a equação resultante dela mesma com os índices ν e κ invertidos, observa-se que o último termo desaparece e o que resta é a expressão

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \tilde{x}^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right) \\ &\quad - \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\eta}{\partial x^\kappa} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right), \end{aligned}$$

que é justamente a regra de transformação de um tensor. Este tensor corresponde ao termo entre parênteses e, como o leitor bem pode verificar comparando-o com (eq. 2.1), é precisamente o tensor de Riemann, ou tensor de curvatura (eq. 2.6)

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda.$$

O compromisso com a completeza exige que se demonstre ainda a unicidade de $R_{\mu\nu}^\lambda$. Para tanto, seja um sistema de coordenadas inercial, fixo sobre um ponto particular X , no qual a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se anula e, além disso, seja uma classe de transformações coordenadas sob as quais $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se mantenha igual a zero, i.e., as transformações $x \rightarrow \tilde{x}$ que obedecem à condição

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right)_{x=X} = 0,$$

de modo que uma quantidade que se comporta como um tensor mediante a uma transformação geral de coordenadas terá o mesmo comportamento frente a essa classe mais restrita de transformações. Se $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$, então todas as derivadas de primeira ordem do tensor métrico são nulas no ponto X – isso é visto imediatamente de (eq. 2.5) – e o novo tensor a ser construído deve conter combinações lineares de suas segundas derivadas, o que equivale a conter combinações lineares das primeiras derivadas da conexão afim. As derivadas de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, de acordo com a classe de transformações considerada, deve obedecer à

relação

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\eta}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial \tilde{x}^{\eta}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial \tilde{x}^{\eta}} \frac{\partial^3 \tilde{x}^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

em $x = X$. Para formar uma combinação linear de $\partial\Gamma/\partial x$ que seja um tensor, é preciso eliminar o último termo da equação acima, o que só é possível fazer buscando uma anti-simetria em κ e ν . Desse modo, a equação acima torna-se uma transformação de um tensor se e somente se este tensor estiver definido como

$$T_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}}$$

em $x = X$. Retomando a expressão para o tensor $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$ deduzida anteriormente, tem-se que, no sistema local em que Γ é igual a zero, é correto afirmar que $T_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$. Como esta é uma igualdade entre tensores, sua validade dentro da classe de sistemas coordenados considerada assegura que, para todos os sistemas de coordenadas, o único tensor T com a forma exigida é o tensor de Riemann $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$. Outros tensores possíveis são combinações lineares deste, dentre as quais as mais relevantes são, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ (eq. 2.10) e o escalar (um tensor de ordem zero, a rigor) de curvatura R (eq. 2.12).

Em resumo, a “lei do campo gravitacional” (EINSTEIN, 1921) é determinada pelas seguintes condições: *primeiro*, ser válida para qualquer sistema de coordenadas arbitrariamente escolhido; *segundo*, ser determinada pelo tensor momento-energia da matéria; *terceiro*, não conter, em suas equações diferenciais, derivadas de ordem superior à segunda em $g_{\mu\nu}$; *quarto*, manter uma dependência linear com relação a seus constituintes. A prova apresentada nesta seção torna explícita a estreita correlação entre gravitação e geometria e permite justificar tanto o uso do escalar de curvatura na dedução da ação gravitacional quanto o fato de que as equações de campo, obtidas a partir do princípio variacional, contenham apenas o tensor de Ricci, o tensor métrico e o escalar de curvatura de forma linear. Na verdade, a dedução desenvolvida ao longo da seção 2.2 seria puro formalismo matemático, desprovido de qualquer sentido físico, se não fosse a base conceitual embutida na discussão sobre o princípio de equivalência. A prova, portanto, de que a expressão (2.18) é de fato a equação de campo da gravitação pode ser considerada completa agora.

2.4 Do princípio cosmológico ao modelo padrão subjacente à teoria

A afirmação de que o o *Universo é homogêneo (simétrico quanto à translação) e isotrópico (simétrico quanto à rotação)*, quando tomado em larga escala expressa a hipótese

de que todos os pontos do Universo são equivalentes entre si: é o chamado princípio cosmológico. Este enunciado baseia-se em importantes evidências observacionais, a saber (MISNER et al., 1970, Cap. 27), a distribuição isotrópica de rádio-fontes no céu, a distribuição de galáxias quanto à posição, magnitude aparente e redshift, a isotropia (de uma parte em 10^5) na radiação cósmica de fundo em microondas; mas não se restringem somente a elas. Há também uma motivação metafísica⁴ que reside na idéia de que as leis físicas mais gerais, aquelas ditas universais, devem ser válidas para todo e qualquer observador, independente de sua posição, e não privilegiar uma dada classe de observadores (por exemplo a classe formada pelos observadores que elaboram as referidas leis). Trata-se de uma herança da revolução copernicana, onde não apenas a Terra perde o status de centro do Universo, mas também o Sol e qualquer outro objeto celeste torna-se indigno desse posto, visto que, por princípio, os observadores privilegiados inexistem.

Para avaliar as conseqüências do princípio cosmológico, é útil lembrar que a relatividade geral não distingue, *a priori*, uma coordenada temporal dentre as quatro coordenadas espaço-temporais. O esquema convenientemente adotado, que considera o próprio universo em evolução como um “relógio”, só é consistentemente possível graças a essa hipótese, que permite escolher uma função monótona do tempo – densidade material ou temperatura, p. ex. – como observável para todos os referenciais. Fica estabelecido, portanto, o sistema (\mathbf{x}, t) como o “sistema de coordenadas cósmico”.

Uma vez determinadas as componentes do tensor métrico, do tensor momento-energia (ou de qualquer outra grandeza) em função das coordenadas cósmicas x^μ , o princípio de equivalência entre os sistemas exige que essas funções sejam as mesmas se tomadas em termos de um outro conjunto de coordenadas \tilde{x}^μ . Ou seja, os tensores são mantidos invariantes frente a transformações do tipo $x \rightarrow \tilde{x}$. Obviamente isso se aplica também para o escalar S usado como “relógio”, de modo que $S(\tilde{t}) = \tilde{S}(\tilde{x}) \equiv S(x) = S(t)$, o que implica em $t = \tilde{t}$. Em linguagem verbal, isso quer dizer que todos os referenciais equivalentes ao sistema cósmico usam a mesma coordenada temporal: o tempo cósmico.

2.4.1 A métrica de Robertson-Walker

A relação formal entre a geometria euclidiana e o contínuo espaço-temporal foi estabelecida por Minkowski em 1908 e o desenvolvimento deste formalismo – inicialmente rejeitado, mas logo adotado por Einstein – foi fundamental para a formulação da teoria

⁴Aqui, é importante aludir ao pressuposto metafísico implícito de que os resultados verificados através do método experimental correspondem a pelo menos uma parcela da realidade (cf. Capítulo 1). A extensão natural desse argumento é a hipótese da equivalência dos observadores.

da relatividade geral (CORRY, 1997). Minkowski propôs que o espaço-tempo da relatividade especial deveria ser encarado como uma generalização do espaço euclidiano tridimensional, de modo que o elemento de linha (a distância ds), tradicionalmente definido como

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$

seria prontamente substituído pela chamada métrica de Minkowsky:

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \delta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu,$$

onde $x_0 = \sqrt{-1}ct$ representaria a coordenada temporal.

No entanto, no caso em que o espaço-tempo é curvado devido à gravitação, o elemento de linha mais geral assume a forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Operacionalmente, essa métrica é caracterizada mediante o uso do princípio cosmológico, pois, uma métrica compatível com este princípio, de acordo com o argumento previamente exposto, deve manter a mesma geometria em cada ponto do subespaço maximamente simétrico, onde o termo “subespaço” refere-se a uma hipersuperfície espacial de tempo constante. As coordenadas do subespaço maximamente simétrico são as tradicionais coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) e a métrica que atende a essas condições é (WEINBERG, 1972, Cap. 13)

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (2.19)$$

ou, em coordenadas cartesianas (ISLAM, 1992, Cap. 2),

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2(\tau) [d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j], \quad (2.20)$$

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} [1 + 1/4 k x^i x_i]^{-2}.$$

As equações (2.19 e 2.20) são conhecidas como métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e contemplam os casos de universos com geometria plana, esférica (fechada) ou hiperbólica (aberta), quando $k = 0, 1, -1$, respectivamente. A variável τ corresponde ao tempo conforme, que relaciona-se com o tempo cósmico por $d\tau = dt/a(t)$, onde $a(t)$ é o fator de escala que representa a expansão (ou contração) do universo. A expressão (2.20) – na qual foi empregado o sistema de unidades em que $c = 1$ – será usada ao longo de todo o texto assumindo a hipótese de universo plano, de modo que $k = 0$ e $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$.

Em resumo, o princípio cosmológico conduz a um tensor métrico extremamente simples, um tensor diagonal cujas componentes (num universo plano) são proporcionais ao quadrado do fator de escala $a(\tau)$:

$$g_{\mu\nu} = -a^2(\tau) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Isso implica que o tensor de curvatura e, conseqüentemente, os tensores $G_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ também serão diagonais.

Outra conseqüência derivável da métrica FRW é o avermelhamento de fótons – o redshift cosmológico. Considerando que as coordenadas de um ponto no espaço-tempo devem ser constantes ao longo da geodésica, tem-se que $a(t)dr/ds = \text{constante}$. Reescrevendo a equação (2.20) na forma $ds^2 = dt^2(1 - v^2)$, onde $v = dr/dt$ e $dr = [\delta_{ij}x^i x^j]^{1/2}$, é fácil identificar o termo $(1 - v^2)$ como o quadrado do denominador na expressão do momento linear q de uma partícula de massa m e velocidade v : $q = mv/(1 - v^2)^{1/2}$. Assim, uma álgebra elementar permite concluir que $qa(t) = \text{constante}$ ao longo da geodésica. Para um fóton, a frequência ν e o momento q estão relacionados por $h\nu = q$, logo, $\nu a(t)$ também é constante ao longo da geodésica. Com base neste argumento, o redshift z é definido como a variação fracional no comprimento de onda $\lambda = 1/\nu$ do fóton

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1.$$

Como o fator de escala é uma função monotônica do tempo, o redshift também o é. Logo, ambos podem ser utilizados como “relógio” para a cosmologia. Convencionalmente adota-se $a_0 = a(t_0) = 1$ (ou seja, $z_0 = 0$) como condição de normalização no instante de tempo atual.

2.4.2 Um tripé de equações fundamentais

De posse da métrica FRW, as equações da relatividade geral assumem, conforme se vê nas linhas seguintes, um aspecto mais tratável. Para computar essas equações é conveniente lançar mão do conceito de fluido perfeito. Um fluido é dito perfeito quando possui, em cada ponto, uma velocidade \mathbf{v} , tal que um observador em movimento com essa mesma velocidade veja o fluido à sua volta como isotrópico. Esta definição, aliada ao fato (anteriormente mencionado) de que o tensor momento-energia, para um universo

homogêneo e isotrópico, é necessariamente um tensor diagonal, leva à conclusão de que o tensor momento-energia, no referencial particular em que o fluido está em repouso (\tilde{S}), obedece às equações

$$\begin{aligned}\tilde{T}^{ij} &= p\delta^{ij} \\ \tilde{T}^{i0} &= \tilde{T}^{0i} = 0 \\ \tilde{T}^{00} &= \rho\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde p e ρ são, respectivamente, pressão e densidade de energia do fluido. A transformação, $\tilde{T}^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu}$, para o referencial em que o fluido é visto com velocidade não-nula \mathbf{v} resulta

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)U^\mu U^\nu,\tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \frac{d\mathbf{x}}{d\tilde{t}} = \mathbf{v}(1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2} \\ U^0 &= \frac{dt}{d\tilde{t}} = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2} \\ U^\mu U_\mu &= -1,\end{aligned}$$

onde U^μ é o quadri-vetor velocidade e $d\tilde{t} \equiv (dt^2 - d\mathbf{x}^2)^{1/2}$ é o intervalo de tempo próprio.

De posse das equações do tensor momento-energia (2.21 ou 2.22), o terceiro termo da equação de Einstein (2.18) está determinado. Resta explicitar agora o tensor de Ricci e o escalar de curvatura; para tanto, basta calcular as componentes dos símbolos de Christoffel (eq. 2.5) usando a métrica FRW e substituir os resultados nas equações (2.11 e 2.12). Este procedimento, aqui omitido, está detalhadamente descrito em Islam (1992) e Weinberg (1972) e conduz a

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho\tag{2.23}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi Gp\tag{2.24}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\tag{2.25}$$

$$\dot{\rho} = -3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)(\rho + p).\tag{2.26}$$

No sistema de equações acima, as duas primeiras correspondem às componentes 00 e 11 da equação de Einstein (2.18) e são conhecidas como equações de Friedmann; a terceira é freqüentemente denominada equação de Raychaudhuri; a última é obtida imediatamente da equação (2.16) e expressa simplesmente a conservação do tensor momento-energia. Lembrando que a proposta deste subcapítulo é apresentar um “tripé” fundamental de

equações, o leitor pode ser levado a crer que há uma equação excedente nesse sistema, mas esta falsa impressão desaparece de imediato pois a identidade de Bianchi impõe que, das três primeiras equações, somente duas sejam independentes. Apenas por uma questão de conveniência, é lícito escolher, por exemplo, as (eqs. 2.23 e 2.25) e, considerando ainda a (eq. 2.26), fixar as equações de base para a cosmologia. É útil também considerar essas equações em função do tempo conforme τ . Se $d\tau = dt/a(t)$, as equações básicas ficam⁵

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \iff \mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\rho \quad (2.27)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) \iff \mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -4\pi G a^2(\rho + p) \quad (2.28)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \iff \rho' + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0 \quad (2.29)$$

onde $\mathcal{H}(\tau) \equiv a'/a$ e $H(t) \equiv \dot{a}/a$ são duas representações do parâmetro de Hubble, a primeira em função do tempo conforme e a última em função do tempo cósmico⁶.

No entanto, esta base ainda não é suficiente para resolver o problema. Nenhuma informação a respeito das propriedades do fluido constituinte do universo a ser estudado é fornecida pelas equações de Einstein ou pela teoria da relatividade. É preciso introduzir *ad hoc* uma equação de estado proveniente da microfísica. No modelo cosmológico padrão, o “fluido cósmico” a ser considerado possui dois regimes claramente distinguíveis: um ultra-relativístico (radiação) e outro não-relativístico (matéria ou poeira), caracterizados pelas equações de estado $p = 1/3\rho$ e $p = 0$, respectivamente. A natureza física da radiação e da fração bariônica da matéria são bem conhecidas, mas as evidências observacionais indicam que, além da fração desconhecida de poeira, há ainda outros fluidos cósmicos de grande importância dinâmica sobre os quais a microfísica pouco pode afirmar: a matéria escura e a energia escura. A discussão sobre essas componentes escuras do Universo é feita no bojo da seção 2.5.

2.4.3 Inflação: uma emenda paradigmática

Incluir uma fase de expansão dita inflacionária nos instantes iniciais do Universo foi a solução encontrada para resolver, ao mesmo tempo, os problemas da planura (o Universo observado hoje tem curvatura muito próxima de zero, o que exigiria um ajuste fino das equações de Einstein) e do horizonte (a extrema homogeneidade observada em largas es-

⁵Para evitar ambigüidades, as derivadas com relação ao tempo cósmico e conforme são representadas por $df(t)/dt = \dot{f}$ e $df(\tau)/d\tau = f'$, respectivamente.

⁶O parâmetro de Hubble, H (ou \mathcal{H}), fornece uma medida da taxa de expansão do Universo em cada instante t (ou τ). Para o instante atual, é costume escrever $H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, onde h é um valor adimensional.

calas no Universo em altos redshifts não poderia ocorrer no cenário padrão, a não ser com condições iniciais muito particulares). Ambos os problemas são detalhadamente apresentados adiante, mas é interessante descrever antecipadamente o paradigma⁷ da inflação, já que o mesmo foi incorporado de modo quase unânime ao modelo cosmológico padrão.

A inflação caracteriza-se por uma fase de expansão acelerada super-luminal, impulsionada por um campo escalar (o ínflaton, φ) e capaz de diluir qualquer curvatura inicial do Universo e expandir drasticamente o horizonte, permitindo o contato causal de regiões distantes.

A idéia inicialmente proposta por Guth (1981) era a de uma transição de fase de primeira ordem, na escala das teorias de grande unificação (GUT), de um falso vácuo com energia não-nula para um vácuo real, levando a um crescimento exponencial do fator de escala e a um rápido resfriamento do Universo. No entanto, esse modelo conhecido como *velha inflação* levava a sérios problemas. O primeiro deles diz respeito à temperatura da transição de fase, que deveria ser igual à temperatura crítica para o fim da inflação. Como a temperatura é inversamente proporcional ao fator de escala, que cresce exponencialmente, a temperatura resultante seria extremamente baixa. O segundo é geração de inomogeneidades e anisotropias incompatíveis com o princípio cosmológico. Este problema advém do fato de que a transição do estado de vácuo simétrico para o falso vácuo assimétrico realiza-se instantaneamente, gerando bolhas que concentram a energia em suas paredes. O reaquecimento do Universo ocorre quando as bolhas colidem e daí o surgimento das anisotropias e inomogeneidades. O terceiro problema é o surgimento de monopólos magnéticos, gerados durante o reaquecimento. Como os campos no interior das bolhas não estão correlacionados, eles não podem alinhar-se uniformemente ao colidir, o que leva ao surgimento de nós topológicos que são os próprios monopólos magnéticos.

Uma formulação livre desse problemas surgiu pouco tempo depois (LINDE, 1982) e ficou conhecida como *nova inflação*. Sua principal característica é a inclusão de correções térmicas ao potencial efetivo, levando a um crescimento gradual do campo dentro das bolhas. Neste novo cenário, após a inflação todo o universo observável fica contido dentro de uma única bolha.

A terceira geração de modelos, também formulada por Linde (1983) e denominada *inflação caótica*, incorporou a hipótese de que o campo não precisa ser inicialmente homogêneo e isotrópico em todo o espaço, mas apenas em pequenos domínios. A partir

⁷O termo “paradigma” é mais adequado para referir-se à inflação do que “modelo”, pois há um grande número de possíveis modelos compatíveis com a idéia geral da inflação. Cf. Dodelson et al. (1997) e Langlois (2004), para revisões.

dessa terceira geração o número (e a complexidade) dos modelos cresceu rapidamente, mas nenhum deles estabeleceu-se como modelo padrão inflacionário. Duas extensas revisões sobre este tema, foram publicadas no volume editado por Hawking e Israel (1987): a primeira foi escrita por Blau e Guth (1987) e, além de descrever o paradigma, contempla também a evolução histórica da idéia de inflação; a segunda é de autoria de Linde (1987) e trata mais especificamente da geração de flutuações quânticas no Universo inflacionário (tema que será abordado ainda neste Capítulo). Além dessas, uma outra revisão importante foi recentemente publicada por Lyth e Riotto (1999).

Em termos genéricos, o paradigma da inflação baseia-se na dinâmica de um campo escalar φ regido por um potencial $V(\varphi)$. Cf. KOLB; TUNER, 1990, Cap. 8. Um campo φ minimamente acoplado tem sua (densidade de) lagrangeana e seu tensor momento-energia dados, respectivamente, por

$$\mathcal{L}_\varphi = 1/2g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - V(\varphi) = 1/2\dot{\varphi}^2 - V(\varphi), \quad (2.30)$$

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \mathcal{L}_\varphi g_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

se desconsideramos as interações de φ com outros campos da teoria. Supondo que φ é espacialmente homogêneo, o tensor (2.31) assume a forma equivalente àquela dos fluidos perfeitos, com pressão e densidade dadas por

$$\rho_\varphi = \dot{\varphi}^2/2 + V(\varphi) \quad (2.32)$$

$$p_\varphi = \dot{\varphi}^2/2 - V(\varphi). \quad (2.33)$$

A equação de estado efetiva deste “fluido” é $\omega_\varphi = p_\varphi/\rho_\varphi$ e a conservação do momento-energia (eq. 2.16) resulta na seguinte equação de movimento:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = \varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi' + \frac{dV}{d\varphi}a^2 = 0. \quad (2.34)$$

A equação de Friedmann (2.23), nesse contexto, fica

$$H^2 = 8\pi G/3 [1/2\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)] \quad (2.35)$$

e a combinação de (2.34) e (2.35) resulta em $\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2$. O caso particular em que $\dot{\varphi}^2/2 \ll V(\varphi)$ e $\ddot{\varphi} \ll dV/d\varphi$, leva a um parâmetro de Hubble aproximadamente constante e a um crescimento exponencial do fator de escala, isto é,

$$a(t) \propto \exp(Ht), \quad H \approx \left(\frac{8\pi G}{3} V(\varphi) \right)^{1/2}. \quad (2.36)$$

Este regime é conhecido como *slow-roll* porque o potencial é quase constante e a equação de estado correspondente é $\omega_\varphi \approx -1$. Se ao invés de aproximações, o caso exato, $V(\varphi) \equiv$ constante, for considerado, então ω_φ é exatamente igual a -1 e diz-se que o modelo é do tipo de Sitter. Os parâmetros

$$\epsilon \equiv \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{d\varphi} \right)^2, \quad \eta \equiv \frac{1}{8\pi G} \frac{1}{V} \frac{d^2V}{d\varphi^2}, \quad (2.37)$$

são úteis para determinar as condições de validade do regime *slow-roll*: $\epsilon \ll 1$ e $\eta \ll 1$. O modelo de Sitter caracteriza-se por $\epsilon = \eta = 0$.

Após a fase *slow-roll* o campo oscila em torno de um mínimo do potencial e ocorre então o reaquecimento do Universo. A física do reaquecimento depende da forma do poço de potencial, que determina a taxa e a eficiência do mesmo. O modelo mais simplificado considera o reaquecimento instantâneo e cem por cento eficiente, ou seja, a inflação acaba de modo abrupto e a era da radiação começa imediatamente.

2.5 Interlúdio empírico

É chegado o momento de confrontar o cenário cosmológico teoricamente previsto com os clarões de realidade fornecidos pelas observações. Uma boa revisão acerca do *status quo* da cosmologia contemporânea foi recentemente publicada por Coles (2005) e serviu de inspiração para este subcapítulo.

Até a segunda década do século XX a cosmologia era tida como um tema metafísico – no sentido depreciativo correntemente difundido depois dos positivistas – situado além do horizonte tangível pelo pensamento objetivo. Somente nos anos 20 e 30, quando a teoria da gravitação desenvolvida por Einstein e as evidências observacionais da expansão cósmica obtidas por Hubble vieram à tona, a cosmologia foi promovida ao status de tema de estudos científicos e desde então, avanços importantes foram realizados, permitindo delinear – com traços rudimentares, é verdade – toda a história do universo. Sem aprofundar nos detalhes históricos, a presente seção promove uma visão panorâmica desse quadro e estabelece um diálogo com as seções formais, um diálogo necessário para fazer as pazes com a metafísica⁸.

A descoberta, nos anos 60, da radiação cósmica de fundo em microondas (i.e., de que o Universo atual está banhado por uma radiação de corpo negro a 2,73 K), aliada às desco-

⁸Entenda-se por “fazer as pazes”, não uma tentativa de retorno à metafísica cartesiana, mas simplesmente o reconhecimento dos aspectos metafísicos implícitos na abordagem científica moderna.

bertas de Hubble e interpretadas sob a luz dos modelos de Friedmann, levou à formulação do modelo do Big Bang, segundo o qual o Universo primordial seria extremamente denso e quente e, devido à expansão, teria resfriado até a temperatura observada atualmente. O primeiro problema desse raciocínio é que assumir uma singularidade espaço-temporal – o Big Bang – implica em uma total indeterminação das condições iniciais e impede que uma solução única para as equações de Friedmann seja encontrada. Este problema é insolúvel, mas não oferece graves transtornos. Para temperaturas próximas da escala de Planck, 10^{19}GeV , a teoria da relatividade geral não é mais aplicável e efeitos de gravitação quântica deveriam ser considerados. Assim, dentro do escopo da relatividade geral, as condições iniciais não podem ser tomadas em $t = 0$, mas em $t > 0$ tal que $T < 10^{19}\text{GeV}$.

Antes de discutir o segundo problema, é válido apresentar o modelo mais precisamente. Expandindo a equação de Friedmann (2.23) para explicitar a contribuição dinâmica de cada constituinte do Universo, resulta

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = 1, \quad \Omega_i \equiv \rho_i/\rho_c, \quad \rho_c \equiv 8\pi G/3H^2$$

onde Ω_i é o parâmetro de densidade da i -ésima componente e ρ_c é a densidade crítica do Universo (a densidade para a qual o Universo tem curvatura nula). É possível generalizar e incluir na equação acima dois outros termos $\Omega_k = -k/a^2H^2$ e $\Omega_\Lambda = \Lambda/3H^2$, relativos à curvatura do espaço tempo e à energia do vácuo, respectivamente. Se apenas a radiação ($p_r = 1/3\rho_r$) e a matéria não-relativística ($p_m = 0$) são computadas, a única solução possível é um universo em expansão desacelerada.

Ao contrário do que ocorreu no Universo primordial, a contribuição da radiação (e de todas as partículas relativísticas, como os neutrinos) para a dinâmica do Universo recente é muito pequena: o parâmetro de densidade da radiação Ω_{r_0} observado hoje é $\sim 10^{-5}$ (computando os neutrinos em três sabores, esse valor sobe uma ordem de grandeza).

Quanto à matéria não-relativística (ou poeira), há um importante argumento teórico – a nucleossíntese primordial – a favor de um parâmetro de densidade de bárions muito pequeno, $\Omega_{b_0} \sim 0,04$. Este argumento – extensamente revisado por Steigman (2002) – parte da idéia de que, no Universo primordial, a elevada temperatura favorece a síntese de Hélio e de outros elementos leves como o Deutério e o Lítio. A nucleossíntese estelar produz, além do He^4 , uma quantidade apreciável de elementos pesados, de modo que as gerações mais recentes de estrelas apresentam metalicidade maior que as antigas. Assim, as observações de estrelas de distintas metalicidades permitem estimar a abundância em

massa $Y \sim 0,24$ de He^4 relativamente ao H^1 primordial e, conseqüentemente, a razão entre a densidade numérica de nêutrons e prótons $r \sim 1/7$ naquela época, cuja relação com Ω_{b_0} , considerando três famílias de neutrinos, é dada por $r \sim 0,16(\Omega_{b_0}h^2)^{0,04}$. Isso indica que a maior parte da matéria não-relativística é também não bariônica. Esta *matéria escura* também está associada a problemas dinâmicos, como a curva de rotação de galáxias, que não pode ser explicada se apenas a massa bariônica for considerada. Através de estudos da dinâmica de galáxias e aglomerados e de lentes gravitacionais – com base nos quais, em um artigo de revisão, Coles e Ellis (1994) apontam para a possibilidade de o Universo ser aberto – estima-se que o parâmetro de densidade da matéria, somando as componentes bariônica e não-bariônica, é $\Omega_{m_0} \sim 0,3$.

Estes fatos isolados implicam que faltam elementos a computar e naturalmente os efeitos da curvatura e da energia do vácuo devem ser investigados, mas é preciso levar em conta um outro fato. Medidas de distância, feitas através da luminosidade e do redshift de objetos astrofísicos, são sensíveis à curvatura do espaço tempo (HOGG, 1999) e, portanto, a “cosmografia clássica” permitiu estabelecer já nos anos 70, limites para o parâmetro de densidade total (Guth (1981) refere-se a valores da ordem de $0,01 < \Omega_0 < 10$), indicando que o Universo é aproximadamente plano. Isto levou muitos teóricos a crer na hipótese de que $\Omega_{m_0} \sim 1$, mesmo nos anos 90, quando as melhores estimativas apontavam para um valor mais próximo de 0,3. A explicação para essa planura não é fornecida pelo modelo do Big Bang e pode-se dizer que este é o seu segundo problema.

As medidas precisas do espectro das anisotropias da RCF, iniciadas com o satélite COBE (SMOOT et al., 1991; WRIGHT et al., 1992; MATHER et al., 1994) e efetivamente realizadas pelo WMAP (BENNETT et al., 2003; SPERGEL et al., 2006), foram decisivas ao estabelecer fortes vínculos não somente para a planura, mas também para diversos parâmetros cosmológicos, a saber (COLES, 2005),

$$\Omega_{k_0} = -0,02 \pm 0,02 \quad \Omega_{b_0}h^2 = 0,024 \pm 0,001 \quad \Omega_{m_0}h^2 = 0,14 \pm 0,02$$

são os valores de melhor ajuste para os parâmetros de densidade e, para a constante de Hubble, tem-se

$$h = 0,72 \pm 0,05.$$

Em paralelo aos avanços relativos à RCF, o uso de supernovas de tipo Ia nas medidas de distâncias cosmológicas até $z \sim 1$ revelou, no final da década de 90, um segundo fato adicional: a expansão acelerada do Universo. As SNe de tipo Ia correspondem a explosões ocorridas nos estágios finais de estrelas cujas massas são próximas à massa de

Chandrasekhar e a correlação empírica encontrada entre sua luminosidade máxima e sua subsequente curva de luz faz com que estes eventos sejam usados como velas-padrão para medidas de distância. A expansão acelerada é inferida a partir da sistemática diminuição de brilho observada à medida que o redshift aumenta. Dois grupos independentes (RIESS et al., 1998; PERMUTTER et al., 1999) obtiveram basicamente os mesmos resultados e, mais recentemente, chegaram à conclusão de que a fase de expansão acelerada é relativamente recente, tendo começado aproximadamente em redshifts da ordem de ~ 1 (RIESS et al., 2001; TONRY et al., 2003).

Estes dois fatos – a planura e a expansão acelerada – combinados com os fatos anteriormente discutidos – a quantidade insuficiente de matéria não-relativística para manter o universo plano e a existência de uma componente de matéria não-bariônica – motivaram a hipótese de que a energia do vácuo, ou em termos mais abrangentes, uma *energia escura* deve dominar o universo recente.

No contexto dos modelos de Friedmann, a expansão acelerada exige que a equação de estado efetiva seja $p < -2/3\rho$. A constante cosmológica, incluída no lado esquerdo das equações de Einstein como um termo extra devido à energia do vácuo ou no lado direito como um fluido de natureza desconhecida, tem a equação de estado $p = -\rho$ e seria a solução natural do problema, pois introduzir um termo constante nas equações – Λ em (eq. 2.23) e $\Lambda/3$ em (eq. 2.25) – é o mesmo que adicionar um termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ à ação gravitacional e não altera o sentido da teoria. A interpretação de Λ como a energia do vácuo vem da teoria quântica e é análoga ao efeito Casimir, pois as flutuações quânticas do espaço “vazio” comportam-se como Λ . O problema é que a energia do vácuo é divergente e uma energia de corte faz-se necessária para que o Universo não seja totalmente dominado pela constante cosmológica desde o início e, se a energia de corte for da ordem da energia de Planck, a densidade de energia do vácuo assume um valor 123 ordens de grandeza maior que o observado (WEINBERG, 1989). Para estar de acordo com os dados mais recentes, o corte deveria estar na escala de meV, mas uma teoria compatível com esse valor ainda não existe e, por esta razão, uma vasta gama de modelos alternativos de energia escura estão em debate atualmente (para revisões, cf. Peebles e Ratra (2003) e Copeland et al. (2006)). Os dados observacionais combinados do WMAP e supernovas indicam que o parâmetro de densidade da energia escura é

$$\Omega_{ee0} = 0,72 \pm 0,03$$

e embora não seja um problema do modelo do Big Bang em si, esta é uma interessante questão em aberto na cosmologia contemporânea.

O terceiro problema do modelo do Big Bang propriamente dito (o problema do horizonte) é a extrema isotropia e homogeneidade observadas na RCF (as anisotropias são menores que uma parte em 10^4), indicando que todo o Universo atual esteve causalmente conectado no momento em que se tornou transparente aos fótons, ou seja, quando o fator de escala era cerca de mil vezes menor que o atual, ou quando $z \sim 1000$. Dois pontos em regiões opostas do Universo só podem estar causalmente conectados se os seus respectivos cones de luz se interceptam em algum instante no passado, ou seja, se desde eras tão remotas o Universo inteiro já estava em conexão causal, é preciso forjar um mecanismo que expanda estes cones de luz muito rapidamente logo nos instantes iniciais: tal mecanismo, proposto por Guth (1981), é a inflação (veja a seção 2.4.3), que corresponde a um estágio durante o qual a evolução do Universo é dominada não pela radiação ou matéria, mas por um campo escalar ϕ , cuja equação de estado depende de um potencial de interação $V(\phi)$. Nos modelos mais comuns, a equação de estado é semelhante à da constante cosmológica. A inflação potencialmente resolve, ao mesmo tempo, o problema do horizonte e da planura, pois essa expansão inflacionária também eliminaria a curvatura do espaço-tempo.

A descrição feita acima, de um universo idealizado homogêneo e isotrópico não condiz com o que se observa. Em escalas menores observam-se aglomerações de massa – estrelas, galáxias, aglomerados – que demonstram a vasta complexidade estrutural do Universo. A idéia básica de formação de estruturas é a de que uma região do espaço homogêneo, isotrópico e estático cuja densidade seja ligeiramente maior que a da vizinhança, deve atrair toda a massa ao seu redor e colapsar exponencialmente. Esta instabilidade gravitacional continua válida em um universo em expansão, mas nesse caso o colapso fica prejudicado e seu crescimento é em lei de potência. Como a maior parte da matéria é não-bariônica, os bárions apenas seguem os poços de potencial da matéria escura. A distribuição de matéria observada (PERCIVAL et al., 2001; ZEHAVI et al., 2002; ABAZAJIAN et al., 2003) corrobora este cenário e o modelo de matéria escura fria com constante cosmológica, também conhecido como modelo de concordância cósmica ou modelo Λ CDM, vem adquirindo força nos últimos tempos.

Em resumo, a cosmologia contemporânea é capaz de explicar, em linhas gerais, a evolução do Universo desde uma escala de energia pouco inferior à escala de Planck até a época presente. Uma gama de teorias e observações combinadas oferecem informações sobre seus constituintes, o que, dentro do contexto dos modelos de Friedmann da relatividade geral, é suficiente para determinar a dinâmica. O modelo do Big Bang, explica o banho térmico de 2,73K observado e, acrescido da idéia de inflação, resolve simulta-

neamente os problemas da planura e do horizonte. Para explicar a história da formação de estruturas no Universo, fez-se necessário desenvolver uma teoria adicional: a teoria de perturbações cosmológicas, tema da próximas sub-seções. Quanto ao problema da constante cosmológica, este ainda está em franca discussão e espera-se que sua solução exija o desenvolvimento de teorias mais fundamentais, ligando a microfísica à física de fenômenos em larga escala. Em seu “inventário” das formas de energia presentes no cosmos, Fukugita e Peebles (2004) classificam e organizam todas as formas de energia conhecidas (ou inferidas): o setor escuro, contém cerca de 95% do total, $\sim 72\%$ em energia, $\sim 23\%$ em matéria escura e uma pequena fração, $\sim 10^{-8}\%$, em ondas gravitacionais primordiais; em seguida estão os bárions, que contribuem com $\sim 4,5\%$; depois as relíquias térmicas (radiação eletromagnética e neutrinos), somando $\sim 0,1\%$; e outros termos de menor contribuição energética, como radiação proveniente de estrelas, raios cósmicos e campos magnéticos. É interessante notar que as componentes cosmológicamente mais relevantes são justamente aquelas sobre as quais menos se sabe atualmente. Isso significa que os avanços realizados, embora sejam notáveis, estão longe de fornecer uma explicação satisfatória e que a cosmologia, recém promovida ao status de tema de estudos científicos, ainda carece de bases teóricas mais firmemente estabelecidas.

2.6 Da realidade observável à teoria de perturbações cosmológicas

As evidências observacionais indicam que o Universo evoluiu de um estado inicial caracterizado por um fluido extremamente homogêneo e isotrópico de altíssima temperatura, para o estado atual em que a temperatura é baixa e complexas estruturas gravitacionalmente ligadas foram formadas. Uma explicação coerente desse processo é fornecida pela teoria linear de perturbações gravitacionais. Matematicamente, essa teoria se reduz a resolver as equações de Einstein perturbadas, linearizando-as sobre um fundo homogêneo em expansão. A única complicação é a liberdade de calibre (*gauge*), ou seja, a escolha das coordenadas de fundo: nem todas as métricas perturbadas correspondem a espaços-tempo perturbados; mas, as variáveis físicas não podem depender dessa escolha, logo, é conveniente adotar uma abordagem dita invariante de *gauge*, recentemente revisada por Mukhanov et al. (1992) e por Giovannini (2005), que também aborda o problema a partir de *gauges* específicos.

2.6.1 Abordagem clássica

Os conceitos da teoria linear de perturbações gravitacionais são restritos ao caso de pequenas perturbações da métrica FRW e, em particular, as variáveis Ψ e Φ empregadas no formalismo ora apresentado só são invariantes até a primeira ordem. Diante da hipótese assumida, de que o espaço-tempo real difere apenas sutilmente da idealização homogênea e isotrópica, é útil separar a métrica em duas componentes, isolando a perturbação, $\delta g_{\mu\nu}$, da métrica de fundo, $g_{\mu\nu}^{(B)}$ – esta última, dada por (2.20):

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + \delta g_{\mu\nu}.$$

Três categorias distintas são possíveis: perturbações escalares (e), vetoriais (v) e tensoriais (t). As duas últimas não apresentam instabilidades. As tensoriais geram ondas gravitacionais desacopladas das inhomogeneidades de pressão e densidade, ao passo que as vetoriais decaem em universos em expansão. Somente as perturbações escalares levam a modos crescentes e podem afetar a dinâmica da matéria, mas as ondas gravitacionais também são de particular interesse, pois trazem informações específicas sobre as características (e a evolução) da métrica do espaço-tempo. A rigor, a perturbação da métrica contém os três constituintes, mas, na aproximação linear, cada uma delas evolui independentemente, o que permite considerá-las em separado:

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}^{(e)} + \delta g_{\mu\nu}^{(v)} + \delta g_{\mu\nu}^{(t)}.$$

Para definir as perturbações *escalares* do modo mais geral, quatro funções escalares são necessárias. Duas atuam sobre a parte espacial do tensor métrico (ψ e $E_{,ij}$) e duas atuam sobre as componentes 00 e $0i$ (ϕ e $B_{,i}$), de modo a constituir, para um universo plano⁹,

$$\delta g_{\mu\nu}^{(e)} = -a^2(\tau) \begin{pmatrix} -2\phi & B_{,i} \\ B_{,i} & 2(E_{,ij} - \psi\delta_{ij}) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

que conduz imediatamente à métrica perturbada

$$g_{\mu\nu}^{(e)} \equiv g_{\mu\nu}^{(B)} + \delta g_{\mu\nu}^{(e)} = -a^2(\tau) \begin{pmatrix} -1 - 2\phi & B_{,i} \\ B_{,i} & 2E_{,ij} + (1 - 2\psi)\delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

As perturbações *vetoriais* são definidas com dois vetores, S_i e F_i , cuja divergência

⁹Lembrando que, para um universo plano, as derivadas covariantes são idênticas às derivadas parciais comuns.

deve ser nula,

$$S^i{}_{,i} = 0, \quad F^i{}_{,i} = 0, \quad (2.40)$$

para garantir que não possam ser desdobrados em uma soma de um vetor de divergência nula com o gradiente de um escalar (pois isso eliminaria o caráter puramente vetorial da perturbação). Assim, resultam

$$\delta g_{\mu\nu}^{(v)} = -a^2(\tau) \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & F_{i,j} + F_{j,i} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

$$g_{\mu\nu}^{(v)} \equiv g_{\mu\nu}^{(B)} + \delta g_{\mu\nu}^{(v)} = -a^2(\tau) \begin{pmatrix} -1 & -S_{,i} \\ -S_i & F_{i,j} + F_{j,i} + \delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

O caso de perturbações *tensoriais* é bem mais simples e é construído apenas com um tensor h_{ij} que atua sobre a parte espacial da métrica e satisfaz aos vínculos

$$h^i{}_i = 0, \quad h^i{}_{,i} = 0, \quad (2.43)$$

o que leva a

$$\delta g_{\mu\nu}^{(t)} = -a^2(\tau) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$g_{\mu\nu}^{(t)} \equiv g_{\mu\nu}^{(B)} + \delta g_{\mu\nu}^{(t)} = -a^2(\tau) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} + h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

O tensor $\delta g_{\mu\nu}$ está portanto definido, em termos do chamado formalismo de Bardeen (BARDEEN, 1980 apud MUKHANOV et al., 1992), como a soma das equações (2.38), (2.41) e (2.44). Resta estabelecer, no contexto desse mesmo formalismo, as variáveis invariantes de *gauge*.

Neste ponto é relevante fazer uma observação quanto à notação. Em um universo plano, homogêneo e isotrópico, descrito pela métrica de FRW (eq. 2.20), as perturbações tensoriais de primeira ordem podem ser representadas em termos do tempo cósmico ou conforme – $\mathbf{h}_{ij}(t, \mathbf{x})$ ou $h_{ij}(\tau, \mathbf{x})$, respectivamente – de modo que a métrica resultante seja:

$$ds^2 = dt^2 - [a^2(t)\delta_{ij} + \mathbf{h}_{ij}]dx^i dx^j = a^2(\tau)[d\tau^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j],$$

onde fica clara a relação

$$\mathbf{h}_{ij}(t) \equiv a^2(\tau)h_{ij}(\tau),$$

entre \mathbf{h}_{ij} e h_{ij} , que serão usados ao longo do texto.

Matematicamente, uma transformação de gauge caracteriza-se por uma transformação $\delta Q(p) \rightarrow \widetilde{\delta Q}(p)$ associada a uma mudança de variáveis $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$ sobre o espaço-tempo coordenado \mathcal{M} , onde $\delta Q(p) \equiv Q(x^\alpha(p)) - Q^{(B)}(x^\alpha(p))$ é uma função arbitrária definida em \mathcal{M} e avaliada no ponto $p \in \mathcal{M}$. Considerando uma transformação infinitesimal que obedeça

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = (-\xi^0, \xi^i), \quad \xi_i = \xi_{,i} + \zeta_i, \quad \zeta^i_{,i} = 0$$

a mudança resultante em δQ é $\Delta Q = \widetilde{\delta Q} - \delta Q = \mathcal{L}_\xi Q$, onde $\mathcal{L}_\xi Q$ é a derivada de Lie (SIGURDUR, 1978) da grandeza Q na direção do vetor ξ^i . Para o caso de $g_{\mu\nu}$, tem-se que (GIOVANNINI, 2005)

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2(a^2 \xi_\mu)_{,\nu}.$$

As transformações que envolvem apenas ξ e ξ^0 preservam o caráter escalar das perturbações e levam a transformações do tipo

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \tilde{\phi} = \phi - (a'/a)\xi^0 - \xi^{0'} \\ \psi &\rightarrow \tilde{\psi} = \psi + (a'/a)\xi^0 \\ B &\rightarrow \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi' \\ E &\rightarrow \tilde{E} = E - \xi \end{aligned} \tag{2.46}$$

para as variáveis ϕ, ψ, B, E usadas na (eq. 2.38). Por outro lado, para perturbações exclusivamente vetoriais, é preciso considerar transformações do tipo $x^i \rightarrow \tilde{x}^i + \zeta^i$, o que resulta em

$$\begin{aligned} S_i &\rightarrow \tilde{S}_i = S_i - \zeta_i \\ F_i &\rightarrow \tilde{F}_i = F_i + \zeta_i. \end{aligned} \tag{2.47}$$

As perturbações tensoriais, por sua vez, são invariantes:

$$h_{ij} \rightarrow \tilde{h}_{ij} = h_{ij}. \tag{2.48}$$

As variáveis fundamentais empregadas na descrição de perturbações escalares no formalismo de Bardeen são invariantes de *gauge* construídos a partir de uma combinação linear de ϕ, ψ, B e E , a saber:

$$\Phi = \phi + (B - E)' + \mathcal{H}(B - E), \quad \Psi = \psi - \mathcal{H}(B - E'). \tag{2.49}$$

Para calcular a forma perturbada, em primeira ordem, das equações de campo,

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\delta R = 8\pi G\delta T_{\mu\nu},$$

é preciso calcular, além de $\delta g_{\mu\nu}$, as perturbações $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, $\delta R_{\mu\nu}$ e $\delta T_{\mu\nu}$. Este cálculo é aqui omitido, mas encontra-se detalhadamente demonstrado em Weinberg (1972, Cap. 15.10) – para ondas gravitacionais – e Giovannini (2005, Apêndice A). O resultado para perturbações escalares é

$$\begin{aligned} \nabla^2\Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) &= 4\pi G a^2 \delta T_0^{0(g)} \\ (\Psi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} &= 4\pi G a^2 \delta T_i^{0(g)} \\ [\mathcal{H}(2\Psi' + \Phi' + \mathcal{H}\Phi) + 2\Phi\mathcal{H}' + \Psi'' + 1/2\nabla^2(\Phi - \Psi)] \delta_j^i \\ - 1/2\delta^{ik}(\Phi - \Psi)_{,kj} &= -4\pi G a^2 \delta T_j^{i(g)}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde $\delta T_\nu^\mu{}^{(g)}$ é o invariante de *gauge* da perturbação sobre o tensor momento-energia:

$$\begin{aligned} \delta T_0^{0(g)} &= \delta T_0^0 + (T_0^0)'(B - E') \\ \delta T_i^{0(g)} &= \delta T_i^0 + (T_0^0 - 1/3T_k^k)(B - E')_{,i} \\ \delta T_j^{i(g)} &= \delta T_j^i + (T_j^i)'(B - E'). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Para perturbações tensoriais, na ausência de termo fonte (ou seja, $T_\nu^\mu = 0$), resulta simplesmente

$$\delta R_j^{i(g)} = -\frac{1}{2a^2} \left(h_j^{i''} + 2\mathcal{H}h_j^{i'} - \nabla^2 h_j^i \right) = 0. \quad (2.52)$$

Dentre os aspectos mais gerais da teoria de perturbações cosmológicas, os pontos destacados acima foram selecionados a fim de que o conceito de ondas gravitacionais cósmicas e seu tratamento matemático sejam estabelecidos. Essas ondas gravitacionais de origem cosmológica têm sua origem postulada durante o período de inflação e, portanto, faz-se necessário investigar com certo detalhe, o comportamento das perturbações naquele período.

No regime inflacionário, o fundo comporta-se de acordo com a descrição apresentada na seção 2.4.3, onde o espaço-tempo é dominado por um campo escalar φ e seu potencial $V(\varphi)$. Usando as equações (2.31) em (2.51), obtém-se as componentes perturbadas do tensor momento-energia e substituindo-as em (2.50), resulta:

$$\nabla^2\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G \left(\varphi' \delta\varphi^{(g)'} + \frac{dV}{d\varphi} a^2 \delta\varphi^{(g)} \right) \quad (2.53)$$

$$\Phi' + \mathcal{H}\Phi = 4\pi G \varphi' \delta\varphi^{(g)} \quad (2.54)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H} + 2\mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G \left(\varphi' \delta\varphi^{(g)'} - \frac{dV}{d\varphi} a^2 \delta\varphi^{(g)} \right), \quad (2.55)$$

onde a equação (2.35) foi utilizada. Subtraindo (2.53) de (2.54), é possível escrever a equação

$$\Phi'' + 2(\mathcal{H} - \varphi''/\varphi')\Phi' - \nabla^2\Phi + 2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\varphi''/\varphi')\Phi = 0, \quad (2.56)$$

com o auxílio de (2.35), (2.34) e (2.54), onde esta última é usada para eliminar $\delta\varphi^{(g)}$. Devido às propriedades de simetria do tensor-momento energia, tem-se ainda que $\Phi = \Psi$. É importante notar que, quando o modelo de inflação tende para o caso de Sitter, ou seja, quando $\mathcal{H}' \rightarrow 0$ e $\varphi'' \rightarrow 0$, a equação (2.56) é análoga a (2.52), o que permite concluir que, embora as ondas gravitacionais sejam perturbações tensoriais, sua amplitude evolui como se fossem perturbações de um campo escalar invariante e minimamente acoplado. Deste modo, espera-se que os espectros de perturbações escalares e tensoriais tenham a mesma forma.

As perturbações discutidas nesta seção têm caráter clássico, mas as condições iniciais – sem as quais o problema não está completamente determinado – estão atreladas a mecanismos quânticos de geração; tais mecanismos são tratados a seguir.

2.6.2 Teoria quântica

A base do processo de quantização consiste nas relações de comutação definidas a partir de momenta canônicos, de modo que as variáveis clássicas são associadas a operadores de Heisenberg e as médias são calculadas por meio do valor esperado dos operadores em um dado estado quântico do sistema. No caso particular de perturbações gaussianas, basta calcular o espectro de potência, tomando a função de correlação de dois pontos para os operadores correspondentes aos observáveis físicos clássicos. Para tanto, dentro do mesmo formalismo discutido na abordagem clássica, o primeiro passo é estabelecer uma ação para as perturbações cosmológicas em função de uma variável invariante de gauge, v ; em seguida, os observáveis físicos são expressos em termos de v e, por último, a quantização canônica é realizada tomando a expansão do operador \hat{v} em operadores de criação e aniquilação; os coeficientes dessa expansão são governados pelas mesmas equações que regem seus correspondentes clássicos. O cálculo das funções de correlação se reduz ao cálculo do valor esperado de produtos dos operadores de criação e destruição no estado quântico do sistema.

Para obter a quantização de perturbações de primeira ordem sobre um fundo homogêneo e isotrópico, é preciso expandir até segunda ordem a ação total $S = S_g + S_m$,

na qual S_g é a ação de Einstein (2.14) e S_m é a contribuição do conteúdo material. Esta contribuição é dada por (2.17) no caso de uma descrição hidrodinâmica da matéria ou por

$$S_m = \int \mathcal{L}_\varphi \sqrt{-g} d^4x,$$

onde \mathcal{L}_φ é a lagrangeana (2.30), no caso de uma descrição via campo escalar. O cálculo completo, aqui omitido, pode ser encontrado em Mukhanov et al. (1992) e resulta em

$$S_{(\text{ordem } 2)} = \frac{1}{2} \int \left(v'^2 - v_{,i} v_{,i} + \frac{\theta''}{\theta} v^2 \right) d^4x, \quad (2.57)$$

onde v é o potencial invariante de gauge que, para perturbações realizadas sobre um campo escalar φ , é definido como

$$v \equiv a [\delta\varphi + (\varphi'/\mathcal{H})\psi] = a [\delta\varphi^{(g)} + (\varphi'/\mathcal{H})\Psi], \quad \delta\varphi^{(g)} = \delta\varphi + \varphi'(B - E') \quad (2.58)$$

e $\theta \equiv a\varphi'/\mathcal{H}$ (também no caso de um campo escalar). O momentum canônico conjugado de v é $\pi(\tau, \mathbf{x}) = \partial\mathcal{L}/\partial v' = v'(\tau, \mathbf{x})$ e a hamiltoniana é simplesmente

$$\int (v'\pi - \mathcal{L}\sqrt{g}d^3x).$$

Na teoria quântica, as variáveis v e π tornam-se operadores \hat{v} e $\hat{\pi}$ mediante o uso das relações de comutação

$$[\hat{v}(\tau, \mathbf{x}), \hat{v}(\tau, \mathbf{x}')] = [\hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}')] = 0, \quad [\hat{v}(\tau, \mathbf{x}), \hat{\pi}(\tau, \mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.59)$$

e da condição de normalização

$$\int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \sqrt{g} d^3x = 1.$$

Variando (2.57), obtém-se a equação de movimento de v , que também rege a evolução de \hat{v} ,

$$\hat{v}'' - \nabla^2 \hat{v} - (\theta''/\theta)\hat{v} = 0.$$

Esta equação é equivalente àquelas obtidas na representação de Heisenberg (na qual toda a dependência temporal está contida nos operadores):

$$i\hat{v}' = [\hat{v}, \hat{H}], \quad i\hat{\pi}' = [\hat{\pi}, \hat{H}].$$

O operador \hat{v} pode ser expandido sobre uma base completa de soluções da equação de movimento, $\psi_k(\mathbf{x})v_k^*(\tau)$, onde $v_k^*(\tau)$ é o complexo conjugado de $v_k(\tau)$, por meio de uma

separação de variáveis, tal que, para um fundo plano,

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\psi_k(\mathbf{x}) = 0 & \quad \Rightarrow \quad \psi_k(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \\ v_k''(\tau) + (k^2 - \theta''/\theta)v_k(\tau) = 0, \\ \hat{v} = \frac{1}{2} \int d^3k \left[\psi_k(\mathbf{x})v_k^*(\tau)a_k^- + \psi_k^*(\mathbf{x})v_k(\tau)a_k^+ \right], \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde os operadores de criação e destruição, a_k^+ e a_k^- satisfazem a relações de comutação padrão (para bósons),

$$[a_k^-, a_{k'}^-] = [a_k^+, a_{k'}^+] = 0, \quad [a_k^-, a_{k'}^+] = \delta_{kk'},$$

o que implica na condição

$$v_k'(\tau)v_k^*(\tau) - v_k^{*'}(\tau)v_k(\tau) = 2i.$$

Para completar a quantização, é preciso estabelecer o espaço de Hilbert composto pelos estados sobre os quais os operadores \hat{v} e $\hat{\pi}$ atuam. Através de um estado de vácuo $|0\rangle$ único, o espaço de Hilbert fica completamente determinado mediante sucessivas aplicações do operador de criação. No entanto, se tomamos as soluções oscilantes (de frequência positiva) em um instante τ_0 arbitrário para construir o estado de vácuo tal que

$$\hat{a}_k^+ |0_{\tau_1}\rangle = 0 \quad \forall k,$$

este não coincidirá com o vácuo

$$\hat{b}_k^+ |0_{\tau_0}\rangle = 0 \quad \forall k$$

definido em um instante τ_1 posterior, pois modos que possuíam frequência positiva em τ_0 podem ter frequência negativa em τ_1 , exceto quando $z''/z = \text{constante}$. Isso implica que a determinação do estado de vácuo (e conseqüentemente do espaço de Hilbert) não é constante no tempo. As transformações que conectam os diferentes estados $|0\rangle$ são conhecidas como transformações de Bogoliubov:

$$\hat{a}_k^- = \alpha_k \hat{b}_k^- + \beta_k^* \hat{b}_k^+, \quad \hat{a}_k^+ = \beta_k \hat{b}_k^- + \alpha_k^* \hat{b}_k^+. \quad (2.61)$$

Um observador em τ_1 define o número de partículas observado em cada modo k a partir do operador $\hat{N}_k^1 = \hat{b}_k^+ \hat{b}_k^-$ e ao aplicá-lo sobre o estado $|0\rangle_{\tau_0}$, ele deve obter

$$\langle 0_{\tau_0} | N_k^1 | 0_{\tau_0} \rangle = |\beta_k|^2,$$

ou seja, o estado de vácuo previamente definido pelo observador em τ_0 contém um número não nulo de partículas quando observado em τ_1 . Em outras palavras, devido à dependência temporal da métrica de fundo, flutuações quânticas serão naturalmente produzidas a partir de um estado de “vácuo” inicial, levando, por exemplo, ao surgimento de perturbações em modelos de universos inflacionários. A escolha do “vácuo”, portanto, não é única e deve ser criteriosamente realizada.

No caso particular do universo inflacionário, quando $\theta''/\theta \approx a''/a > 0$, é possível definir o vácuo de Sitter, dado pelas condições

$$v_k(\tau_0) = (\mathcal{H}_{\tau_0} + ik) \frac{\exp(ik\tau_0)}{k^{3/2}}, \quad v'_k(\tau_0) = ik^{1/2} \left(\mathcal{H}_{\tau_0} + ik - i \frac{\mathcal{H}'_{\tau_0}}{k} \right) \exp(ik\tau_0), \quad (2.62)$$

válidas no regime assintótico, $k \rightarrow \infty$ e $k \gg \mathcal{H}_{\tau_0} = a'(\tau_0)/a(\tau_0)$.

Esta formulação geral da teoria quântica de perturbações é diretamente aplicável tanto ao caso de perturbações de um campo escalar, como no caso de perturbações tensoriais.

2.6.2.1 Perturbações escalares

Especificamente para o campo escalar, o operador $\hat{\Phi}$ é expandido na forma

$$\hat{\Phi}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\varphi'}{a\sqrt{2}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left[\exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) u_k^*(\tau) a_k^- + \exp(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) u_k(\tau) a_k^+ \right],$$

onde $u_k = -4\pi G k^{-2} \theta (v_k/\theta)'$. Essa expansão é possível graças à relação

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G (\varphi'^2/\mathcal{H}) (v/\theta)'$$

existente entre Φ e v . Esta, por sua vez, decorre diretamente da definição (2.58) e da equação (2.56), mediante o uso da equação (2.54), para eliminar $\delta\varphi^{(g)}$.

A função de correlação de dois pontos, relaciona-se diretamente com o espectro de potência $\Delta_e^2(k)$:

$$\langle 0 | \hat{\Phi}(\tau, \mathbf{x}) \hat{\Phi}(\tau, \mathbf{x} + r) | 0 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\sin kr}{kr} \Delta_e^2(k, \tau).$$

Usando a expansão (2.60) e as relações de comutação canônicas, resulta:

$$\Delta_e^2(k, \tau) = \left(\frac{\varphi'}{2\pi a} \right)^2 |u_k(\tau)|^2 k^3, \quad (2.63)$$

onde $\Delta_e^2(k, \tau)$ caracteriza a amplitude da perturbação em uma escala comóvel k .

Deste modo, o problema da geração e evolução de perturbações cosmológicas fica completamente estabelecido. A dinâmica evolutiva clássica apresentada na seção 2.6.1 é complementada pela determinação do espectro inicial de perturbações – i.e. do espectro gerado na fase inflacionária do Universo – que está bem definido no contexto da teoria quântica aqui apresentada.

2.6.2.2 Perturbações tensoriais

O formalismo apresentado é facilmente aplicado a perturbações tensoriais, caso em que a ação de segunda ordem (2.57) fica (MALDACENA, 2003):

$$S_{(\text{ordem } 2)} = \frac{1}{64\pi G} \int d^4x \sqrt{g^{(B)}} \left[-g^{(B)\mu\nu} h_{ij,\mu} h_{ij,\nu} + \frac{1}{2} \Pi_{ij} h_{ij} \right], \quad (2.64)$$

onde o tensor de *stress* anisotrópico, $\Pi_{ij} = T_{ij} - p\delta_{ij}$, está sujeito aos vínculos $\Pi_{ii} = \Pi_{ij,i} = 0$ e age como termo fonte. O resultado da variação de (2.64) é a equação de movimento (2.52) acrescida dessa fonte:

$$h''_{ij} + 2\frac{a'}{a}h'_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 16\pi G a^2 \Pi_{ij}, \quad (2.65)$$

ou ainda, em função do tempo cósmico (WEINBERG, 1972),

$$\ddot{\mathbf{h}}_{ij} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathbf{h}}_{ij} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\mathbf{h}_{ij} - \frac{1}{a^2}\nabla^2 \mathbf{h}_{ij} = 16\pi G \Pi_{ij}. \quad (2.66)$$

Sabendo que \mathbf{h}_{ij} deve ser um tensor transverso e de traço nulo (i.e, obedece aos vínculos $\mathbf{h}_{00} = \mathbf{h}_{0i} = 0$, $\mathbf{h}_{ii} = \mathbf{h}_{ki,k} = 0$) e sabendo ainda que o mesmo possui duas polarizações (\times e $+$), é possível fazer a decomposição

$$\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda} \mathbf{h}_{ij}^{(\lambda)}, \quad \lambda = +, \times \quad (2.67)$$

e escrever a transformada de Fourier de \mathbf{h}_{ij} como

$$\mathbf{h}_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{16\pi G} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\mathbf{h}}^{(\lambda)}(\mathbf{k}, t) e_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\}, \quad (2.68)$$

onde a base $\{e_{ij}^{(\times)}, e_{ij}^{(+)}\}$ é dada por

$$e_{ij}^{(\times)} = \hat{e}_x \otimes \hat{e}_y + \hat{e}_y \otimes \hat{e}_x, \quad e_{ij}^{(+)} = \hat{e}_x \otimes \hat{e}_x + \hat{e}_y \otimes \hat{e}_y, \quad (2.69)$$

tem caráter simétrico $[e_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = e_{ji}^{(\lambda)}(\mathbf{k})]$ e transverso $[k^i e_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0]$, possui traço nulo

$[e_{ii}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0]$ e está sujeita à normalização

$$e_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k})e^{(\lambda')\ ij\ *}(\mathbf{k}) = 2\delta_{\lambda\lambda'}, \quad e_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = e_{ij}^{(\lambda)*}(-\mathbf{k}). \quad (2.70)$$

Deste modo a equação (2.68) fica

$$h_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{16\pi G} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{h}^{(\lambda)}(\mathbf{k}, t) Q_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (2.71)$$

$$Q_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \equiv e_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\}, \quad (2.72)$$

ou seja, $Q_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ é uma auto-função do operador laplaciano:

$$(\nabla^2 + k^2)Q_{ij}^{(\lambda)}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = 0. \quad (2.73)$$

A transformada de Fourier de (2.66), sem o termo fonte, resulta em

$$\ddot{\mathbf{h}} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathbf{h}} + \left(\frac{k^2}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a}\right)\mathbf{h} = 0, \quad (2.74)$$

onde foi empregada a notação

$$\mathbf{h} \equiv \tilde{\mathbf{h}}^{(\lambda)}(k, t). \quad (2.75)$$

O cálculo análogo, no tempo conforme, leva à equação

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2h = 0 \quad (2.76)$$

e, tomando $\mu \equiv h a$, o resultado é um oscilador excitado por um potencial efetivo a''/a :

$$\mu'' + \left(k^2 + \frac{a''}{a}\right)\mu = 0. \quad (2.77)$$

As equações (2.74), (2.76) e (2.77) são equivalentes e, substituindo, a segunda em (2.64), a expressão resultante é a ação

$$S_{(\text{ordem } 2)} = \sum_{\lambda} \int \frac{a^2}{2} \left[h^{(\lambda)'} h^{(\lambda)*'} - k^2 h^{(\lambda)} h^{(\lambda)*} \right] d\tau d\mathbf{k}, \quad (2.78)$$

prontamente quantizável.

O momento conjugado neste caso será $\pi^{(\lambda)} = a^2 h^{(\lambda)*'}$, os operadores correspondentes serão $\hat{h}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$ e $\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$, que satisfazem a relações de comutação análogas a (2.59):

$$\left[\hat{h}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \hat{h}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')} \right] = \left[\hat{\pi}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')} \right] = 0, \quad \left[\hat{h}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}, \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}^{(\lambda')} \right] = i\delta^{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (2.79)$$

Como $\hat{h}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$ é hermitiano, sua decomposição em termos dos operadores criação e destruição

fica

$$\hat{h}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}(\tau) = h(k, \tau)[\hat{a}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}]^{(+)} + h^*(k, \tau)[\hat{a}_{-\mathbf{k}}^{(\lambda)}]^{(-)}, \quad (2.80)$$

mediante as relações de comutação (2.79). A equação de movimento que rege a evolução de $h(k, \tau)$ é a (2.76).

O espectro de potência de perturbações tensoriais, $\Delta_t^2(k, \tau)$, é calculado usando o formalismo acima:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{h}_{ij}(\tau, \mathbf{x}) \hat{h}^{ij}(\tau, \mathbf{x}) | 0 \rangle &= \sum_{\lambda} \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{16\pi G \hbar}{c^3} \int 2|h^{(\lambda)}|^2 d\mathbf{k} \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{16\pi G \hbar}{c^3} \int 4|h|^2 4\pi k^3 \frac{dk}{k} \\ &= \int \frac{16\pi G \hbar}{c^3} \frac{k^3}{2\pi^2} |h|^2 d \ln k, \end{aligned} \quad (2.81)$$

onde, na última passagem o volume do sistema foi feito igual a um. O espectro de potência é, portanto,

$$\Delta_t^2(k, \tau) \equiv \frac{d\langle 0 | \hat{h}_{ij} \hat{h}^{ij} | 0 \rangle}{d \ln k} = 64\pi G \frac{k^3}{2\pi^2} |h|^2. \quad (2.82)$$

Nas passagens (2.81) acima, a velocidade da luz e a constante de Planck foram explicitadas, mas na equação (2.82) que caracteriza o espectro de potências, o sistema natural de unidades foi retomado.

Comparando (2.63) e (2.82) nota-se que o espectro de potência tensorial e escalar são iguais, a menos de uma constante numérica. Isso corrobora a idéia de que h_{ij} pode ser interpretado como a perturbação de um campo minimamente acoplado sobre uma métrica FRW de fundo. Dessa interpretação é razoável esperar que o escalar h tenha o mesmo espectro de potência de um campo escalar (proporcional a k^3 vezes o quadrado do módulo da perturbação).

3 O espectro teórico de perturbações tensoriais

O formalismo descrito no Capítulo 2 estabelece que as ondas gravitacionais correspondem a perturbações tensoriais de primeira ordem das equações de Einstein. A evolução temporal de tais perturbações, no espaço de Fourier, é regida pela equação (2.74) ou (2.76) – ambas obtidas na seção 2.6.2 – e depende exclusivamente do fator de escala e suas derivadas primeira e segunda. Tendo em vista os modelos de Friedmann, sustentados pelo tripé de equações (2.27, 2.28 e 2.29), é fácil ver que um mesmo espectro inicial de perturbações tensoriais terá diferentes histórias evolutivas dependendo da equação de estado dos constituintes dominantes do Universo. Ou seja, distintas cosmologias levarão a espectros finais também distintos, onde entende-se por “final” o instante particular em que a medida será realizada. Neste sentido, é pertinente introduzir as propriedades dos modelos cosmológicos a serem investigados.

A base comum dos modelos corresponde ao modelo “padrão” do Big Bang inflacionário, segundo o qual, (1) nos instantes iniciais, o Universo passa por um período de inflação de Sitter¹, quando as perturbações são originadas; em seguida, (2) o campo escalar inflacionário decai rapidamente e o Universo passa a ser dominado pela radiação, cuja equação de estado é $p_r = 1/3\rho_r$; à medida que o Universo se expande, a densidade de energia cai rapidamente e, por volta de $z \sim 1000$ (3) tem início a era da matéria, dominada por um fluido não-relativístico de pressão nula; esta fase persiste até $z \sim 1$, quando (4) a expansão torna-se acelerada e o fluido dominante passa a ser a energia escura.

As especificidades de cada modelo estão contidas na fase recente. Em virtude das evidências observacionais, anteriormente mencionadas, de que a expansão do Universo recente é acelerada e em virtude ainda da dificuldade em explicar essa aceleração como

¹O modelo de inflação de Sitter é apenas um dentre vários e os espectros iniciais podem diferir de um modelo para outro, mas até o presente momento nenhuma das alternativas está bem estabelecida e tampouco há observações capazes de favorecer ou excluir qualquer uma delas. Além disso, o enfoque deste trabalho está na evolução de um dado espectro inicial, mais especificamente no que tange a eras recentes, por isso não foram explorados modelos alternativos.

um efeito da energia do vácuo (o problema da constante cosmológica), vários modelos alternativos foram propostos. Uma extensa revisão sobre as diversas propostas foi recentemente feita por Copeland et al. (2006); aqui, é suficiente caracterizar em linhas gerais essas principais classes de modelos.

Os modelos de (1) *quintessência* (WETTERICH, 1988; RATRA; PEEBLES, 1988; CARROLL, 1998) são aqueles em que um campo escalar, semelhante ao que foi discutido para o inflaton, cuja evolução é determinada por um potencial, é invocado. O parâmetro ω , nesses modelos, varia lentamente com o redshift e pode ser parametrizado por meio de uma expansão do tipo $\omega = \omega_0 + \omega_1 z + \omega_2 z^2 + \dots$ (há também outras parametrizações possíveis, cf., por exemplo, Guo et al. (2005)). Outra classe de modelos em que também se utiliza campos escalares é conhecida como (2) *K-essência* (CHIBA et al., 2000; ARMENDÁRIZ-PICÓN et al., 2000, 2001), mas nesse caso, considera-se um termo cinético não-canônico na lagrangeana. Da terceira classe, chamada (3) *quartessência*, fazem parte os modelos que unificam matéria e energia escura sob uma única equação de estado que interpola os comportamentos dessas duas componentes (KAMENSHCHIK et al., 2001; BENTO et al., 2002). Além desses há modelos em que uma ação mais geral que a tradicional ação Einstein-Hilbert (eq. 2.14) é considerada: são modelos de (4) *gravitação modificada*, onde efeitos de grandes escalas de comprimento, isto é, que atuam em escalas pequenas de energia, são introduzidos para alterar a evolução do Universo recente (CAPOZZIELLO et al., 2003; CARROLL et al., 2004; NOJIRI; ODINTSOV, 2006). Nessa classe de modelos é possível introduzir também – ainda que mediante um certo abuso de linguagem – as propostas de (ELLIS; SOTOEGER, 1987) de que o efeito das não-linearidades, desprezadas no contexto da teoria de perturbações cosmológicas, podem levar a uma expansão acelerada sem introduzir a necessidade de um fluido extra.

Estas quatro categorias definitivamente não esgotam o tema. A criatividade dos teóricos é extremamente prolífica e, além dessas classes há alternativas como: táquiões (PADMANABHAN; CHOUDHURY, 2002) e outros efeitos das teorias de cordas (DVALI et al., 2000); defeitos topológicos (BATTYE et al., 1999); teorias de universo cíclico (STEINHARDT; TUROK, 2002); e argumentos antrópicos (WEINBERG, 1989; GARRIGA; VILENKIN, 2000). Entretanto, estender-se sobre todos essas alternativas foge ao escopo do presente trabalho. Ao leitor interessado recomenda-se fortemente as revisões de Copeland et al. (2006), Padmanabhan (2003, 2005) e Carroll (2001),

Como o presente trabalho tenciona também investigar possíveis assinaturas da energia escura no espectro de ondas gravitacionais, alguns dos modelos mais importantes foram

selecionados para uma análise comparativa, a saber: a constante cosmológica – o modelo paradigmático, com equação de estado $p = -\rho$, que parte de tentativas de associar a energia do vácuo e a energia escura; o fluido-X – uma generalização sobre equação de estado da constante cosmológica para $p = \omega\rho$, $\omega < 0$, que é conhecida como fluido fantômico (CALDWELL, 2002) quando $\omega < -1$ e, em última instância, é um modelo de quintessência com apenas o termo de ordem zero da série; uma parametrização de quintessência até a primeira ordem: $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 z$; o gás de Chaplygin generalizado – representante mais estudado da classe (3) de modelos apresentada acima, cuja equação de estado é $p = -A/\rho^\alpha = -\bar{A}\rho_0(\rho_0/\rho)^\alpha$, onde \bar{A} , $\alpha \in [0, 1]$ e que se comporta como poeira em altos z e como constante cosmológica em eras recentes.

Usando o tripé de equações básicas apresentado em 2.4.2 em conjunto com as respectivas equações de estado, é imediato obter a evolução da densidade de energia, $\rho(x)$, e da pressão, $p(x)$, onde $x = 1 + z = 1/a$. Essa álgebra relativamente simples, que envolve uma integração sobre (2.27, 2.28 e 2.29), resulta em

$$\rho(x) = \sum_i \rho_{i_0} \Psi_i(x), \quad p(x) = \sum_i \rho_{i_0} \Phi_i(x), \quad (3.1)$$

onde o somatório terá três termos: radiação (r), matéria (m) e energia escura (ee), esta última corresponderá a um dos modelos apresentados acima. A parametrização da equação de estado em termos das funções $\Phi_i(x)$ e $\Psi_i(x)$ é conveniente para simplificar a notação. Tais funções têm a forma²:

$$\begin{aligned} \Psi_r(x) &= x^4, & \Phi_r(x) &= x^4/3, \\ \Psi_m(x) &= x^3, & \Phi_m(x) &= 0, \\ \Psi_\Lambda(x) &= 1, & \Phi_\Lambda(x) &= -1, \\ \Psi_X(x) &= x^{3(\omega+1)}, & \Phi_X(x) &= \omega x^{3(\omega+1)}, \\ \Psi_{gCg}(x) &= [\bar{A} + (1 - \bar{A})x^{3(\alpha+1)}]^{-\frac{1}{\alpha+1}}, & \Phi_{gCg}(x) &= -\bar{A} [\Psi_{gCg}(x)]^{-\alpha}, \\ \Psi_q(x) &= \exp[3\omega_1(x-1)] x^{3(1+\omega_0-\omega_1)}, & \Phi_q(x) &= [\omega_0 + \omega_1(x-1)] \Psi_q(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Na Figura 3 estão representadas as densidades de energia (normalizadas sobre a densidade crítica atual, ρ_{c0}) para um conjunto de parâmetros em razoável concordância com os fracos limites observacionais disponíveis. Vê-se claramente que a energia escura domina somente em eras recentes e que os modelos em questão apresentam comportamentos muito semelhantes na região de baixos redshifts. Outro aspecto de especial importância é

²Nas definições de $\Phi_i(x)$ e $\Psi_i(x)$, os sub-índices referem-se a cada uma das equações de estado: radiação (r), matéria (m), constante cosmológica (Λ), fluido-X (X), gás de Chaplygin (gCg) e quintessência (q). Esta convenção é usada ao longo de todo o trabalho.

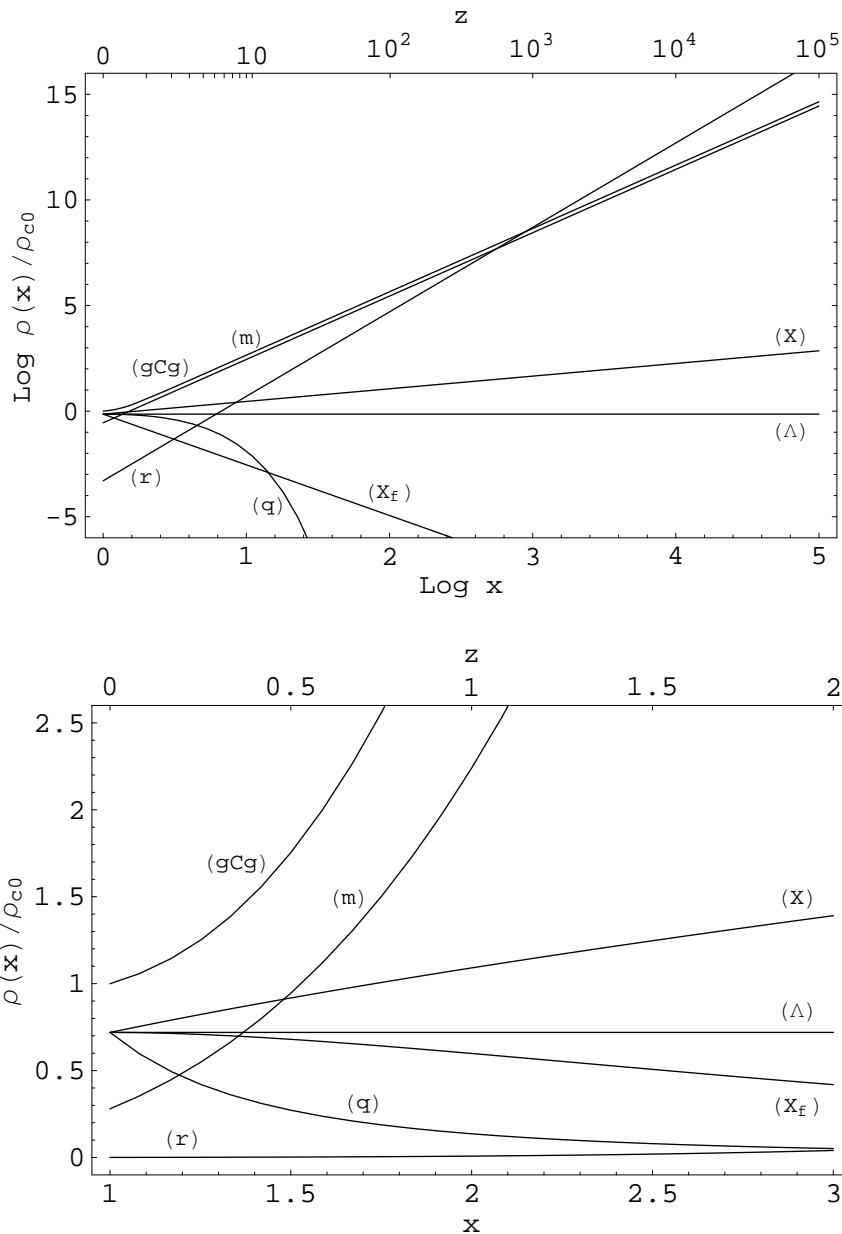


Figura 3: Comportamento da densidade de energia obtida para as equações de estado de interesse, em uma extensa faixa de redshifts (painel superior) e para baixos redshifts (painel inferior). As curvas (r) e (m) correspondem aos fluidos relativístico e não-relativístico, respectivamente, e as demais referem-se aos modelos de energia escura, a saber: (Λ) constante cosmológica; (gCg) gás de Chaplygin ($\bar{A} = 0,8$, $\alpha = 1$); (X_f) fluido-X fantômico ($\omega = -1,8$); (X) fluido-X ($\omega = -0,8$); (q) quintessência ($\omega_0 = -1$, $\omega_1 = -0,2$). O parâmetro de densidade atual de cada componente é $\Omega_{r_0} = 5 \times 10^{-4}$, $\Omega_{m_0} = 0,28$ e $\Omega_{ee_0} = 1 - \Omega_{r_0} - \Omega_{m_0}$, exceto para o gás de Chaplygin que atua como matéria e energia escura unificadas e, portanto, tem o parâmetro de densidade dado por $\Omega_{gCg_0} = 1 - \Omega_{r_0}$.

o fato de que os modelos de energia escura com equação de estado dinâmica tendem para a constante cosmológica em eras recentes. Particularmente, a quintessência representa um fluido cuja equação de estado é de lenta variação e que, na ordem zero, se reduz ao fluido-X; este, por sua vez, se reduz à constante cosmológica quando $\omega \rightarrow -1$. O gás

de Chaplygin, por outro lado, interpola as equações de estado da matéria e constante cosmológica, onde os parâmetros \bar{A} e α determinam o peso desses dois componentes, de modo que o gás de Chaplygin comporta-se exclusivamente como poeira se $\bar{A} = 0$ e como constante cosmológica se $\bar{A} = 1, \forall \alpha$; além disso, para $\alpha = 1$, a transição entre os dois extremos é linear, isto é, se $\alpha = 1$, então \bar{A} representa exatamente a fração de constante cosmológica na mistura.

O espaço de parâmetros dos modelos de energia escura é restrito principalmente pelas observações (brevemente discutidas na seção 2.5) de supernovas e RCF, que indicam um crescimento da taxa de expansão do Universo recente. O modelo de concordância cósmica, que melhor se ajusta aos dados mais recentes, é o Λ CDM, caracterizado por $\Omega_{\Lambda_0} \approx 0,72$ e $\Omega_{m_0} \approx 0,28$ e por isso estes são os parâmetros de densidade adotados (exceto para o gCg , que unifica os dois fluidos). Quanto aos parâmetros específicos de cada modelo, estes são escolhidos dentro dos limites estabelecidos por diversos autores (cf. Copeland et al. (2006), onde uma extensa revisão é feita sobre esse tema) de modo que o comportamento global seja semelhante ao do modelo Λ CDM. Os parâmetros utilizados são apresentados na Figura 3.

De posse de (3.2), as equações de Friedmann (2.27) e Raychaudhuri (2.28) ficam,

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sum_{i=r,m,ee} \Omega_{i_0} \Psi_i(x), \quad (3.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{H_0^2}{2} \sum_{i=r,m,ee} \Omega_{i_0} [\Psi_i(x) + 3\Phi_i(x)]. \quad (3.4)$$

Assim, a dinâmica do Universo, desde a era da radiação até os dias de hoje, pode ser computada. Conforme se vê na Figura 3, no Universo primordial, o termo dominante é a radiação, mas à medida que o redshift diminui, a matéria não-relativística torna-se cada vez mais importante e apenas recentemente é que a energia escura passa a dominar. Todo este processo está imbutido nas equações acima, sem a necessidade de truncar a equação de estado em redshifts particulares entre uma era e outra.

Para verificar a importância desta última consideração, é interessante analisar a equação de estado efetiva do Universo, definida como $p \equiv \omega_{\text{ef}}(x)\rho$, onde ω_{ef} é a média dos parâmetros ω_i de cada componente, ponderada sobre suas respectivas densidades de energia:

$$\omega_{\text{ef}}(x) = \frac{1}{\rho_c(x)} \sum_i \rho_i(x) \omega_i = \frac{\sum_i \omega_i \Omega_{i_0} \Psi_i(x)}{\sum_i \Omega_{i_0} \Psi_i(x)}. \quad (3.5)$$

A evolução temporal de $\omega_{\text{ef}}(x)$ é mostrada na Figura 4, para o mesmo conjunto de modelos

da Figura 3. No painel superior, observa-se claramente uma transição de fase entre as eras de domínio da radiação e da poeira, mas quanto à era dominada pela energia escura, não é possível afirmar categoricamente se a variação observada em ω_{ef} implica em uma transição de fase, mas se este for o caso, então trata-se de uma transição ainda em andamento. Isso significa que o tratamento mais adequado para o problema da evolução de ondas

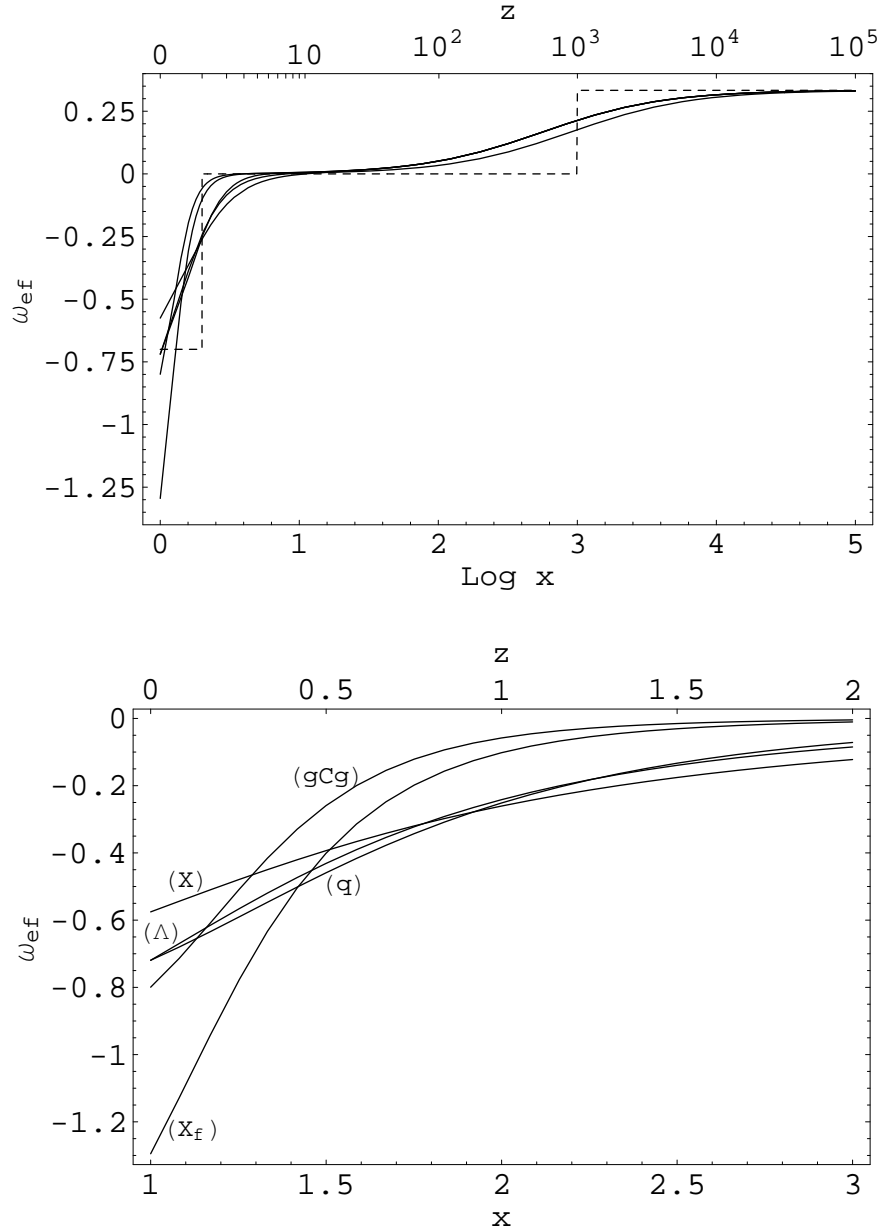


Figura 4: Equação de estado efetiva do Universo em diferentes cosmologias, todas caracterizadas por três fluidos: radiação, matéria e energia escura. O painel superior mostra claramente a transição entre as eras da radiação e da matéria e esboça o comportamento geral dos diversos modelos de energia escura no Universo recente. A linha tracejada mostra um modelo em que as transições de fase são instantâneas. Já o painel inferior mostra em detalhe a equação de estado efetiva do Universo recente, considerando os diferentes modelos de energia escura (vide legenda da Figura 3).

gravitacionais cósmicas consiste em integrar as equações de Friedmann e Raychaudhuri

considerando todas as suas componentes. Escritas na forma (3.3 e 3.4), tais equações podem ser prontamente utilizadas para obter a amplitude das ondas gravitacionais como função dos parâmetros observacionais H_0 , x , Ω_{r_0} , Ω_{m_0} e Ω_{ee_0} , bem como dos parâmetros dos modelos: ω ; \bar{A} e α ; ou ω_0 e ω_1 . No entanto, a apresentação desse procedimento e de suas conseqüências é postergada para a seção 3.2, a fim de que duas soluções aproximadas, obtidas por outros autores, sejam discutidas.

3.1 Duas soluções analíticas aproximadas

A interpretação da equação (2.77), que rege a evolução das perturbações tensoriais h , como um oscilador harmônico excitado deve-se a Grishchuk (1975), que obteve suas soluções no regime assintótico e deduziu o chamado mecanismo de *amplificação super-adiabática de ondas gravitacionais*, que está resumidamente expresso nas linhas a seguir.

Quando $k^2 \gg |a''/a|$, (2.77) torna-se uma equação de onda ordinária e a amplitude h das ondas gravitacionais cai com a^{-1} ; por outro lado, quando $k^2 \ll |a''/a|$, as soluções são do tipo

$$\mu_1 \propto a(\tau), \quad \mu_2 \propto a(\tau) \int a^{-2}(\tau) d\tau, \quad (3.6)$$

sendo μ_1 a solução dominante (no caso de um universo em expansão), o que leva a uma amplitude constante. Em outras palavras, quando um dado modo k (que inicialmente tinha um comportamento adiabático, caracterizado por $h \propto a^{-1}$) passa sob a barreira de potencial, sua amplitude h permanece constante, mas quando esse modo atravessa a barreira e volta a satisfazer a condição $k^2 \gg |a''/a|$, então, sua amplitude será maior do que a que ele teria se tivesse mantido o comportamento ($\propto a^{-1}$) em todos os instantes. É a chamada *amplificação super-adiabática* ou *paramétrica*.

Explicitamente, a solução para $h(k, \tau)$ é a seguinte:

$$h(k, \tau) = \exp(-ik\tau) \left[a(\tau) \sqrt{2k} \right]^{-1}, \quad k^2 \gg |a''/a| \Leftrightarrow \tau \gg \tau_k \quad (3.7)$$

$$h(k, \tau) = A_k, \quad k^2 \ll |a''/a| \Leftrightarrow \tau \ll \tau_k \quad (3.8)$$

onde A_k é uma constante representando a amplitude da oscilação e τ_k é o instante inicial, quando o modo k entra no horizonte (i.e., obedece à relação $k^2 = |a''/a|$). Estes dois regimes assintóticos estão separados por um período intermediário, quando $k \sim |a''/a|$, mas a abordagem super-adiabática ignora esse período, sendo por isso conhecida por aproximação de horizonte fino³. Na prática, isso implica em substituir os símbolos “ \ll ” e

³Esta aproximação é razoável durante a fase inflacionária, quando $H' \rightarrow 0$, mas não se pode dizer o

“ \gg ” por “ $<$ ” e “ $>$ ” nas equações (3.7 e 3.8) acima, conectando-as mediante a condição $A_k = \left[a(\tau_k) \sqrt{2k} \right]^{-1} \exp(-ik\tau_k)$.

O cálculo de ondas gravitacionais cósmicas, usando a aproximação de horizonte fino é bem simples – pois basta computar o fator de escala, integrando as equações (2.27, 2.28 e 2.29) – e torna-se ainda mais simples se for feita a hipótese de fases sucessivas, cada uma com equação de estado $p \propto \rho$ constante, para o Universo. Grishchuk (2001, 2003) realizou este cálculo considerando apenas as fases de radiação e matéria e Zhang et al. (2005) o estenderam para considerar uma fase de Sitter posterior.

Um tratamento completo, para um número arbitrário de fases sucessivas (todas com o fator de escala obedecendo a uma lei de potência e considerando transições instantâneas de uma fase para a outra) foi desenvolvido por Maia (1993), que obteve soluções formais através das transformações de Bogolubov, a saber (BOYLE; STEINHARDT, 2005):

$$h(k, \tau) = h(k, \tau_i) \Gamma(m + 1/2) [k\tau/2]^{1/2-m} J_{m-1/2}(k\tau), \quad m = \frac{2}{1 + 3\omega} \quad (3.9)$$

onde $k\tau_i \ll 1$ e $h'(k, \tau_i) = 0$ foram considerados (assumindo que, no instante inicial, os modos relevantes estavam muito longe de entrar no horizonte e, portanto, tinham amplitude constante); $\Gamma(m + 1/2)$ e $J_{m-1/2}(k\tau)$ são as funções Gama e de Bessel (do primeiro tipo). A solução acima é válida apenas quando a equação de estado é $p = \omega\rho$ e não contempla o caso de equações de estado exóticas como a do gás de Chaplygin. Recentemente, Zhang et al. (2006) utilizaram este formalismo para recalculer o espectro de ondas gravitacionais considerando a fase de expansão acelerada.

Desde os anos 70 até o presente, os cálculos tornaram-se mais precisos que a aproximação de horizonte fino, no entanto, a evolução do Universo sempre foi considerada como uma série de estágios sucessivos, com uma equação de estado efetiva na forma de degrau (vide Figura 4, painel superior). No caso da transição radiação-matéria, essa aproximação parece razoável à primeira vista, mas o mesmo não ocorre na “transição” matéria-energia escura. O método semi-analítico apresentado na seção subsequente, além de dispensar a aproximação super-adiabática, é capaz de computar essa variação suave de ω_{ef} , uma vez que a equação (2.74) é solucionada diretamente, injetando as equações que regem a evolução temporal do fator de escala (3.3 e 3.4) sem fixar transições instantâneas de uma fase para outra. O resultado obtido, ao ser confrontado com estes já publicados, fornece uma medida de quão precisas são essas duas aproximações.

mesmo para o caso geral.

3.2 Método semi-analítico para uma abordagem mais geral

O primeiro passo para a aplicação do método semi-analítico de solução do problema é a manipulação algébrica da equação de movimento das perturbações tensoriais, visando incorporar as peculiaridades dos modelos a serem estudados. Para tanto, é conveniente tomar a forma (2.74),

$$\ddot{\mathbf{h}} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{\mathbf{h}} + \left(\frac{k^2}{a^2} - 2\frac{\ddot{a}}{a} \right) \mathbf{h} = 0$$

e encontrar \mathbf{h} em função de x , usando a conhecida relação $x = 1 + z = \frac{a_0}{a}$, $a_0 = 1$ e duas mudanças de variáveis: primeiro de t para a e de a para x , esta última, após substituir as equações referentes aos modelos. Disso resulta:

$$\ddot{\mathbf{h}} + \left(\frac{2}{x} + \frac{3x^2 A}{2B} \right) \dot{\mathbf{h}} + \left(\frac{k^2}{B} - \frac{2}{x^2} + 3x \frac{A}{B} \right) \mathbf{h} = 0, \quad (3.10)$$

$$A = \sum_{i=m,r,ee} x^{-3} [\Psi_i(x) + \Phi_i(x)] \Omega_{i_0}, \quad (3.11)$$

$$B = \sum_{i=m,r,ee} \Psi_i(x) \Omega_{i_0}, \quad (3.12)$$

onde k é o número de onda (adimensional) redefinido para absorver a constante de Hubble, i.e., $k = k/H_0$.

Devido ao caráter não-harmônico de (3.10), não é possível aplicar métodos de integração padrão como o Runge-Kutta⁴, pois, à medida que cresce o número de onda k , o tempo necessário para convergir a um resultado razoavelmente preciso cresce rapidamente, tornando o método inviável⁵. A alternativa encontrada para contornar esse problema – sem lançar mão das aproximações discutidas anteriormente – fica explícita se (3.10) for melhor trabalhada algebricamente. Introduzindo a nova variável $F = \mathbf{h}x^2$, é possível reescrevê-la na forma

$$\ddot{F} + \left(\frac{3x^2 A}{2B} - \frac{2}{x} \right) \dot{F} + \frac{k^2}{B} F = 0; \quad (3.13)$$

⁴Em termos gerais, o método de Runge-Kutta consiste em tomar a expansão em série de Taylor da função que se pretende obter, $f(x) = f(x_0) + \epsilon f'(x) + \epsilon^2 f''(x_2) + \dots$, truncando em uma determinada ordem (quando a expansão é truncada na primeira ordem, o método é conhecido como método de Euler; mas utiliza-se mais freqüentemente a expansão até a ordem 4). Aproximando os intervalos infinitesimais por intervalos finitos, a solução é expressa em termos de uma relação de recorrência. Cf. RUGGIERO; LOPES, 1997.

⁵De fato, essa abordagem foi empregada em trabalhos anteriores (FABRIS et al., 2004), precursores deste. A principal limitação decorrente do método utilizado foi a impossibilidade de obter o espectro completo. Somente a região de baixas freqüências, de $\nu = 10^{-18}$ até 10^{-15} Hz, foi analisada naquela ocasião.

em seguida, tomando

$$F = \mathbf{h}x^2 = \mu \exp \left[\int \left(\frac{1}{x} - \frac{3x^2 A}{4B} \right) dz \right] \quad (3.14)$$

como definição de μ , resulta:

$$\ddot{\mu} + \left(\frac{\mathbf{k}^2}{\mathcal{B}} + \mathcal{A} \right) \mu = 0, \quad (3.15)$$

onde

$$\mathcal{A} \equiv \frac{2}{x^2} + f^2 x^4 + \dot{f} x^2, \quad \mathcal{B} \equiv B, \quad f \equiv A/B. \quad (3.16)$$

Deste modo, resolver a equação (3.10) é em tudo equivalente a integrar (3.15) empregando a definição (3.16) e, por fim, retomar (3.14) para recuperar a solução para \mathbf{h} .

Formalmente as equações (3.15) e (2.77) são semelhantes e à primeira vista não há vantagem alguma desta nova formulação frente àquela apresentada anteriormente, pois que ainda resta um oscilador não-harmônico a resolver. Não obstante esse fato, uma segunda análise da equação acima mostra uma clara possibilidade de solucionar o problema para qualquer valor de \mathbf{k} . Para uma equação de estado efetiva $p = \omega_{\text{ef}} \rho$, o termo $\mathbf{k}/\mathcal{B} + \mathcal{A}$ fica

$$\mathbf{k}/\mathcal{B} + \mathcal{A} = \mathbf{k}^2 x^{3n+3} + (n+2)(n+3)x^{-2}, \quad n = -\omega_{\text{ef}} - 2. \quad (3.17)$$

Se n não varia com x , então a solução de (3.15) assume uma forma analítica análoga à (3.9):

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \left(\frac{\mathbf{k}}{5+3n} \right)^{\frac{1}{5+3n}} x^2 \left[c_1 \Gamma(1-l) J_{-l} \left(\frac{2\mathbf{k}x^{\frac{5+3n}{2}}}{5+3n} \right) + c_2 \Gamma(1+l) J_l \left(\frac{2\mathbf{k}x^{\frac{5+3n}{2}}}{5+3n} \right) \right], \\ l &= i \frac{\sqrt{23+20n+4n^2}}{5+3n}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A aproximação $\omega_{\text{ef}} = \text{constante}$ é válida para intervalos de x suficientemente pequenos e através de um processo de retroalimentação, é possível considerar as variações de ω_{ef} . Esse processo consiste em estabelecer um conjunto de soluções tal que cada elemento $\mu_i(x)$ corresponde a um intervalo Δx . As soluções são todas idênticas, exceto pelas constantes $(c_1, c_2)_i$, de modo que haverá um conjunto de constantes associado elemento a elemento com o conjunto de soluções. Tomando o espectro inicial calculado a partir do modelo inflacionário em questão, calculam-se as constantes $(c_1, c_2)_0$ de $\mu_0(x)$, que começam a valer no instante $x_0 = x_{\mathbf{k}}$ em que o modo \mathbf{k} atravessa o horizonte pela primeira vez. As constantes posteriores são dadas por uma relação de recorrência que pode ser esquematizada

na forma:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i(x_i) &= \mu_{i-1}(x_i) \\ \mu'_i(x_i) &= \mu'_{i-1}(x_i) \\ x_i &= x_{i-1} + \Delta x \end{aligned} \right\} \Rightarrow (c_1, c_2)_i. \quad (3.19)$$

A precisão do método está diretamente relacionada ao tamanho do intervalo Δx , que pode ser feito tão pequeno quanto necessário.

3.2.1 Condições iniciais

As condições iniciais necessárias para obter o primeiro par de constantes $(c_1, c_2)_0$ são definidas na era da inflação, quando a aproximação super-adiabática é aplicável. Durante a fase slow-roll, tem-se que $\dot{H} \approx 0$ e particularmente no caso exato de uma fase de Sitter, tem-se $\dot{H} = 0$. Isso significa que os regimes assintóticos $k^2 \ll |a''/a|$ e $k^2 \gg |a''/a|$ são equivalentes a $k \ll aH$ e $k \gg aH$, respectivamente.

Supondo que as perturbações começam todas dentro do horizonte, ou seja, com comprimento de onda físico menor que o raio de Hubble ($k > aH$), é possível tomar a solução (3.7), $h_k(\tau) = [a(\tau)\sqrt{2k}]^{-1}$, para $\tau > \tau_k$, desprezando-se a parte oscilatória. τ_k é o instante em que o modo k atravessa o horizonte⁶ ($k = a(\tau_k)H$). É interessante fixar o “instante inicial” no momento da transição, τ_k , de cada modo. Assim, a condição inicial será

$$h_k(\tau_k) = \frac{1}{a(\tau_k)\sqrt{2k}} = \frac{H}{\sqrt{2}k^{3/2}}, \quad k = a(\tau_k)H, \quad (3.20)$$

onde $a(\tau)$ e conseqüentemente $H \equiv \dot{a}/a$ dependem do modelo inflacionário adotado.

Conforme a discussão feita no Capítulo 2, no regime slow-roll, H é proporcional ao potencial quase constante do campo escalar e, no caso particular do modelo de Sitter, quando o potencial é exatamente constante, tem-se⁷

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2}V(\varphi) = \frac{8\pi}{3}Mm_{Pl}^2, \quad M \equiv \frac{V(\varphi)}{m_{Pl}^4} \quad (3.21)$$

onde M é uma medida da escala de energia da inflação⁸. Isso conduz imediatamente ao

⁶A rigor, o correto seria tomar essa solução como um regime assintótico válido somente para comprimentos de onda *muito* menores que $1/H$, mas a aproximação super-adiabática implica em considerar o horizonte infinitamente fino e permite essa aparente imprecisão.

⁷No sistema natural de unidades, $G \equiv m_{Pl}^{-2}$.

⁸A escala de energia E_φ da inflação é o único parâmetro livre do modelo de Sitter, no qual $V(\varphi) = E_\varphi^4$. A relação de M com E_φ , em unidades de massa de Planck, é dada por $E_\varphi = M^{1/4}m_{Pl}$. O parâmetro M é preferível como medida da escala de energia por ser um número adimensional.

resultado

$$h_k(\tau_k) = \sqrt{\frac{4\pi M}{3}} m_{Pl} k^{-3/2} \quad (3.22)$$

que também pode ser expresso na forma

$$h_k(x_k) = \sqrt{\frac{4\pi M}{3}} m_{Pl} k^{-3/2} x_k^{-2}. \quad (3.23)$$

A segunda condição inicial é simplesmente

$$h'_k(\tau_k) = 0, \quad h'_k(x_k) = -\sqrt{\frac{16\pi M}{3}} m_{Pl} k^{-3/2} x_k^{-3}. \quad (3.24)$$

Para concluir a determinação das condições iniciais, é preciso estabelecer ainda uma expressão para x_k , pois cada modo k atravessa o horizonte em um redshift diferente. Para tanto, basta empregar a condição $k = a(x_k)H/H_0$, que implica em

$$x_k = \sqrt{\frac{8\pi M}{3}} m_{Pl} (H_0 k)^{-1}. \quad (3.25)$$

O sistema de condições iniciais composto por (3.23, 3.24 e 3.25) é suficiente para solucionar o problema. No restante deste capítulo, cabe analisar os espectros resultantes.

3.3 Três definições equivalentes para o espectro de potências

O espectro de potências, definido por (2.82), é calculado diretamente das soluções h_k de (2.74):

$$\Delta_t^2(\mathbf{k}, x) = \frac{64\pi G}{2\pi^2} (H_0 k)^3 x_k^4 |x^2 h_k(x)|^2. \quad (3.26)$$

O limite inferior de frequências fisicamente interessantes é obtido considerando que o maior comprimento de onda possível corresponde ao tamanho do horizonte atual, $1/H_0$, o que significa que o intervalo de frequências começa em $k = 1$ ou $\nu = H_0 \approx 2 \times 10^{-18} \text{Hz}$. Este modo foi o primeiro a sair do horizonte e permaneceu fora até $z = 0$. Na aproximação super-adiabática, sua amplitude é exatamente igual ao valor inicial e, mesmo no cálculo (mais preciso) apresentado neste trabalho, espera-se que a informação das condições iniciais seja melhor preservada para $k \sim 1$. O limite superior, por sua vez, corresponde ao último modo a sair do horizonte, no fim da era inflacionária. Considerando que a era da radiação começa imediatamente após a inflação e sabendo ainda que $\rho_r = \rho_{r_0} x^4$, é fácil calcular o instante da transição: $x_{\text{fi}} = (8\pi M/3)m_{Pl}^2/(H_0^2 \Omega_{r_0})$. Usando então a relação (3.25), o número de onda máximo é imediatamente obtido. Para $M = 10^{-16}$,

por exemplo, a frequência máxima é $k \sim 10^{29}$ e, para $M = 10^{-24}$, o máximo é $k \sim 10^{25}$.

Duas outras grandezas observáveis, pelo menos em princípio, são a amplitude característica e a densidade de energia das ondas gravitacionais. A primeira relaciona-se diretamente com $\Delta_t^2(\mathbf{k}, x)$,

$$\mathbf{h}_c(\mathbf{k}, x) = \sqrt{\frac{\Delta_t^2(\mathbf{k}, x)}{2}}, \quad (3.27)$$

e é de grande interesse quando se quer avaliar a detectabilidade do sinal calculado. Isso porque \mathbf{h}_c é aproximadamente igual à variação observada na distância L existente entre duas massas de prova submetidas a um fluxo de radiação gravitacional: $\mathbf{h}_c(\mathbf{k}, x) \approx \Delta L/L$. Essa grandeza será de particular interesse no Capítulo 4, quando a detectabilidade das ondas gravitacionais cósmicas é avaliada. O segundo observável é a densidade espectral de energia, $\Omega_{gw}(k, \tau)$, definida como

$$\Omega_{gw}(k, \tau) \equiv \frac{1}{\rho_c(\tau)} \frac{d\langle 0|\hat{\rho}_{gw}|0\rangle}{d \ln k}. \quad (3.28)$$

Para calcular $\Omega_{gw}(k, \tau)$ é preciso retomar a ação (2.64) e obter o tensor momento energia

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{(B)\mu\nu}} + g_{\mu\nu}^{(B)} \mathcal{L},$$

de modo que a densidade de energia clássica associada às ondas gravitacionais seja

$$\rho_{gw} = -T_0^0 = \frac{1}{64\pi G} \frac{(h'_{ij})^2 + (\nabla h_{ij}^2)}{a^2}.$$

O mesmo procedimento que levou ao espectro de potências pode ser aplicado aqui para obter o valor esperado de ρ_{gw} (Cf. BOYLE; STEINHARDT, 2005),

$$\langle 0|\hat{\rho}_{gw}|0\rangle = \int_0^\infty \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{(h'_{ij})^2 + k^2 h_{ij}^2}{a^2} \frac{dk}{k},$$

e o espectro de energia,

$$\Omega_{gw}(k, \tau) = \frac{8\pi G}{3H^2} \frac{k^3}{2\pi^2} \frac{(h'_{ij})^2 + k^2 h_{ij}^2}{a^2} = \frac{1}{12} \frac{k^2 \Delta_h^2(k, \tau)}{a^2 H^2}, \quad (3.29)$$

onde o último termo do lado direito é obtido considerando que, $|h'(k, \tau)|^2 = k^2 |h(k, \tau)|^2$. Como função de k e x , a densidade de energia espectral fica

$$\Omega_{gw}(\mathbf{k}, x) = \frac{x^2}{12} \frac{(H_0 \mathbf{k})^2 \Delta_t^2(\mathbf{k}, x)}{H^2(x)}. \quad (3.30)$$

Os três espectros (3.26, 3.27 e 3.30) definidos acima são interessantes pois contêm informações diretas sobre a amplitude das perturbações tensoriais da métrica (3.26), a

detectabilidade do sinal (3.27) e a densidade de energia contida em cada modo (3.30).

3.4 A evolução dos espectros

A história do Universo é impressa nos espectros à medida que cada modo evolui, mas o efeito é maior quando o comprimento de onda é comparável ao horizonte ou menor, pois a amplitude permanece quase constante quando $a\lambda \gg 1/H$ (essa condição é válida sempre que \dot{H} for menor ou da mesma ordem que H). Isso significa que os modos de baixa frequência começam a ser afetados em eras mais recentes que os de alta frequência, conforme se vê a seguir.

3.4.1 Durante a inflação

Durante a inflação, os modos saem do horizonte na ordem inversa de seus comprimentos de onda: os últimos a sair são aqueles cujo comprimento de onda é da ordem do raio de Hubble H_{inf} da inflação (que permanece constante no modelo de Sitter). Assim, no redshift x_{fi} em que a inflação termina, os modos de interesse são aqueles que conseguiram sair do horizonte. A faixa de comprimentos de onda fisicamente relevantes se estende desde os últimos modos que conseguiram sair até os modos cujo λ é do tamanho do raio de Hubble atual, pois os modos maiores que esse limite não são observáveis. No instante em que a inflação termina x_{fi} , o espectro tem a forma plana representada na Figura 5, onde a amplitude característica das perturbações tensoriais, para quatro escalas de energia do ínflaton, é mostrada: $M = 10^{-24}$ ($E_{\text{inf}} = 10^{-6}m_{Pl}$); $M = 10^{-20}$ ($E_{\text{inf}} = 10^{-5}m_{Pl}$); $M = 10^{-16}$ ($E_{\text{inf}} = 10^{-4}m_{Pl}$); $M = 10^{-14}$ ($E_{\text{inf}} = 10^{-3,5}m_{Pl}$). Os espectros são calculados em $x_{\text{fi}}(M) \approx 10^{25} - 10^{28}$. A forma plana do espectro está de acordo com a configuração inicial, como se observa das equações (3.26 e 3.25), bem como seu comportamento crescente com a escala de energia. Definindo $\delta_{\text{h}} \equiv \Delta \log h_c / \log h_c$ e $\delta_M \equiv \Delta \log M / \log M$, nota-se a relação $\delta_{\text{h}} \approx 3/4\delta_M$. Para $x < x_{\text{fi}}$, a evolução do espectro é tal que a amplitude dos modos dentro do horizonte sempre diminui (cf. seções 3.4.2 e 3.4.3 a seguir) enquanto os modos exteriores permanecem constantes. Este fato permite estabelecer um limite superior para M , pois como as perturbações da métrica se imprimem diretamente sobre o espectro de anisotropias da RCF, a amplitude máxima das perturbações tensoriais não pode ser maior que $\Delta T/T \approx 10^{-5}$ em $x \sim 10^3 - 10^4$, quando o espectro da RCF se forma. Este vínculo observacional conduz ao resultado $M \leq 10^{-14}$. Esta estimativa mostra-se conservadora frente aos resultados obtidos de uma análise mais precisa dos efeitos das

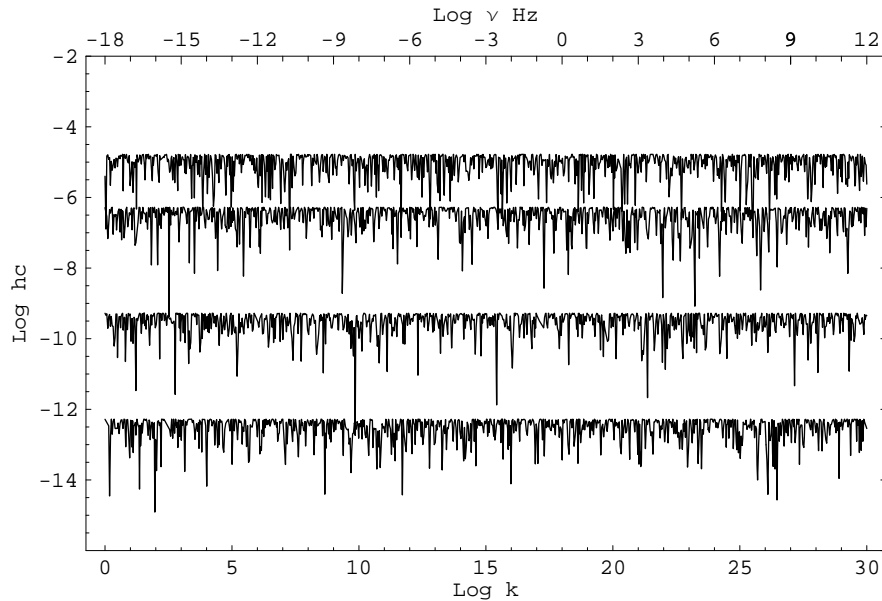


Figura 5: Espectro de ondas gravitacionais (amplitude característica) tomado imediatamente após a inflação, para quatro escalas de energia distintas: $M = 10^{-14}$, 10^{-16} , 10^{-20} e 10^{-24} (de cima para baixo).

ondas gravitacionais sobre a radiação cósmica de fundo, feita na seção 4.2.

Uma característica que salta aos olhos, tanto na Figura 5 quanto nas próximas, é o caráter oscilatório do espectro. Longe de ser um efeito puramente numérico, essas oscilações são próprias da solução matemática da equação de movimento das perturbações tensoriais, onde a forma analítica da solução é explicitada), que oscilam não apenas no tempo, mas também no espaço de Fourier (cf., por exemplo, a equação (3.18), onde a forma analítica da solução para $\mu(x)$ é explicitada).

3.4.2 No período de expansão desacelerada

Considerando o modelo mais simples, em que a era da radiação tem início imediatamente após a inflação, é possível usar o espectro da Figura 5 como condição inicial para a fase seguinte. O resultado deste procedimento é mostrado na Figura 6. Os modos de menor comprimento de onda entram no horizonte em redshifts maiores. Isso significa que as alterações no espectro de potência começam no extremo de alta frequência e seguem para a região de baixa frequência, de modo que as informações sobre as condições iniciais são melhor preservadas para baixas frequências. Na região correspondente aos modos que já entraram no horizonte, a inclinação é $\sigma \approx -1, 2$.

A transição para a era da radiação começa por volta de $x \approx 10^4$ e termina em $x \approx 10^2$ (cf. Figura 4), de modo que nesse redshift, pode-se dizer que a dinâmica do Universo é do-

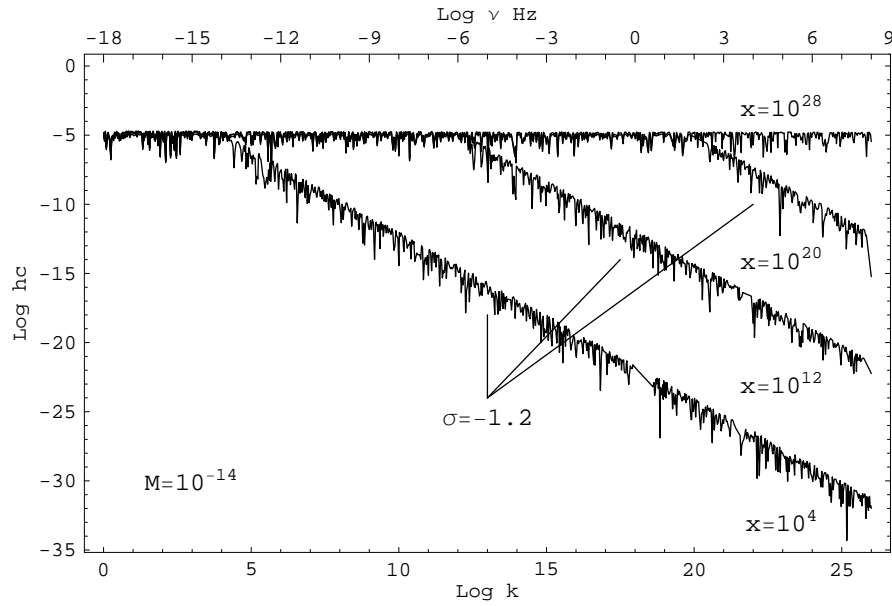


Figura 6: Espectro de amplitude de perturbações tensoriais para $M = 10^{-14}$, em diferentes redshifts dentro da fase de domínio da radiação. A inclinação do espectro é $\sigma \approx -1,2$.

minada pela matéria não bariônica. A Figura 7 mostra o espectro de ondas gravitacionais tomado em $x = 100$. Observa-se que a inclinação do espectro é menor ($\sigma = -0,75$) para

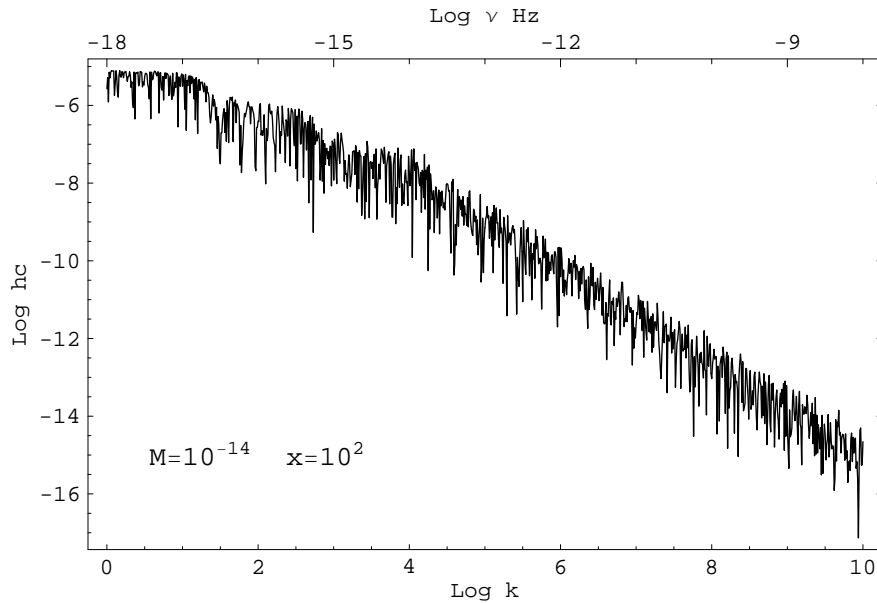


Figura 7: Espectro de amplitude de perturbações tensoriais para $M = 10^{-14}$, tomado em $x = 100$, isto é, já na fase de domínio da matéria.

$10^2 < k < 10^4$ do que para $k > 10^4$. Isso ocorre porque a equação de estado efetiva está variando significativamente durante o período (precisamente entre $x = 10^2$ e $x = 10^4$) em que estes modos entraram no horizonte. A descontinuidade na inclinação (há dois “saltos” perceptíveis no gráfico) deve-se ao tamanho dos intervalos Δx definidos na implementação

do processo semi-analítico de cálculo e é atenuada quando $\Delta x \rightarrow 0$.

É importante destacar que a forma do espectro carrega informações principalmente sobre: (1) as condições iniciais determinadas no Universo primordial e (2) a evolução da equação de estado efetiva, ou equivalentemente, do fator de escala. Enquanto está fora do horizonte, cada modo k mantém seu valor inicial quase inalterado; ao retornar ao horizonte, começa a evoluir de acordo com a equação (3.9), que depende do fator de escala naquela faixa de redshifts; no entanto, quando $1/H$ fica muito maior que k , a equação (3.9) tende para o regime assintótico (3.8), quando todos os modos caem proporcionalmente a a^{-1} . Por esta razão, observa-se que a região de altas frequências na Figura 7 mantém a mesma inclinação da Figura 6, e somente sua amplitude varia durante as fases subseqüentes.

Para concluir esta seção, a Figura 8 mostra em detalhe a região de baixas frequências do espectro de potências calculado em $x = 5$, no final da era da matéria. Nesse redshift,

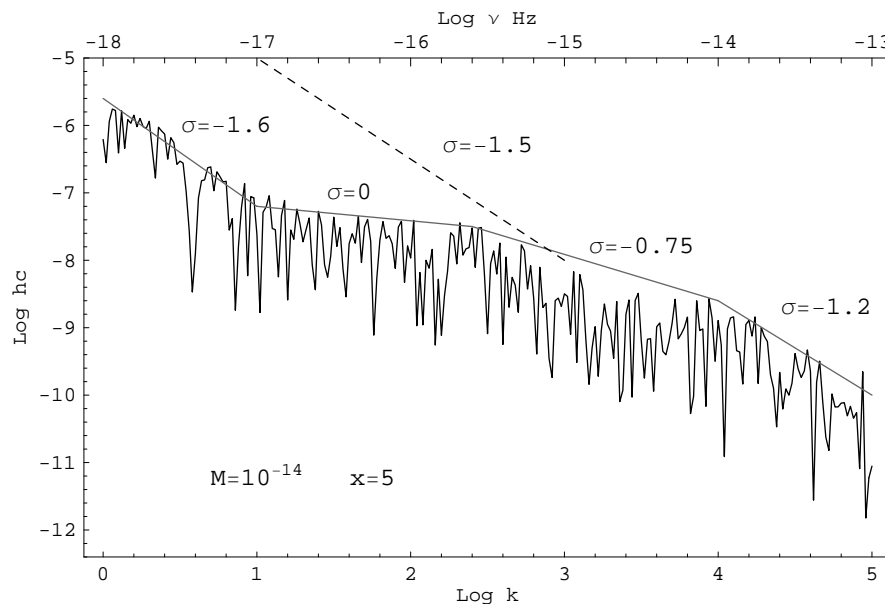


Figura 8: Região de baixas frequências do espectro de amplitude de perturbações tensoriais tomado em $x = 5$, para $M = 10^{-14}$. A linha tracejada corresponde ao resultado esperado quando se considera uma equação de estado efetiva do tipo escada.

quase todo o espectro foi modificado de sua condição inicial. O espectro tem uma inclinação quase nula na região $10^1 \lesssim k \lesssim 10^{2,4}$ e, na região $10^{2,4} \lesssim k \lesssim 10^4$, sua inclinação se modifica por causa da variação de ω_{ef} . Essa característica, que já era fracamente perceptível na Figura anterior, é completamente distinta do que se obtém quando se considera uma transição instantânea de fase. Aproximando a equação de estado efetiva por uma função escada (linha tracejada na Figura 4), outros autores (GRISHCHUK, 2001; ZHANG

et al., 2005; BOYLE; STEINHARDT, 2005; ZHANG et al., 2006), obtêm um espectro com inclinação mais acentuada na região $k < 10^3$ do que na região de altas frequências (Zhang et al. (2006), por exemplo, encontram $\sigma \approx -1,5$), enquanto que aqui, o espectro diminui sua inclinação drasticamente. Para comparação inclui-se uma linha tracejada na Figura 8, correspondente à inclinação aproximada do espectro calculado mediante a aproximação de transição instantânea.

Um último comentário diz respeito à região $1 < k \lesssim 10$ da Figura 8. Como a figura foi tomada em $x = 5$, esses modos estão justamente no limiar da transição entre “dentro” e “fora” do horizonte ($k \sim aH$). Como a aproximação de horizonte fino foi dispensada, essa região apresenta uma inclinação transitória ($\sigma \approx -1,6$), que desaparece para x menores que 5, à medida que os modos entram no horizonte. Essa característica não é perceptível em figuras anteriores por conta da escala.

3.4.3 Na fase de expansão acelerada

Praticamente todos os modos já estão dentro do horizonte quando a era de expansão acelerada tem início e, por isso, a forma do espectro permanece constante e somente a amplitude é alterada nessa fase. A Figura 9 mostra uma estreita fatia do espectro atual, para que o efeito dos diferentes modelos de energia escura seja melhor observado.

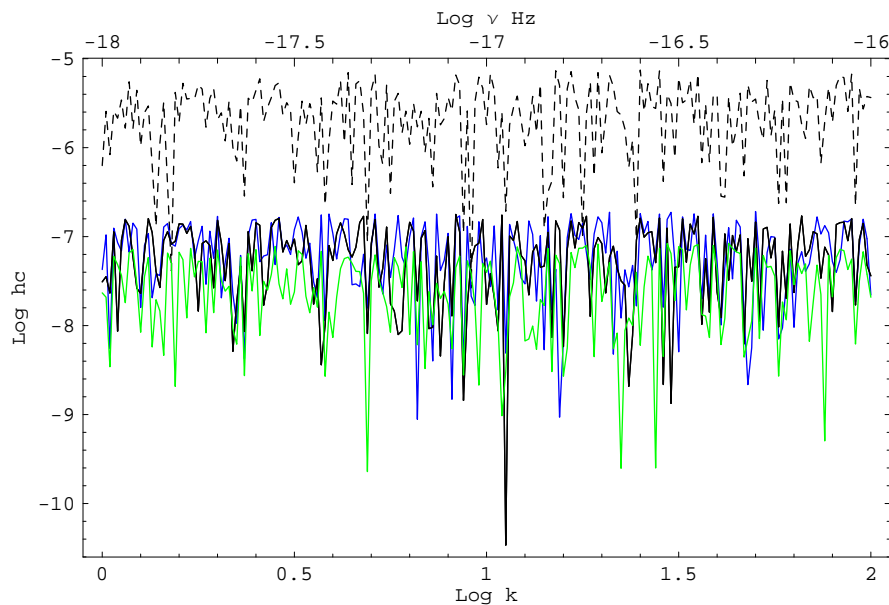


Figura 9: Espectro atual (em $x = 1$) de ondas gravitacionais para $M = 10^{-14}$. Os modelos de energia escura considerados são: constante cosmológica (linha contínua), gás de Chaplygin (azul), fluido-X (verde), fluido-X fantômico (linha tracejada) e quintessência (cinza). Os parâmetros usados em cada modelo são os mesmos das Figuras 3 e 4.

A primeira característica a destacar nessa figura é a completa degenerescência entre a constante cosmológica e a quintessência ($\omega_0 = -1$ e $\omega_1 = -0.2$), cujas curvas se sobrepõem completamente. Além disso, o gás de Chaplygin ($\bar{A} = 0,8$ e $\alpha = 1$) também é quase degenerado com essas duas curvas. Observando o comportamento de ω_{ef} na Figura 4, é fácil compreender que esses três casos têm comportamento muito semelhante e esta degenerescência é previsível. Quanto ao fluido-X ($\omega = -0,8$), este leva a uma amplitude menor que a constante cosmológica enquanto que o fluido-X fantômico ($\omega = -1,8$) leva a uma amplitude maior, sendo que a diferença é mais acentuada para o fluido fantômico, pois os parâmetros escolhidos são tais que $|\omega_{X_f} - \omega_\Lambda| > |\omega_X - \omega_\Lambda|$. Como a energia escura começa a atuar em eras muito recentes $x \sim 2$, a assinatura dos diferentes modelos é muito fraca: para produzir uma diferença de ≈ 2 em $\log h_c$, é preciso variar ω de aproximadamente uma unidade (quanto mais negativa é a equação de estado, maior é a amplitude). Embora apenas um conjunto muito particular de parâmetros esteja representado na Figura 9, outras possíveis combinações foram testadas.

Os resultados permitem concluir que: (1) para o gCg (FABRIS et al., 2004; SOARES-SANTOS et al., 2005b), o parâmetro α não possui nenhum efeito visível, enquanto o parâmetro \bar{A} eleva a amplitude, à medida que varia de 0 até 1, desde o mínimo estipulado pelo espectro sem energia escura até o máximo dado pelo espectro do modelo Λ CDM; (2) o fluido-X (SOARES-SANTOS et al., 2005a) tem apenas um parâmetro, ω , que faz o mesmo papel de \bar{A} , mas assume valores mais negativos que -1 , e neste caso o espectro gerado fica acima de Λ CDM; (3) a quintessência, em geral, é completamente degenerada com o fluido-X, a menos que se assumam valores da ordem de 1 (ou maiores) para ω_1 , mas isso não tem sentido físico algum, pois neste caso a quintessência afetaria a dinâmica do Universo em eras remotas, gerando uma contradição com o modelo cosmológico mais aceito atualmente.

3.5 Superando as aproximações analíticas

É natural que se compare os resultados obtidos neste trabalho – em que a equação de movimento das perturbações tensoriais foi resolvida por meio de um método semi-analítico, sem lançar mão das aproximações de horizonte fino e transições instantâneas de fase – com trabalhos recém publicados por outros autores. Ao fazer isso, percebe-se que, no regime de altas frequências, a aproximação de horizonte fino com transições instantâneas entre as fases pós-inflacionárias, utilizada por Zhang et al. (2005) está em razoável acordo com os resultados apresentados neste Capítulo. Cálculos mais precisos,

que dispensaram a aproximação de horizonte fino, mas não a de transições instantâneas foram formalmente desenvolvidos por Maia (1993) e realizados por Zhang et al. (2006) e Baskaran et al. (2006), por exemplo, e todos os resultados são compatíveis, na região $k > 10^4$. Há apenas uma sutil diferença quanto à inclinação do espectro: como se vê na Figura 10, o espectro de densidade de energia⁹ apresenta uma leve inclinação negativa (com índice espectral $\approx -0,3$) na faixa de $k > 10^4$, quando o que se esperaria dos cálculos aproximados para o modelo inflacionário de Sitter é um espectro plano. Se a equação de estado efetiva permanece constante e igual a $1/3$, durante toda a era da radiação, uma curvatura no espectro significa obrigatoriamente que o modelo inflacionário não é exatamente de Sitter (ZHANG et al., 2006), mas o mesmo não pode ser afirmado aqui. Como a equação de estado varia lentamente nesta faixa, o espectro deve sofrer uma pequena distorção, explicando o comportamento que se observa na Figura 10.

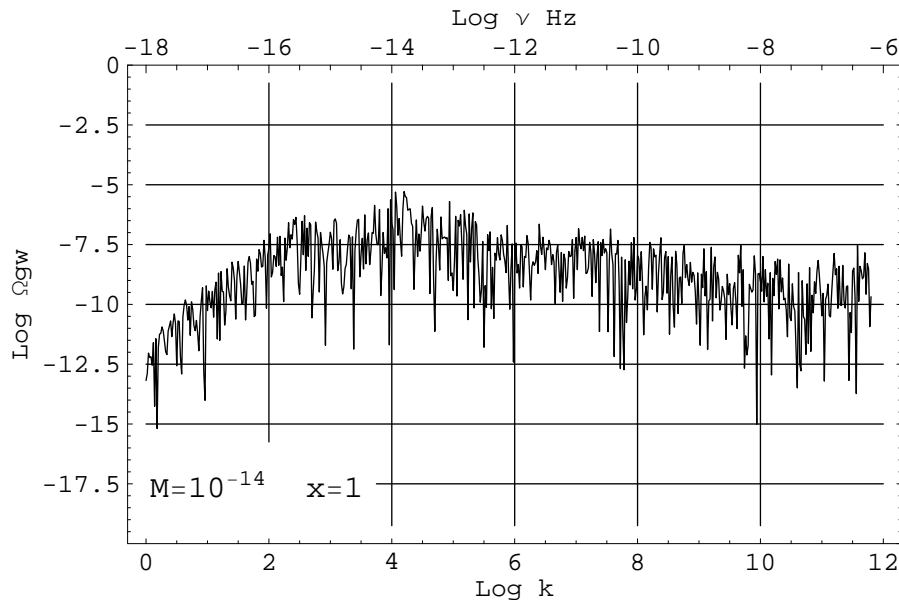


Figura 10: Densidade espectral de energia em ondas gravitacionais primordiais, em $x = 1$, para o modelo Λ CDM.

A aproximação de transições instantâneas de fase tem efeito mais dramático na região de frequências menores que 10^4 . Os cálculos analíticos, seja com horizonte fino ou não, levam a uma inclinação *negativa* desta faixa do espectro, o que não se observa em 10, onde nota-se uma inclinação *positiva* com índice espectral $\sigma \approx 2,5$. Isso significa que aproximar a variação suave de $\omega_{\text{ef}}(x)$, por transições abruptas de fase conduz a previsões radicalmente distintas quanto à forma do espectro de potências nessa região e pode-se dizer que o tratamento semi-analítico empregado aqui, por dispensar as aproximações

⁹A relação entre a amplitude h_c e a densidade de energia espectral é visível diretamente das equações (3.26, 3.27 e 3.28), apresentadas na seção 3.3.

discutidas acima, conduz a resultados mais precisos. Vale reiterar que, a precisão do método semi-analítico depende apenas do tamanho dos intervalos Δx , que podem ser feitos tão pequenos quanto necessário.

O efeito sobre a transição matéria-energia escura, não é visível na Figura 10 por conta da escala e está melhor representado na Figura 9. A energia escura atua fracamente sobre a forma do espectro e isso implica que as características gerais discutidas para o modelo Λ CDM devem permanecer.

É pertinente ainda, ressaltar os avanços realizados, graças ao desenvolvimento dessa abordagem semi-analítica, desde o trabalho precursor deste estudo (FABRIS et al., 2004). Além de computar o espectro completo, desde o limite inferior até a máxima frequência fisicamente admissível (SOARES-SANTOS; DE GOUVEIA DAL PINO, 2006), foi possível comparar os modelos fluido-X com o gás de Chaplygin (Cf. SOARES-SANTOS et al., 2005a, 2005b) e com uma parametrização de primeira ordem dos modelos de quintessência. Os resultados obtidos são conclusivos, tanto no que diz respeito à influência da energia escura sobre as ondas gravitacionais, quanto à relevância de se modelar adequadamente o perfil da equação de estado efetiva ω_{ef} .

Concluída a análise dos espectros, resta investigar a detectabilidade dessas ondas gravitacionais primordiais e este é o objetivo do próximo Capítulo.

4 *Contrapartidas experimentais*

Uma vez obtido o espectro teórico de ondas gravitacionais cósmicas, surge de imediato o questionamento quanto à sua contrapartida empírica, pois o problema proposto reside no campo científico (em contraposição ao *metafísico*) e depende da existência dessa contrapartida para nele permanecer. De fato, como as ondas gravitacionais decorrem diretamente da teoria da relatividade geral, que tem sido testada de inúmeras maneiras desde o início do século XX (veja, por exemplo os capítulos 38 – 40 de Misner et al. (1970) e a revisão de Will (1987)), seu lugar no universo de estudos científicos já está assegurado e as medidas da desaceleração do pulsar binário PSR 1913+16, em 1975, reafirmaram esta posição¹. No entanto, quando se trata de ondas gravitacionais de origem primordial, o cenário se complexifica, pois sua origem está atrelada a um paradigma (a inflação) cuja solidez está longe de ser comparável à da TRG e sua evolução depende do modelo cosmológico assumido para eras posteriores à inflação². Isso significa que os esforços para detectar essas relíquias do Universo primordial estão para além do compromisso filosófico subentendido entre teoria e experimento, pois potencialmente existe a possibilidade (única, talvez) de obter informações sobre o Universo desde escalas de energia da ordem de 10^{15}GeV .

Infelizmente os esforços realizados até o momento ainda não foram suficientes para levar a termo essa tarefa, mas os prognósticos são favoráveis e duas abordagens têm sido investigadas: a detecção direta, que objetiva medir a deformação de um corpo de prova ou do próprio espaço-tempo quando as ondas gravitacionais o atravessam; e a detecção

¹Esta foi a primeira evidência observacional (indireta) da existência de ondas gravitacionais. O PSR 1913+16 – um pulsar de $1,42M_{\odot}$ e período 59ms, orbitando uma componente secundária de mesma massa – tem sido monitorado desde sua descoberta, na década de 70, e observa-se uma redução de $-2,4 \times 10^{-12}\text{s/s}$ em seu período orbital, que é de 7,75h. Esta desaceleração é compatível com a perda de energia cinética devido à radiação gravitacional emitida pelo sistema e valeu o prêmio Nobel de 1993 a Hulse e Taylor, seus descobridores. Cf. KENYON, 1995.

²Retomando a discussão do Capítulo 3, a forma do espectro no presente depende, na região de altas frequências, da lenta evolução de ω_{ef} durante a era da radiação; para $10^2 < k < 10^4$, do ritmo da transição entre as eras da matéria e radiação; e para $k < 10^2$, da evolução de ω_{ef} nas eras de domínio das componentes escuras.

indireta, que visa procurar assinaturas específicas das ondas gravitacionais no espectro das anisotropias da RCF. A segunda abordagem só faz sentido para ondas gravitacionais primordiais, enquanto que a primeira é, em princípio, aplicável tanto ao fundo primordial quanto a outras fontes estocásticas (que formam um fundo não primordial) e surtos de origem astrofísica. Ambas as abordagens são tratadas a seguir, com ênfase na possibilidade de detecção do espectro calculado no Capítulo 3. Uma importante revisão sobre esse tema foi publicada por Thorne (1987) e, mais recentemente, por Maggiore (2000).

4.1 Duas vias de detecção direta

Rigorosamente, o termo “detecção direta” de ondas gravitacionais, deveria ser usado apenas para experimentos cujo princípio é medir a deformação do espaço-tempo submetido a tais perturbações. Nesta classe de experimentos encontram-se os interferômetros, discutidos adiante na seção 4.1.2. No entanto, é comum incluir sob esse rótulo detectores que medem a deformação de uma massa de prova em ressonância, e isso é feito neste Capítulo.

Outra consideração necessária quanto à terminologia diz respeito à sensibilidade dos detectores, e visa permitir o diálogo entre as previsões teóricas e as perspectivas observacionais.

As grandezas Δ_t^2 , Ω_{gw} e h_c , usadas na seção 3.3 para definir o espectro de potências, caracterizam de forma equivalente o fundo de ondas gravitacionais e não dependem em nada do detector. No entanto, a saída $S(t)$ de um detector hipotético qualquer terá uma componente $s(t)$, que representa o observável propriamente dito, e outra, o ruído $r(t)$, que depende das características do detector: $S(t) = s(t) + r(t)$. Para um fundo estocástico, a média de $s(t)$ é nula e a média de $s^2(t)$ é dada por

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{F}{2} \int_0^\infty \nu^{-1} h_c^2 d\nu, \quad (4.1)$$

onde F é um fator de eficiência que depende da geometria do detector, fornecendo uma medida da perda de sensibilidade devida ao fato de que as ondas gravitacionais vêm de todas as direções, enquanto que o detector só é maximamente sensível em algumas direções preferenciais. O ruído, por sua vez, contribuirá com

$$\langle r^2(t) \rangle = \int_0^\infty h_r^2 d\nu \quad (4.2)$$

e a radiação gravitacional será efetivamente detectável se

$$h_c > \sqrt{\frac{2\nu}{F}} h_r. \quad (4.3)$$

A sensibilidade dos detectores é frequentemente expressa em termos da grandeza h_r , de dimensão $\text{Hz}^{-1/2}$.

4.1.1 Massas ressonantes

Esquemáticamente, um detector de massa ressonante é constituído por um corpo de prova (cilíndrico ou esférico) sólido e massivo, cujas oscilações mecânicas são excitadas pela radiação gravitacional e convertidas em sinal elétrico por um sensor (composto por um transdutor e um amplificador).

No caso de um detector em forma de *barra cilíndrica*, a variação ΔL do comprimento é composta por uma soma sobre todos os seus modos de vibração, mas o sensor possui um filtro centrado na frequência ν_0 do modo fundamental e com largura $\Delta\nu$ menor que a diferença entre o modo fundamental e o primeiro harmônico. Assim, o detector torna-se um *detector de banda estreita* centrado em ν_0 e o comprimento da barra será uma função da frequência que se pretende detectar e da velocidade do som (c_s) no material: $L \approx \frac{1}{2}c_s/\nu_0$. A direção ótima para incidência de ondas gravitacionais sobre um detector cilíndrico com eixo orientado na direção \mathbf{z} e sensor posicionado em uma das extremidades, é qualquer direção perpendicular a \mathbf{z} (veja a Figura 2, no Capítulo 1). Este fato faz com que a eficiência deste tipo de detector seja $F = 8/15$. A sensibilidade desses detectores é dada por (THORNE, 1987):

$$h_r^2 = \frac{4}{\nu_0 Q} \frac{T_b}{\int \sigma_0 d\nu}, \quad (4.4)$$

onde T_b , Q e σ_0 são: a temperatura da barra, o fator de qualidade do material (o número de radianos de oscilação necessário para que a energia caia de um fator e) e a secção de choque, respectivamente. A equação (4.4) considera apenas os parâmetros relativos ao ruído térmico da barra. Além desses parâmetros seria necessário computar o ruído do sensor, i.e., a temperatura do amplificador, a frequência de operação do amplificador, a constante β de acoplamento entre o transdutor e a barra (aproximadamente igual ao número de ciclos necessários para que a energia do modo fundamental seja completamente transmitida para o transdutor) e a largura de banda do filtro; mas para uma estimativa de detectabilidade, a (4.4) é suficiente. A secção de choque integrada é proporcional à

Tabela 2: Características dos principais projetos de barras ressonantes, desde a primeira geração até as antenas atualmente em operação.

	material	M (ton)	T_b (K)	Q	β	ν_0 (Hz)	h_r ($\text{Hz}^{-1/2}$)
até 1977 ^a	Al	1,5	300	10^5	10^{-4}	1,6 k	$\sim 10^{-16}$
anos 80 ^b	Al5056	2 – 5	1,5 – 4	10^6	0,1	1 k	$\sim 10^{-17}$
ALLEGRO ^c	Al5056	2,30	4,2	2×10^6		897 e 920	$1,5 \times 10^{-21}$
AURIGA ^d	Al5056	2,23	0,25	3×10^6		912 e 930	2×10^{-22}
EXPLORER ^e	Al5056	2,27	2,6	5×10^6		905 e 921	3×10^{-21}
NAUTILUS ^f	Al5056	2,35	0,1	5×10^5		907 e 923	4×10^{-22}
NIOBE ^g	Nb	1,5	5	2×10^7		694 e 713	8×10^{-22}

^aUm histórico bastante preciso dos primeiros detectores, até os anos 80, é apresentada na revisão de Thorne (1987) e, em (CERDONIO, 2003), foi feita uma comparação entre as sensibilidades desses detectores com os modernos.

^bNote o aumento com relação à primeira geração, não tanto da sensibilidade, mas do fator de acoplamento β . Em publicações mais recentes, esse fator não aparece explicitamente.

^cCf. MAUCELLI et al., 1996.

^dCf. COCCIA, 2000.

^eEm operação desde 1984 (observações de longa duração desde 1990). Cf. ASTONE et al., 2002, 1993.

^fResultados do segundo período de operação, de 1998 a 2002 (ASTONE et al., 2002).

^gProjeto iniciado na primeira metade da década de 90 (BLAIR et al., 1995). Cf. COCCIA, 2000.

massa da barra,

$$\int \sigma_0 d\nu = 1,6 \times 10^{-21} \text{cm}^2 \text{Hz} \left(\frac{M}{10^3 \text{kg}} \right) \left(\frac{c_s}{5 \text{km s}^{-1}} \right)^2, \quad (4.5)$$

mas a constante de proporcionalidade é muito pequena, da ordem de 10^{-21} , para valores típicos de massa e c_s . Na verdade, essa secção de choque tão diminuta é responsável pela propagação livre da radiação gravitacional, desde os instantes iniciais até o Universo recente, interagindo fracamente ao longo do percurso (ao contrário do que ocorre com a radiação eletromagnética); mas, por outro lado, essa mesma vantagem oferece sérias dificuldades para a detecção via massas ressonantes.

De acordo com as equações (4.4 e 4.5), as alternativas para aumentar a sensibilidade desses detectores são: maximizar a massa e a velocidade do som – para aumentar a secção de choque – maximizar o fator de qualidade Q (isolando o sistema) e resfriar a barra. Desde os anos 60, quando Weber (WEBER, 1960 apud THORNE, 1987) deu início à primeira geração de detectores, até os dias de hoje, avanços significativos foram realizados no sentido de otimizar todos esses parâmetros. A Tabela 2 resume a configuração dos principais detectores já construídos.

A sensibilidade dos detectores modernos chega a $h_r \approx 10^{-22} \text{Hz}^{-1/2}$, em frequências

Tabela 3: Características dos principais projetos de detectores esféricos.

	material	M (ton)	T_e (K)	ν_0 (Hz)	Q	h_r ($\text{Hz}^{-1/2}$)
Mario Shcenberg ^a	CuAl6%	1,15	20m	3,2k	$2,7 \times 10^6$	2×10^{-23}
Mini-GRAIL ^b	CuAl6%	1,3	80m	2,9k	$1,5 \times 10^6$	3×10^{-22}

^aCf. AGUIAR et al., 2005.

^bCf. DE WAARD, A., 2005.

de aproximadamente 900Hz, com largura de banda de 10Hz. Usando a condição (4.3), obtém-se imediatamente a amplitude mínima detectável via barras ressonantes:

$$h_c \gtrsim 5,8 \times 10^{-21}, \quad k \approx 4 \times 10^{20}. \quad (4.6)$$

Nas frequências às quais esses detectores são sensíveis, as ondas gravitacionais primordiais têm amplitude 10^{15} vezes menor que a mínima detectável. Ou seja, esses detectores são otimizados para fontes astrofísicas que emitem radiação gravitacional em surtos de alta frequência e têm pouca aplicabilidade na investigação de ondas gravitacionais de origem cosmológica.

Uma evolução natural dos detectores cilíndricos são os detectores *esféricos*. Estes possuem uma massa maior para a mesma frequência de ressonância, o que implica numa seção de choque maior. Além disso, como os transdutores são distribuídos sobre a superfície da esfera, formando um icosaedro, esse aparato é sensível a diferentes direções e polarizações da radiação gravitacional incidente. A Tabela 3 contém as informações básicas dos principais detectores esféricos cuja construção está projetada ou em andamento.

As perspectivas são de que a sensibilidade desses detectores será $h_r \approx 10^{-23} \text{Hz}^{-1/2}$, para frequências de ressonância entre 200Hz e 2kHz, e largura de banda de aproximadamente 20Hz (AGUIAR et al., 2005). Empregando novamente a equação (4.3), estima-se que as esferas ressonantes sejam capazes de detectar ondas gravitacionais de até

$$h_c \gtrsim 2,7 \times 10^{-22}, \quad k \approx 1 \times 10^{20}. \quad (4.7)$$

Comparando as sensibilidades de barras (4.6) e esferas (4.7), nota-se uma melhoria de uma ordem de magnitude, mas ainda assim, não é suficiente para que se espere detectar ondas de origem cosmológica com esses aparelhos.

4.1.2 Interferômetros

Outro gênero de detectores cuja sensibilidade deve ser avaliada emprega a interferometria laser para medir o deslocamento de massas em queda livre submetidas à radiação gravitacional. A concepção dessa idéia remonta à década de 60 (GERTSENSHTEIN; PUSTOVOIT, 1962 apud THORNE, 1987) e o primeiro protótipo foi construído em 1972 no Hughes Research Laboratories, California (THORNE, 1987, p. 414).

Os componentes básicos de um detector interferométrico são dois braços de comprimento L conectados em uma das extremidades e três massas (uma no ponto de junção, duas nos extremos livres) suspensas por fios (constituindo três pêndulos). A direção ótima de incidência da onda gravitacional é perpendicular ao plano dos braços e, nesta situação, as massas situadas em um dos braços serão afastadas de uma distância $\Delta L = \frac{1}{2}Lh_c$ enquanto que as massas do outro braço são aproximadas do mesmo fator (para polarização $+$ e braços perpendiculares entre si). O aparato é construído de tal forma que a frequência das ondas gravitacionais detectadas é muito maior que a frequência dos pêndulos e por esta razão as massas podem ser consideradas massas livres. O fator de eficiência que considera a incidência a partir de qualquer direção, as duas polarizações, $+$ e \times , e um ângulo arbitrário θ entre os braços é (MAGGIORE, 2000): $F = 2/5 \sin^2 \theta$.

A variação do comprimento dos braços é monitorada por interferometria laser. No caso de um interferômetro de *Michelson*, por exemplo, um semi-espelho (*beam splitter*) e dois espelhos são posicionados na massa de junção e mais dois espelhos são afixados na extremidade de cada um dos braços, anexos às respectivas massas; um feixe laser passa através do semi-espelho e meio-feixe segue na direção de cada extremo, onde ocorre uma reflexão; outra reflexão ocorre no espelho da junção e uma terceira reflexão ocorre no espelho final; os feixes resultantes dos dois braços são então recombinados e recolhidos por um sensor. Na verdade, o feixe pode percorrer os braços um número arbitrário B de vezes e não apenas duas, como nesse exemplo.

O interferômetro de *Fabry-Perot*, por outro lado, a massa central é dividida em três partes, uma carregando o semi-espelho e duas com os espelhos (para reduzir o efeito de forças expúrias sobre os espelhos); cada braço atua como uma cavidade ressonante, com comprimento igual a um múltiplo semi-inteiro do comprimento de onda λ_e do laser; aumentando sua intensidade a cada reflexão. Os detectores modernos usam um interferômetro de Michelson com a cavidade ressonante de Fabry-Perot.

Ao contrário das massas ressonantes, os interferômetros são *detectores de banda larga*,

cujo comprimento de onda máximo é limitado pelo tamanho dos braços. A sensibilidade dos detectores interferométricos é aproximadamente calculada por meio da expressão (THORNE, 1987):

$$h_r^2 = \frac{2\lambda_e}{I_0\varepsilon} \times \begin{cases} 1/(2BL)^2 + (\pi\nu)^2 & \text{Fabry - Perot} \\ (\pi\nu)^2/\sin^2(2\pi BL\nu) & \text{Michelson} \end{cases} \quad (4.8)$$

onde $I_0\varepsilon$ é a potência³ do laser vezes a eficiência do sensor, considerando que as perdas após B voltas é desprezível. Sabendo que o comprimento de onda máximo da radiação gravitacional a ser detectada deve ser da mesma ordem de grandeza do comprimento L dos braços, conclui-se da equação (4.8) que $h_r \propto L^{-1}$ e justifica-se a necessidade de maximizar a escala física desses experimentos.

Embora a idéia desses detectores tenha mais de trinta anos, a primeira geração de empreendimentos de grande porte só começou a materializar-se no final dos anos 90. A exemplo do que foi feito para os detectores de massa ressonante, um compêndio dos detectores já construídos, em construção ou em projeto é apresentada na Tabela 4. O LIGO, (Gustafson et al. (1999)), projeto em desenvolvimento por uma colaboração MIT-Caltech, é constituído por dois interferômetros de 4km de comprimento; a contrapartida européia é o projeto VIRGO (ACERNESE et al., 2005a, 2005b), com braços de 3km, realizado por uma colaboração franco-italiana (CNRS-INFN); outros projetos de menor porte, realizados com o intuito de desenvolver a tecnologia necessária a empreendimentos maiores, são o GEO600 (GROTE et al., 2005) e TAMA300 (ANDO et al., 2000), com 600 e 300 metros, respectivamente: o primeiro, resultado de uma colaboração entre o Max-Planck-Institut für Quantenoptik e a University of Glasgow, o último, um projeto japonês de cinco anos de duração (1995-2000); no hemisfério sul, o único detector (em planejamento) é o AIGO, proposto pelo Australian Consortium for Interferometric Gravitational Astronomy (ACIGA, McClelland et al. (2000)); finalmente, os projetos mais ambiciosos, BBO (CORBIN; CORNISH, 2006) e LISA (DANZMANN; RÜDIGER, 2003), são empreendimentos a serem realizados pela NASA e por uma colaboração NASA-ESA, respectivamente, e consistem em interferômetros espaciais, onde três braços (de 5×10^6 km em LISA e 5×10^5 km no BBO) são arrançados num triângulo equilátero ($\theta = 60^\circ$). O BBO, embora possua braços menores, é composto por um par de interferômetros coplanares e a proposta é fazer a correlação dos dois detectores⁴.

³É útil ter em mente o fator de conversão da unidade de potência no sistema natural de unidades (sistema usado neste trabalho) para o SI (normalmente empregado na literatura especializada dos experimentos): [Potência] = $1GeV^2 = 2,43 \times 10^{21}$ erg s⁻¹ = $2,43 \times 10^{14}$ W.

⁴A correlação de dois ou mais detectores sincronizados é uma opção para melhorar ainda mais os limites de sensibilidade. Maggiore (2000) discute detalhadamente essa alternativa, mas neste trabalho apenas

Tabela 4: Síntese das características dos principais projetos de detectores interferométricos.

	L (km)	ν_{\min} (Hz) ^a	ν_{\max} (Hz) ^b	h_r (Hz ^{-1/2}) ^c
TAMA300	0,3	100	50k	10^{-21}
GEO600	0,6	50	60k	3×10^{-21}
VIRGO	3	10	10k	5×10^{-22}
LIGO I	4	30	3k	3×10^{-23}
LIGO II	4	7	3k	5×10^{-25}
AIGO ^d	4	7	3k	5×10^{-25}
LISA ^e	5×10^6	10^{-4}	1	
BBO	5×10^5	10^{-3}	100	10^{-24}

^aValor aproximado, apenas para situar a zona de mínima frequência de sensibilidade.

^bIdem ao anterior, mas para a máxima frequência.

^cSensibilidade máxima de cada detector.

^dLIGO II e AIGO serão detectores interferométricos avançados.

^eA referência Danzmann e Rüdiger (2003) fornece a sensibilidade de LISA em termos de h_c : 10^{-23} .

Para estimar a detectabilidade do fundo de ondas gravitacionais primordiais por esses detectores, é conveniente usar novamente a equação (4.3) para converter a sensibilidade espectral h_r na amplitude h_c calculada no Capítulo 3. O resultado obtido é mostrado na Figura 11. Observa-se na região de altas frequências, os detectores de massa ressonante

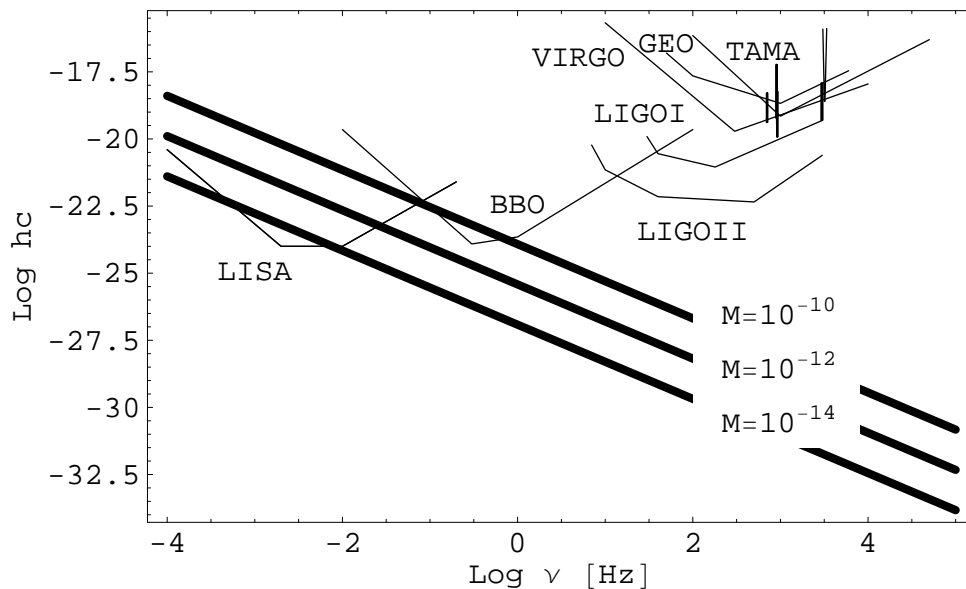


Figura 11: O espectro de ondas gravitacionais cósmicas para três distintas escalas de energia da inflação ($M = 10^{-14}$, 10^{-12} e 10^{-10} , de baixo para cima, respectivamente), mostrado em linhas grossas, é confrontado com a estimativa de sensibilidade dos principais detectores. Somente os detectores espaciais LISA e BBO seriam sensíveis a este sinal.

detectores isolados foram tratados.

e interferômetros terrestres, todos com sensibilidade insuficiente para detectar o fundo cosmológico de ondas gravitacionais. As curvas de sensibilidade dos detectores de massa ressonante são praticamente reduzidas a um ponto nessa escala, pois esses são, por construção, detectores de banda estreita; mas isso não interfere nas conclusões. Os detectores interferométricos, por sua vez, podem ser prontamente identificados na Figura. De cima para baixo, da direita para a esquerda tem-se TAMA, GEO, VIRGO, LIGO I, LIGO II, BBO e LISA. Somente os dois últimos seriam capazes de detectar um fundo cosmológico, mas como ambos estão ainda em projeto, pode-se dizer que (infelizmente) as perspectivas de detecção, ao menos pela via direta, não são imediatas.

4.2 Radiação cósmica de fundo: uma trilha alternativa

Outra frente de trabalho promissora é a busca por assinaturas de perturbações tensoriais no espectro da radiação cósmica de fundo em microondas. Com o intuito de avaliar as perspectivas dessa via indireta de detecção, é conveniente introduzir os conceitos fundamentais empregados nesse campo.

Em uma revisão recente, Hu et al. (1997) descrevem qualitativamente os processos físicos de geração dessas anisotropias, ditas primárias ou secundárias, segundo a época em que se imprimem sobre o espectro. Em síntese, o argumento baseia-se no fato de que, até o redshift $z_* \approx 10^3$, a temperatura do Universo é alta o suficiente para ionizar o hidrogênio. O espalhamento Compton é responsável pelo acoplamento entre fótons e elétrons; estes, por sua vez, estão acoplados aos bárions via interação eletromagnética. A pressão de radiação oferece resistência à força gravitacional e oscilações acústicas se estabelecem no plasma. Em z_* , ocorre a recombinação do hidrogênio (e o último espalhamento dos fótons, portanto); o Universo torna-se então transparente aos fótons e regiões de compressão e rarefação do plasma nesse redshift representam regiões quentes e frias, respectivamente; além disso, os fótons sofrem redshift gravitacional ao sair dos poços de potencial da superfície de último espalhamento⁵. As flutuações resultantes aparecem como anisotropias (primárias) no céu⁶. Há um comprimento de onda crítico, $\lambda_{\text{crit}} = \int c_s d\tau$, acima do qual as oscilações não conseguem se estabelecer e as anisotropias não evoluem de suas condições

⁵Este é o conhecido efeito Sachs-Wolfe, deduzido por Sachs e Wolfe (1967) e dominante nas flutuações de larga escala, correspondentes a $\theta \simeq 1^\circ$ (veja discussão adiante). Cf. GIOVANNINI, 2005, para revisão.

⁶As anisotropias secundárias resultam de processos posteriores a z_* , e estão conectados à história da formação de estruturas em larga escala. Como não têm nenhuma correlação com as ondas gravitacionais primordiais, sua descrição é omitida no presente trabalho e o leitor é remetido às referências Hu et al. (1997) e Refregier (1999) para revisões sobre o tema.

iniciais, exceto pelo redshift gravitacional. O comprimento λ_{crit} corresponde a uma escala angular $\theta_* = \sqrt{2\Omega_0(1100/z_*)} \simeq 1^\circ$ (KOLB; TUNER, 1990, Cap. 9) e como a recombinação não é instantânea (ou seja, a superfície de último espalhamento tem espessura não-nula), ao tomar uma dada linha de visada, observa-se uma média temporal sobre o processo de recombinação, que leva à supressão dos modos de alta frequência ($\theta > 1^\circ$).

O cálculo teórico das anisotropias da RCF baseia-se na teoria linear de perturbações cosmológicas, discutida no Capítulo 2. Os primeiros estudos (PEEBLES; YU, 1970) consideravam apenas perturbações escalares sobre um fluido de bárions e fótons, mas a sofisticação atingida desde então é tal que atualmente é possível computar matéria escura (BOND; EFSTATHIOU, 1984, 1987; VITTORIO; SILK, 1984), curvatura (WILSON; SILK, 1981), neutrinos massivos (BOND; A., 1983; DODELSON et al., 1995) e modos tensoriais (STAROBINSKI, 1985; LINDER, 1988; CRITTENDEN et al., 1993)⁷ e, para realizar o cálculo incluindo todos esses elementos, foi desenvolvida uma ferramenta computacional, o CMBfast (SELJAK; ZALDARRIAGA, 1996). O formalismo cuja compilação é apresentada nos próximos parágrafos baseia-se na equação de Boltzmann (além das equações hidrodinâmicas e de Einstein, que estão nos fundamentos primeiros da teoria), resolvendo-as mediante o uso de expansões em polinômios de Legendre da função de distribuição dos fótons.

4.2.1 O equacionamento do espectro de potências

A anisotropia de temperatura na posição \mathbf{x} e na direção \mathbf{n} , representada por $\Delta_T(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, depende, em princípio, tanto da direção quanto da frequência, mas as distorções em frequência são de segunda ordem, e em primeira ordem resta apenas a dependência com a direção. Efetuando uma expansão de Fourier sobre $\Delta_T(\mathbf{x}, \mathbf{n})$, resultam modos que evoluem, no contexto da teoria linear de perturbações, independentemente uns dos outros:

$$\Delta_T(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \tilde{\Delta}_T(\mathbf{k}, \mathbf{n}) \exp\{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}\}. \quad (4.9)$$

Supondo a simetria axial das perturbações em torno de \mathbf{k} , uma segunda expansão, em polinômios de Legendre, pode ser feita:

$$\Delta_T(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \sum_l (2l+1)(-i)^l \Delta_{T_l} P_l(\mu), \quad \mu = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}/k, \quad (4.10)$$

⁷Os modos vetoriais só não são incluídos nessa lista porque seu efeito sobre a RCF é desprezível.

onde $P_l(\mu)$ é o polinômio de Legendre de ordem l , Δ_{T_l} é o momento de multipólo associado, μ é o cosseno do ângulo entre a direção de propagação do modo \mathbf{k} e a linha de visada e , para simplificar, foi empregada a notação $\tilde{\Delta}_T(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = \Delta_T(\mathbf{k}, \mathbf{n})$. Uma expressão análoga a (4.10) pode ser escrita para as anisotropias de polarização $\Delta_P(\mathbf{k}, \mathbf{n})$. Além disso, no regime linear, os modos gerados por perturbações tensoriais, $\Delta_T^{(t)}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ e $\Delta_P^{(t)}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$, e escalares, $\Delta_T^{(e)}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ e $\Delta_P^{(e)}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$, evoluem independentemente, de forma que o cômputo total é feito somando as suas contribuições.

A evolução das anisotropias é regida pela equação de Boltzmann que descreve a evolução temporal dos parâmetros de Stokes de um campo de radiação ao atravessar um meio material (uma atmosfera estelar ou o plasma na era pré-recombinação), sendo constituída por um termo colisional (referindo-se ao espalhamento Thompson) e outro acolisional. Este último, também afetado pelas inhomogeneidades do espaço-tempo, promove o acoplamento intrínseco entre as equações perturbadas de Einstein e Boltzmann. O cálculo de ambos os termos consta da revisão de Giovannini (2005, Cap. 8) e as equações básicas resultantes encontram-se também em Seljak e Zaldarriaga (1996). Aqui, apenas os pontos centrais serão apresentados.

A parte acolisional da equação de Boltzmann pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial x^i}{\partial \tau} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial n_i} \frac{\partial n^i}{\partial \tau} = 0, \quad (4.11)$$

onde $f(x^i, q, n_j, \tau) = f_0(q) [1 + f_1(x^i, q, n_j, \tau)]$ é a função de distribuição de Bose-Einstein, ou Fermi-Dirac, (LANDAU; LIFCHITZ, 1969a, p. 176-177) expandida até a primeira ordem, q_i é o (tri)momentum comóvel de módulo q e direção n_i ($n_i n^i = 1$). Até este ponto a natureza da perturbação (escalar ou tensorial) não foi considerada e (4.11) é uma equação bastante geral. Para perturbações escalares, no gauge longitudinal (onde são válidas as equações da seção 2.6.1, com $E = B = 0$), a relação entre q e as variáveis da perturbação é

$$q' = q\psi' - qn_i \partial^i \phi. \quad (4.12)$$

Substituindo (4.12) em (4.11), eliminam-se os termos de ordem superior, divide-se o resultado por f_0 e finalmente, aplicando uma transformada de Fourier, obtém-se

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} + ik\mu f_1 + [\psi' - ik\mu\phi] \frac{\partial \ln f_0}{\partial \ln q} = 0 \quad (4.13)$$

válida para partículas sem massa (fótons e neutrinos, por exemplo).

O termo colisional, por sua vez, refere-se ao espalhamento Thompson e dependerá

tanto da velocidade do fluido bariônico quanto do ângulo μ , resultando em expressões distintas para cada um dos quatro parâmetros (I, Q, U, V) de Stokes. Como os quatro parâmetros não são independentes entre si ($I = Q + U + V$) e, além disso, como a intensidade I (que corresponde às anisotropias de temperatura T) e o grau de polarização $P = \sqrt{Q^2 + U^2}$ são invariantes quanto à rotação⁸, é conveniente escrever apenas as equações para os dois parâmetros: T e P . A dedução, aqui omitida, foi realizada por (BOND; EFSTATHIOU, 1984, 1987) e o resultado final, somando os termos colisional e acolisional pode ser expresso na forma:

$$\begin{aligned}\Delta'_T{}^{(e)} + ik\mu\Delta_T{}^{(e)} &= \phi' - ik\mu\psi + \kappa' \left[-\Delta_T{}^{(e)} + \Delta_{T_0}{}^{(e)} + i\mu v_b + \frac{1}{2}P_2(\mu)\Pi \right] \\ \Delta'_P{}^{(e)} + ik\mu\Delta_P{}^{(e)} &= \kappa' \left[-\Delta_P{}^{(e)} + \frac{1}{2}[1 - P_2(\mu)]\Pi \right] \\ \Pi &= \Delta_{T_2}{}^{(e)} + \Delta_{P_2}{}^{(e)} + \Delta_{P_0}{}^{(e)},\end{aligned}\tag{4.14}$$

onde ϕ e ψ são os potenciais escalares definidos na seção 2.6.1, $P_2(\mu)$ é o polinômio de Legendre para $l = 2$, v_b é a velocidade dos bárions e $\kappa' \equiv an_e x_e \sigma_T$ é a profundidade óptica diferencial para o espalhamento Thomson, enquanto que n_e e x_e são a densidade eletrônica e a fração de ionização, respectivamente. Duas outras grandezas relevantes – usadas a diante para escrever a forma integral dessas equações – são a profundidade óptica

$$\kappa = \int_{\tau}^{\tau_0} \kappa' d\tau\tag{4.15}$$

e a função visibilidade

$$\mathcal{K} = \kappa' \exp(-\kappa).\tag{4.16}$$

As equações (4.14) são válidas para o fluido composto de bárions mais radiação. Os neutrinos sem massa são regidos pelas mesmas equações sem os termos de espalhamento Thompson e polarização⁹ e a matéria escura, acolisional por hipótese, atua sobre os potenciais ϕ e ψ através de seu campo de velocidades v_c e seu contraste de densidade δ_c . Efetivamente, para fechar o sistema de equações (considerando que a evolução dos po-

⁸Uma alternativa para contornar o problema da não invariância de rotação dos parâmetros de Stokes Q e U é introduzir duas novas variáveis E e B , essas sim, invariantes. A relação entre esses novos parâmetros e os tradicionais é definida em termos da expansão em harmônicos esféricos (SPERGEL; ZALDARRIAGA, 1997): $E \equiv \sum a_{E,lm} Y_{lm}$ e $B \equiv \sum a_{B,lm} Y_{lm}$, onde os coeficientes $a_{E,lm}$ e $a_{B,lm}$ são definidos como $a_{E,lm} = -\frac{1}{2}(a_{2,lm} + a_{-2,lm})$ e $a_{B,lm} = \frac{i}{2}(a_{2,lm} - a_{-2,lm})$ isto é, são combinações lineares dos coeficientes da expansão em harmônicos esféricos de spin 2 dos coeficientes Q e U :

$$(\Delta_Q \pm i\Delta_U) = \sum a_{\pm 2,lm} Y_{\pm 2,lm}, \quad a_{\pm 2,lm} = \int (\Delta_Q \pm i\Delta_U) Y_{\pm 2,lm}.$$

Veja a discussão adiante, em que as expansões em harmônicos esféricos são definidas de modo apropriado.

⁹O caso de neutrinos massivos é bem mais complexo, mas é irrelevante para o presente estudo. Veja Giovannini (2005) para detalhes.

tenciais ϕ e ψ já foi discutida na seção 2.6.1), resta computar a evolução dos campos de velocidades v_b e v_c , bem como dos contrastes de densidade $\delta_c \equiv \delta\rho_c/\rho_c$ e $\delta_b \equiv \delta\rho_b/\rho_b$:

$$\delta'_c = -kv_c + 3\phi' \quad (4.17)$$

$$v'_c = -\frac{a'}{a}v_c + k\psi \quad (4.18)$$

$$\delta'_b = -kv_b + 3\phi' \quad (4.19)$$

$$v'_b = -\frac{a'}{a}v_b + k\psi + c_s^2 k\delta_b + \frac{4\rho_\gamma}{3\rho_b}\kappa'(3\Delta_{T_1}^{(e)} - v_b). \quad (4.20)$$

Em (4.20) acima, ρ_γ e ρ_b são os valores médios das densidades de fótons e bárions, respectivamente.

As equações análogas a (4.14) para o caso de perturbações tensoriais foram calculadas por Crittenden et al. (1993), por meio de um procedimento semelhante ao descrito acima. O resultado obtido é a equação

$$\begin{aligned} \Delta'_T{}^{(t)} + ik\mu\Delta_T{}^{(t)} &= -h' - \kappa' \left(\Delta_T{}^{(t)} - \mathbf{Y} \right) \\ \Delta'_P{}^{(t)} + ik\mu\Delta_P{}^{(t)} &= -\kappa' \left(\Delta_P{}^{(t)} + \mathbf{Y} \right) \\ \mathbf{Y} &= \left[\frac{1}{10}\Delta_{T_0}{}^{(t)} + \frac{1}{35}\Delta_{T_2}{}^{(t)} + \frac{1}{210}\Delta_{T_4}{}^{(t)} - \frac{3}{5}\Delta_{P_0}{}^{(t)} + \frac{6}{35}\Delta_{P_2}{}^{(t)} - \frac{1}{210}\Delta_{P_4}{}^{(t)} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

e o sistema de equações neste caso está completo, considerando que h evolui de acordo com a equação (2.76).

As equações (4.14 e 4.21) são formalmente do tipo

$$\mathcal{F}' + (ik\mu + \kappa')\mathcal{F} = \mathcal{S}, \quad (4.22)$$

onde \mathcal{F} é a anisotropia (de temperatura ou polarização, escalar ou tensorial) e \mathcal{S} é o termo fonte correspondente. A solução de (4.22) pode ser parametrizada na forma

$$\mathcal{F}(k, \tau_0) = \exp[-\mathcal{G}(k, \tau_0)] \int_0^{\tau_0} \exp[\mathcal{G}(k, \tau)] \mathcal{S}(k, \tau) d\tau, \quad (4.23)$$

onde o termo da fronteira $\tau \rightarrow 0$ é desprezível (SELJAK; ZALDARRIAGA, 1996) e a função \mathcal{G} é a solução da equação homogênea:

$$\mathcal{G}(k, \tau) = \int_0^\tau (ik\mu + \kappa') d\tau = ik\mu\tau + \int_0^\tau \kappa' d\tau - \kappa = ik\mu\tau - \kappa, \quad (4.24)$$

onde, mais uma vez, o termo de fronteira foram desprezados. Substituindo (4.24) em (4.23), resulta

$$\mathcal{F}(k, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} e^{-\kappa} \mathcal{S}(k, \tau) d\tau. \quad (4.25)$$

Na equação (4.25) acima, é conveniente incorporar a exponencial de κ no termo fonte, $e^{-\kappa}\mathcal{S} \equiv \tilde{\mathcal{S}}$, e expandir a exponencial restante em polinômios de Legendre,

$$e^{-ik\mu(\tau_0-\tau)} = \sum_l (-i)^l (2l+1) \mathcal{N}_l[k(\tau_0-\tau)] P_l(\mu),$$

onde $\mathcal{N}_l[k(\tau_0-\tau)]$ é a parte radial das autofunções harmônicas esféricas. O resultado fica

$$\mathcal{F}(k, \tau_0) = \sum_l (-i)^l (2l+1) \left[\int_0^{\tau_0} \mathcal{N}_l[k(\tau_0-\tau)] \tilde{\mathcal{S}}(k, \tau) d\tau \right] P_l(\mu) \quad (4.26)$$

e, comparando (4.26) e (4.10) conclui-se que os multipólos das anisotropias podem ser expressos na forma

$$\mathcal{F}_l(k, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} \mathcal{N}_l[k(\tau_0-\tau)] \tilde{\mathcal{S}}(k, \tau) d\tau, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{N}_l(y) = \begin{cases} j_l(y) & \text{escalar} \\ \sqrt{\frac{(l+2)!}{2(l-2)!}} y^{-2} j_l(y) & \text{tensorial} \end{cases}. \quad (4.28)$$

Portanto, para computar os multipólos $\Delta_{T_l}^{(t)}$ e $\Delta_{P_l}^{(t)}$ das anisotropias geradas pelo espectro primordial de ondas gravitacionais obtido no Capítulo 3, é preciso integrar (4.27) usando a parte tensorial de (4.28) e as expressões

$$\mathcal{S}_T^{(t)} = -e^{-\kappa} h' + \mathcal{K}\mathbf{Y} \quad \mathcal{S}_P^{(t)} = -\mathcal{K}\mathbf{Y}, \quad (4.29)$$

como termos fonte¹⁰. Contudo, é costume escrever o espectro da RCF em termos dos coeficientes C_l . Por esta razão, antes de realizar esse procedimento, é interessante definir claramente o espectro de potências angular.

Assumindo que a observação se realiza no ponto $\mathbf{x} = 0$, a exponencial é eliminada na equação (4.9) e sua expansão em harmônicos esféricos fica

$$\mathcal{F} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \mathcal{F}_l, \quad (4.30)$$

onde Y_{lm} é a parte angular das autofunções harmônicas esféricas, relacionadas diretamente com os polinômios de Legendre por

$$P_l(\mu) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \mu = \cos \theta \quad (4.31)$$

¹⁰Os termos fonte correspondentes para o caso escalar estão explicitados em Seljak e Zaldarriaga (1996).

Substituindo (4.31) em (4.26) e considerando (4.27), resulta

$$a_{lm} = \frac{(4\pi)(-i)^l}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \mathcal{F}_l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (4.32)$$

e os coeficientes C_l , definidos como

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle \equiv C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (4.33)$$

estão determinados. Além disso, a função de correlação de dois pontos para as perturbações de temperatura é facilmente obtida de (4.30), usando (4.31), (4.32) e (4.33):

$$C(\theta) \equiv \langle \mathcal{F}(\mathbf{n}) \mathcal{F}^*(\mathbf{n}') \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\mu), \quad \mu = \cos \theta = \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'). \quad (4.34)$$

As funções \mathcal{F}_l (eq. 4.27) são variáveis aleatórias com amplitudes e fases dependendo das condições iniciais. Como a evolução das equações de Boltzmann independe de \mathbf{k} , é lícito tomar, no caso de perturbações escalares (MA; BERTSCHINGER, 1995), $\mathcal{F}_l \rightarrow \Phi_{\text{ini}} \mathcal{F}_l$, onde Φ_{ini} é a condição inicial da perturbação invariante de gauge (veja seção 2.6.2). No caso de perturbações tensoriais, Φ_{ini} é substituído por h_{ini} . A função de correlação de dois pontos é simplesmente $\langle \Phi_{\text{ini}}(\mathbf{k}) \Phi_{\text{ini}}^*(\mathbf{k}') \rangle = \Delta_e^2(k) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$, ou $\langle h_{\text{ini}}(\mathbf{k}) h_{\text{ini}}^*(\mathbf{k}') \rangle = \Delta_t^2(k) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$, e os coeficientes C_l são prontamente expressos¹¹:

$$\begin{aligned} C_l^{(\beta)} &= \left[\frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \right]^2 (-i)^l (+i)^l \int \Delta_\beta^2 |\mathcal{F}_l|^2 \langle Y_{lm}^* Y_{lm} \rangle d\mathbf{k} \\ &= \frac{2}{\pi} \int \Delta_\beta^2 |\mathcal{F}_l|^2 k^2 dk \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $(\beta) = (e)$ ou (t) e, na última passagem, foi empregada a relação de ortogonalidade (BUTKOV, 1988)

$$\langle Y_{lm}^* Y_{l'm'} \rangle = \int_S Y_{lm}^* Y_{l'm'} \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.36)$$

e a expressão $d\mathbf{k} = 4\pi k^2 dk$, decorrente da simetria esférica do problema.

Em resumo, para calcular o espectro de anisotropias de temperatura (ou polarização) geradas por perturbações tensoriais é preciso, em primeiro lugar, computar os multipólos $\Delta_{T_i}^{(t)}$ (ou $\Delta_{P_i}^{(t)}$), usando a parte tensorial de (4.28) e o termo fonte $\mathcal{S}_T^{(t)}$ (ou $\mathcal{S}_P^{(t)}$), dado por (4.29), em (4.27); o resultado é aplicado diretamente na equação (4.35), junto com o espectro de potências inicial Δ_t^2 . Uma observação importante: o espectro Δ_t^2 que se insere na equação (4.35) é o espectro inicial inflacionário, dado pela equação (2.82) e mostrado

¹¹De modo consistente, a transformada de Fourier é definida com o fator $(2\pi)^{3/2}$ ao longo de todo o texto, mas muitos autores – como Ma e Bertschinger (1995) e Seljak e Zaldarriaga (1996), por exemplo – omitem esse termo e isso leva a um fator numérico diferente na expressão dos coeficientes C_l .

na Figura 5. Ou seja, toda informação sobre o aspecto evolutivo das ondas gravitacionais no período posterior à inflação, está contida em $\Delta_{T_i}^{(t)}$ (ou $\Delta_{P_i}^{(t)}$) e, mais precisamente, nos termos fonte.

Analisando as equações (4.29), nota-se que o termo fonte de polarização é suprimido se o meio é opticamente fino. Isso significa que, depois da reionização, a polarização devida a ondas gravitacionais é desprezível. Extrair a contribuição das perturbações tensoriais do espectro de polarização é, portanto, fundamental para verificar as condições iniciais empregadas no cálculo do Capítulo 3 e as perspectivas de se realizar esta tarefa, pelo menos em princípio, são particularmente interessantes. Se considerarmos os modos E e B (definidos em função dos coeficientes da expansão em harmônicos esféricos de spin 2 da combinação $\Delta_Q \pm i\Delta_U$ dos parâmetros de Stokes), observa-se que, embora ambas as perturbações, tensoriais e escalares, afetem o modo E , somente as tensoriais são capazes de se imprimir sobre o modo B . Quanto ao termo de temperatura, este é simplificado para $\mathcal{S}_T^{(t)} \approx -h'$ após a recombinação e, portanto, registra informações sobre o espectro de potências em eras mais recentes do Universo. Além disso, é interessante notar que a amplitude h cai rapidamente depois que um dado modo k entra no horizonte ($k \ll aH \Rightarrow h \sim \text{constante}/a$). Isso permite concluir que apenas os modos $k \lesssim k_*$ (onde $k_* = H_*a$ corresponde ao comprimento de onda da ordem do raio de Hubble H_* na época da recombinação) contribuem para o termo fonte $\mathcal{S}_T^{(t)}$.

O comportamento das funções κ e \mathcal{K} , necessárias ao cálculo dos coeficientes C_l desde antes da recombinação, é mostrado na Figura 12. Para obtê-la, é suficiente tomar a equação de Saha para a fração de ionização x_e no equilíbrio (KOLB; TUNER, 1990, Cap. 3):

$$\frac{1 - x_e}{x_e} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\pi} \eta \left(\frac{T}{m_e} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{B}{T} \right), \quad (4.37)$$

onde $\zeta(3) \approx 1.202$ é a função zeta de Riemann, $\eta = (\Omega_{b_0} h^2) 2,68 \times 10^{-8}$ é a razão bárion-fóton, $B = 13,6\text{eV}$ é a energia de ligação do hidrogênio, $m_e = 0,511\text{Mev}$ é a massa do elétron e a temperatura T relaciona-se com o redshift por $T = 2,75x$. Sabendo que a densidade eletrônica é $n_e = x_e n_b = x_e \eta n_\gamma \simeq x_e (\Omega_{b_0} h^2) x^3 1,13 \times 10^{-5} \text{cm}^{-3}$ e $\sigma_T = 6,65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$, a profundidade óptica diferencial $\kappa' = \sigma_T x_e n_e z/x$ é facilmente calculada e κ resulta da integral (4.15), mediante uma transformação de variáveis apropriada (de τ para x) e a função visibilidade \mathcal{K} é imediatamente obtida de (4.16). Os resultados, para κ e \mathcal{K} estão representados na Figura 12, no painel superior e inferior, respectivamente. Desses gráficos é possível perceber que, do ponto de vista termodinâmico, a transição de fase matéria-radiação é quase instantânea. A forma da função visibilidade reforça o

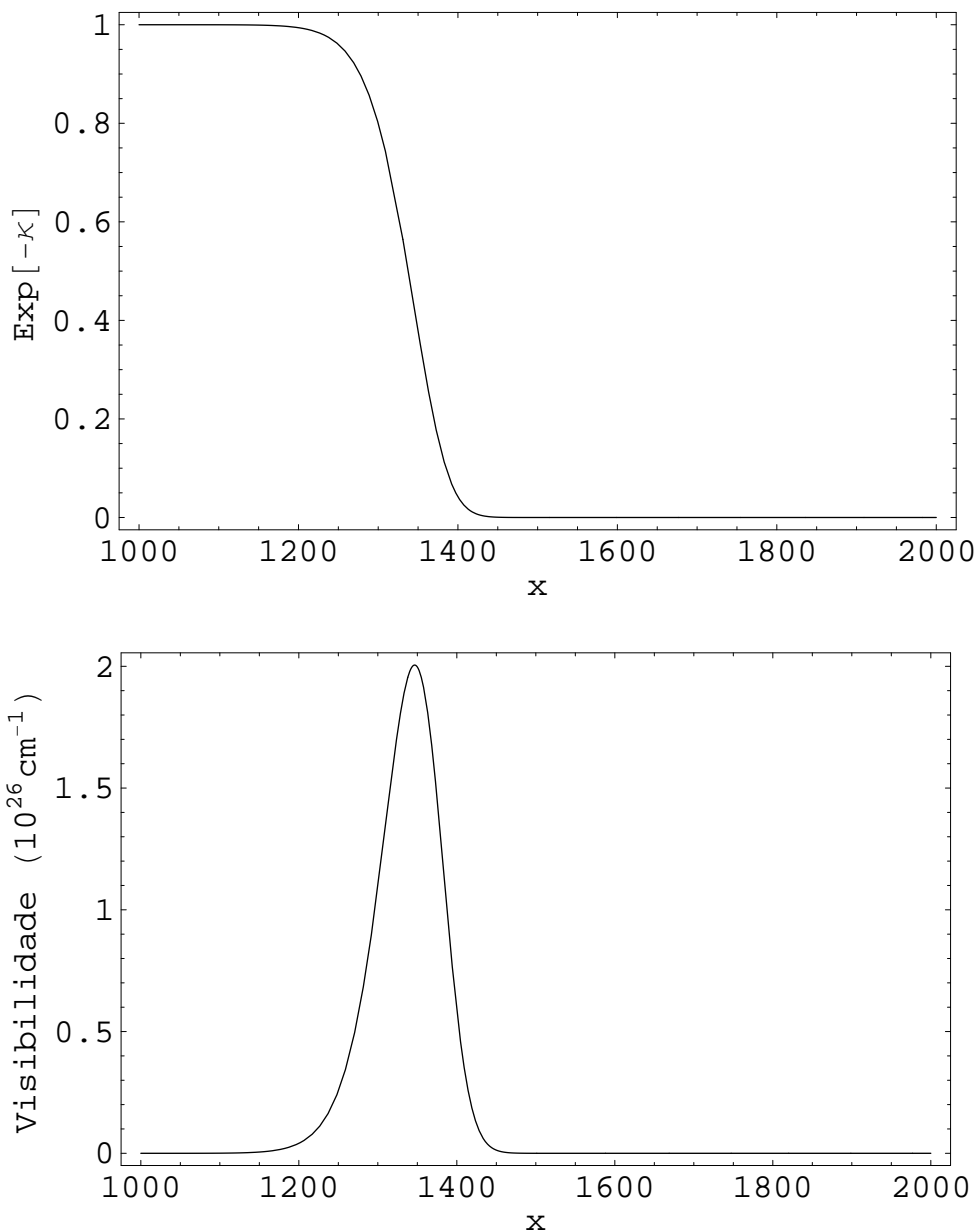


Figura 12: Perfil da profundidade óptica e função visibilidade em função do redshift.

argumento discutido acima de que o espectro de polarização só contém informações sobre as ondas gravitacionais primordiais em $x \simeq 1300$.

O espectro de potências das anisotropias de temperatura foi calculado segundo a prescrição acima, usando os perfis de κ e \mathcal{K} apresentados na Figura 12 e apenas a envoltória do espectro de ondas gravitacionais primordiais gerado no contexto do modelo Λ CDM, com $M = 10^{-14}$. Os limites de integração no espaço dos k ($k_{\min} = 1$ e $k_{\max} = 1500 \simeq k_*$) e dos x ($x_{\min} = 1$ e $x_{\max} = 1500$) foram escolhidos de modo a reduzir o custo computacional sem perder informações relevantes e o uso da envoltória do espectro de perturbações tensoriais tem o mesmo objetivo. Somente os multipólos $l \leq 10$ foram calculados e o

resultado nessa região é um espectro plano, com amplitude $C_l l(l+1)/2\pi = 41,1(\mu\text{K})^2$, conforme se vê na Figura 13¹².

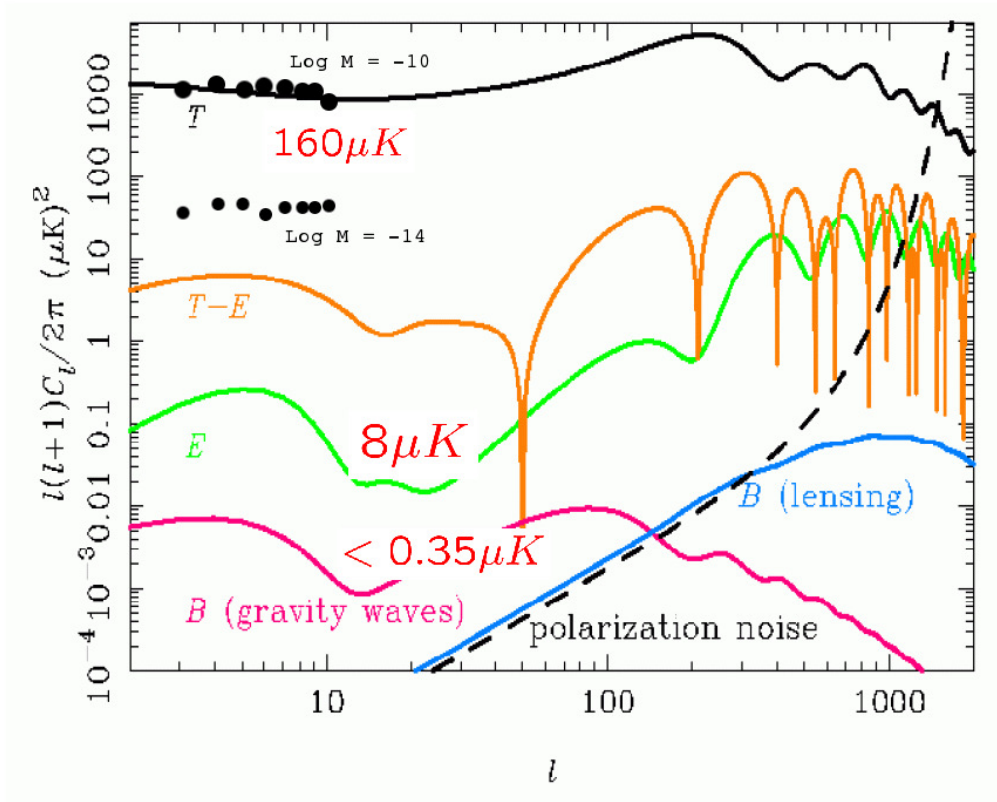


Figura 13: Espectro de anisotropias de temperatura (T), modos de polarização (E e B) e correlação (TE) induzidas por ondas gravitacionais primordiais; contribuição das perturbações escalares para o modo B, via lentes gravitacionais (B lensing); ruído esperado para medidas de polarização com o futuro detector Planck (linha tracejada). As curvas correspondem ao cálculo feito por Efstathiou e Chongchitnan (2006) e as séries inferior e superior de pontos correspondem ao cálculo realizado neste trabalho dos coeficientes $C_l \leq 10$ das perturbações de temperatura, para $M = 10^{-14}$ e $M = 10^{-10}$, respectivamente. Figura adaptada de Efstathiou e Chongchitnan (2006).

A forma plana do espectro é compatível com as previsões de Crittenden et al. (1993) e com trabalhos mais recentes, tanto teóricos (EFSTATHIOU; CHONGCHITNAN, 2006) quanto observacionais (SPERGEL et al., 2006), mas o valor encontrado é cerca de 25 vezes menor (seqüência inferior de pontos na Figura 13). Isso significa que a escala de energia M

¹²Essa figura foi adaptada de Efstathiou e Chongchitnan (2006), que obtiveram os espectros de temperatura e polarização usando um modelo Λ CDM com fase inflacionária slow-roll muito semelhante ao tratado aqui, mas considerando também transições de fase instantâneas entre as sucessivas eras de domínio dos fluidos cósmicos.

da inflação poderia ser maior do que o limite conservador adotado ao longo deste trabalho. Com $M = 10^{-10}$, essa diferença é suprimida: $C_l l(l+1)/2\pi = 1,01 \times 10^3 (\mu\text{K})^2$ (seqüência superior de pontos na Figura 13). Em outras palavras, o espectro de ondas gravitacionais atual pode ter no máximo a amplitude dada pela curva superior da Figura 11 e, neste caso mais otimista, estaria dentro dos limites de detectabilidade dos interferômetros espaciais LISA e BBO.

O limite superior $M = 10^{-14}$ ($E_{\text{inf}} = 10^{-3,5} m_{Pl}$), utilizado ao longo de todo o trabalho, advém diretamente da condição de que a amplitude das perturbações tensoriais da métrica não podem ser maiores que as anisotropias observadas e, à primeira vista, pode parecer contraditório o resultado apresentado acima, onde esse limite sobe para 10^{-10} ($E_{\text{inf}} = 10^{-2,5} m_{Pl}$). Sob um olhar mais criterioso, no entanto, nota-se que esse último resultado é obtido ao considerar os processos físicos envolvidos na geração de anisotropias induzidas por ondas gravitacionais. Trata-se de uma sofisticação do argumento apresentado na seção 3.4.1, feito às expensas de ingredientes físicos adicionais (especificamente as considerações a respeito do processo de recombinação), que determinam com que eficiência as perturbações tensoriais se imprimem sobre o espectro de anisotropias da RCF. Incertezas adicionais são introduzidas por esses novos ingredientes e, para evitá-las, foi feita a opção pelo limite mais conservador, $M = 10^{-14}$, ao efetuar as análises do Capítulo 3. Em geral, encontra-se na literatura valores limite estimados entre $M \simeq 10^{-8}$ (KOLB; TUNER, 1990) e $M \simeq 10^{-11}$ (EFSTATHIOU; CHONGCHITNAN, 2006), ou seja, em razoável acordo com os resultados ora apresentados.

4.2.2 O cenário observacional

A era das medidas de alta-precisão da RCF começou em 1992, com o satélite COBE (BENNETT et al., 1996; TEGMARK, 1996), mais precisamente com o DMR (Differential Microwave Radiometer), um instrumento que era capaz de medir o espectro angular até $l \simeq 25$ ou seja, com uma resolução angular¹³ de $\simeq 7^\circ$. Depois do COBE, vários experimentos foram desenvolvidos com melhor resolução para atingir multipólos maiores. A existência do primeiro pico acústico, em $l \simeq 220$, ficou definitivamente comprovada com os experimentos em balões – Boomerang (DE BERNARDIS et al., 2002) e Maxima (LEE et al., 2001). O WMAP (BENNETT et al., 2003; SPERGEL et al., 2006), uma missão iniciada em 2001 e com duração prevista de quatro anos, constitui um experimento da terceira geração, com resolução angular de ~ 15 minutos de arco. Depois de um ano de

¹³O ângulo θ de abertura angular relaciona-se com o multipólo por $\theta \simeq \pi/l$, com θ dado em radianos.

operação, foi capaz de determinar a posição do primeiro pico acústico com precisão, em $l = 220,1 \pm 0,8$ (PAGE et al., 2003), e uma clara evidência de um segundo pico foi observada. Os resultados do terceiro ano determinaram a posição dos dois primeiros picos, $l = 220,7 \pm 0,7$ e $l = 531,3 \pm 3,5$ (HINSHAW et al., 2006), indicando ainda um terceiro pico. Quanto ao espectro de polarização, este era medido em função da correlação TE , mas devido à importância do espectro de polarização para separar as contribuições tensorial e escalar, os últimos resultados do WMAP incluem uma análise dos modos E e B em separado. A próxima geração consiste no projeto Planck (EFSTATHIOU et al., 2006), um satélite que deve ser lançado em 2007, planejado para atingir resolução angular de 5 minutos de arco, atingindo $l \simeq 2500$.

A detecção de ondas gravitacionais usando dados da RCF é uma tarefa bastante complexa pois, a despeito da qualidade dos dados (que, de acordo com esse quadro apresentado acima, tende a melhorar significativamente na próxima década), a assinatura do fundo de ondas gravitacionais cósmicas não é imediatamente reconhecível. É preciso ter em conta o fato de que, além das contribuições secundárias, há a contribuição das perturbações escalares.

A razão entre a amplitude das perturbações tensoriais e escalares ($r = \Delta_t^2/\Delta_e^2$) é normalmente estimada em $\sim 0,3$ (este valor é obtido através da fórmula $r = 16\varepsilon$). Spergel et al. (2006) obtiveram o limite $r < 0,28$, combinando o últimos dados do WMAP e surveys de galáxias; Zhao e Zhang (2006), utilizaram $r = 0,36$, com base nos resultados do WMAP de 2001. Isso significaria que a contribuição das perturbações tensoriais é subdominante, mas há uma séria controvérsia a esse respeito. Grishchuk (2003, 2005) chama atenção para o fato de que não há razão física para que r seja significativamente diferente da unidade, pois os mecanismos invocados para gerar as perturbações são os mesmos. Essa consideração torna-se particularmente interessante no limite da inflação de Sitter, caso em que a razão r deveria ser nula (pois $\varepsilon \rightarrow 0$). As duas interpretações possíveis para esse resultado – a amplitude das perturbações escalares tendendo ao infinito ou os modos tensoriais tendendo a zero – são incompatíveis com os resultados teóricos discutidos neste trabalho e a primeira delas, em particular, é absolutamente incompatível com o cenário cosmológico mais aceito atualmente, tanto do ponto de vista teórico quanto observacional. Segundo Grishchuk (2005), o problema está na interpretação da das perturbações escalares que, quando quantizadas corretamente, levam ao resultado: $r \rightarrow 1$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\eta \rightarrow 0$. Para evitar essas possíveis ambigüidades, uma perspectiva particularmente interessante é a análise do espectro de polarização, pois, se através do espectro de temperatura é possível obter a contribuição conjunta das perturbações tensorial e escalar,

é através do espectro de polarização que, por outro lado, é possível separar um modo (o modo B) cuja contaminação por perturbações escalares é praticamente nula¹⁴. Assim as condições iniciais do espectro (imediatamente após a inflação) podem, em princípio, ser univocamente determinadas.

Em síntese, é fácil perceber, tomando como exemplo a discussão acima, que, embora os esforços realizados no campo observacional indiquem promissoras perspectivas de detectar o espectro primordial de ondas gravitacionais dentro dos próximos 10 anos, essa via indireta de investigação ainda não está pavimentada. Ao contrário, muito trabalho teórico ainda precisa ser feito para que se possa trilhar com segurança esses caminhos. E neste sentido, é interessante destacar que tais trabalhos já estão em andamento. Durante a preparação deste texto, Baskaran et al. (2006) publicaram um extenso trabalho, no qual a contribuição dos modos tensoriais sobre a RCF é computada de primeiros princípios. Eles concluem que a anti-correlação entre temperatura e polarização, observada em $l \approx 30$ pelo WMAP, é uma clara assinatura de que ondas gravitacionais estão induzindo essa correlação negativa (em contraposição à correlação positiva, que seria esperada no caso de perturbações escalares) e propõem que medidas precisas sejam feitas em ls ainda menores. Ou seja, a via indireta de detecção de ondas gravitacionais já começa a ser trilhada.

¹⁴Espera-se uma pequena contribuição dos modos escalares devida ao fenômeno de lentes gravitacionais, que pode converter modos E em B ; mas essa contaminação pode ser extraída dos dados através de simulações numéricas (SELJAK; HIRATA, 2003).

5 *Epílogo*

A partir de primeiros princípios, a origem e evolução do fundo cosmológico de ondas gravitacionais foi computada consistentemente, empregando as teorias da relatividade geral e de perturbações cosmológicas, no contexto de distintas cosmologias. A evolução temporal das perturbações tensoriais é regida, no regime clássico, por uma equação diferencial que pode ser interpretada como a de um oscilador excitado por um potencial efetivo a''/a , ou seja, o espectro de potências Δ_t^2 depende da evolução do fator de escala do universo. As condições iniciais do problema são determinadas durante a era inflacionária, em $z \gtrsim 10^{25}$, quando o regime quântico se estabelece. Ambos os regimes, clássico e quântico, foram tratados no bojo do Capítulo 2, dedicado à apresentação das bases formais do problema. A aplicação de um método semi-analítico permitiu evoluir o sistema, sem lançar mão da aproximação super-adiabática (que leva em conta apenas os comportamentos assintóticos $a''/a \ll k^2$ e $a''/a \gg k^2$) e sem tampouco considerar transições instantâneas entre as sucessivas fases de domínio da radiação, matéria e energia escura no fluido cósmico.

De fato, enquanto um dado modo k permanece fora do horizonte, i.e., atende à “condição de congelamento” $a''/a \gg k^2$, ele mantém suas condições iniciais praticamente inalteradas e, quando seu comprimento de onda físico fica muito menor que o raio de Hubble, $a''/a \ll k^2$, então sua amplitude cai proporcionalmente a $1/a$, para todo e qualquer valor de k . Isso significa que a forma do espectro depende fundamentalmente (*i*) das condições iniciais e (*ii*) do fator de escala $a(\tau)$ nos instantes em que os modos estão no limiar do horizonte, $a''/a \sim k^2$.

Para um modelo inflacionário do tipo de Sitter, com parâmetros $\varepsilon = \eta = 0$, o espectro inicial é plano. À medida que os modos entram no horizonte, logo após a inflação até redshifts da ordem de 10^4 , o espectro assume uma inclinação, na região de altas frequências ($k > 10^4$), que se mantém fixa nas eras subseqüentes (índice espectral $\approx -1, 4$). Os modos com número de onda k entre $\sim 10^4$ e $\sim 10^2$ entram no horizonte durante o período de transição entre as eras da radiação e da matéria e, portanto, aproximar a curva suave

da equação de estado efetiva por uma função escada (cf. Figura 4) implica em alterar significativamente a forma do espectro nessa região. A região de baixa frequência ($10 \lesssim k < 10^2$), por sua vez, é afetada pela fase de domínio da matéria não-relativística e, especialmente para $1 \leq k \lesssim 10$, o espectro reflete a transição matéria-energia escura. Novamente, considerar uma mudança abrupta da equação de estado efetiva do Universo recente é pouco razoável. Por esse motivo, a forma do espectro final de ondas gravitacionais (tal como seria visto por um detector em $z = 0$), obtido por meio do método semi-analítico descrito na seção 3.2, difere qualitativamente dos cálculos realizados por outros autores, que usam essa hipótese simplificadora, apenas na região de $k \leq 10^4$. Por exemplo, o espectro calculado por Zhang et al. (2006) apresenta uma inclinação negativa mais acentuada nessa região do que na de alta frequência, ao passo que o espectro apresentado em 3.4.2 tem inclinação próxima de zero nessa região (veja as Figuras 7 e 8). Por outro lado, a amplitude do espectro final depende da escala de energia da inflação e de quanto o universo expandiu desde que a condição de congelamento deixou de ser atendida para todos os k . Fixando o modelo cosmológico, a amplitude depende apenas da escala de energia M da inflação.

Quanto à energia escura, a análise feita em 3.4.3 demonstra que, por ser um fluido que domina em eras recentes, as ondas gravitacionais não são fortemente afetadas por sua presença e os diversos modelos em estudo – constante cosmológica, fluido X (fantômico ou não), gás de Chaplygin generalizado e quintessência – são praticamente degenerados entre si. Na Figura 9, por exemplo, nota-se que o caso extremo $\omega_{ee} = -1,8$ leva a uma diferença $\delta_{\log_{10}h_c} \equiv \Delta \log_{10}h_c / \log_{10}h_c \approx 2$, com relação ao modelo de constante cosmológica, $\omega_{ee} = 1$. Refraseando, tem-se que $\delta_{\log_{10}h_c} \approx 0,4\delta_\omega$, onde $\delta_\omega \equiv \Delta\omega/\omega = 0,8$. Portanto, estabelecer vínculos para os modelos de energia escura com observações do espectro de ondas gravitacionais primordiais não é uma tarefa viável, embora à primeira vista essa idéia pareça promissora, considerando que tanto as ondas gravitacionais quanto a energia escura interagem apenas gravitacionalmente. Para obter uma medida grosseria de quão vã seria essa esperança, pelo menos diante do presente cenário observacional, basta notar que para determinar ω com $\delta_\omega < 1\%$, seria preciso medir o espectro de ondas gravitacionais com precisão $\delta_{\log_{10}h_c} \lesssim 0,4\%$, considerando que a escala de energia M seja fixada de modo independente e que uma equação de estado do tipo fluido X ($p = \omega\rho$, $\omega < 0$) seja assumida *a priori*.

Neste ponto, é importante reiterar que, embora a sensibilidade dos experimentos de barras ressonantes tenha melhorado em cerca de 6 ordens de magnitude desde a década de 60 (cf. Tabela 2) e, além disso, os prospectos apontem para uma diminuição de

mais uma ordem nos níveis de ruído das esferas ressonantes (Tabela 3) e de até duas nos de interferômetros (Tabela 4), estes notáveis avanços não são suficientes para que se espere detectar o fundo cosmológico de ondas gravitacionais. A razão disso é a faixa de frequências na qual esses detectores operam: entre 10 e 10^4 Hz, aproximadamente, onde o espectro primordial tem amplitude baixa demais para ser observável. As perspectivas são mais promissoras para os detectores espaciais LISA e BBO, que deverão operar nas faixas de $10^{-4} - 1$ Hz e $10^{-3} - 100$ Hz, respectivamente. No entanto, estes são projetos em fase de elaboração, e não devem entrar em operação antes de 2015.

Entretanto, se por um lado é preciso ter paciência e esperar cerca de uma década pela detecção direta das ondas gravitacionais cósmicas tratadas neste trabalho, a RCF fornece, por outro lado, uma possibilidade concreta e, quiçá imediata, de se obter essas informações. O espectro de temperatura das anisotropias da RCF é influenciado, por meio do efeito Sachs-Wolfe, tanto pelas perturbações escalares quanto tensoriais e separar efetivamente as duas contribuições não é uma tarefa trivial; já o espectro de polarização reflete os dois tipos de perturbação em dois modos distintos, E e B , este gerado exclusivamente pelos modos tensoriais, aquele produzido por ambos. Além disso, o efeito das ondas gravitacionais se imprime sobre o espectro de polarização da RCF durante um curto período de tempo, quando a função visibilidade é não nula (veja o gráfico inferior na Figura 12), sendo sensível principalmente aos modos que estão prestes a entrar no horizonte naquele redshift. Ou seja, o modo de polarização B carrega informações sobre as perturbações tensoriais praticamente inalteradas desde o fim da inflação e medi-lo significa, pelo menos em princípio, medir o espectro inicial de ondas gravitacionais cosmológicas.

A escala de energia M influencia a amplitude desse espectro inicial, onde entende-se por “inicial” o espectro imediatamente posterior à inflação (Figura 5). É possível, portanto, extrair a relação $\delta \log_{10} h_c|_{\text{ini}} \approx 2,1 \delta \log_{10} M$ e concluir que, se as medidas de polarização da RCF permitirem estabelecer a amplitude característica do espectro inicial de perturbações tensoriais com erro da ordem de 20%, então, o valor de M estaria estabelecido com $\delta \log_{10} M \sim 10\%$.

Uma vez extraída a informação sobre o espectro inicial no modo B , a separação entre as contribuições tensorial e escalar no modo E (e também no espectro de temperatura T) pode ser realizada. Para tanto, é preciso conhecer a evolução das ondas gravitacionais, pois o efeito sobre o espectro de temperatura tem uma componente integrada. Em princípio esse cálculo é perfeitamente factível e, em um estudo recente (BASKARAN et al., 2006), essa tarefa já começa a se concretizar, através da busca por assinaturas de ondas

gravitacionais no espectro de correlação TE . Dados das anisotropias da RCF têm sido tomados, com resolução de 15 minutos de arco, pelo satélite WMAP e, embora a precisão atual dos dados não seja suficiente para mais que um vislumbre da presença das ondas gravitacionais, está previsto para 2007 o lançamento do satélite Planck, que deverá tomar dados com resolução três vezes melhor.

Essas perspectivas promovem grande efervescência entre teóricos e observacionais e duas frentes complementares de trabalho estão em franca atividade: a *primeira* objetiva superar os desafios observacionais, seja pela via direta (investindo na elaboração e construção de interferômetros espaciais), ou indireta (buscando, além da RCF, formas alternativas de observar ondas gravitacionais de baixa frequência); a *segunda* parte na direção do entendimento teórico preciso tanto dos efeitos das ondas gravitacionais sobre a RCF (indispensável para que os dados do WMAP ou Planck sejam de fato úteis), quanto dos diversos elementos que influenciam o espectro de ondas gravitacionais, modificando-o em sua forma ou amplitude.

Para os que atuam na *primeira* frente, é motivo de preocupação o efeito de fontes estocásticas não cosmológicas sobre o espectro a ser observado. Exceto pelo modo de polarização B da RCF, este é um problema tanto para os detectores diretos quanto indiretos. Na RCF isso se reflete nas anisotropias secundárias; nos interferômetros espaciais, haverá uma superposição de sinais, pois há um grande número fontes astrofísicas na faixa de $10^{-4} - 100$ Hz, mas espera-se que essas fontes estejam concentradas principalmente no plano galáctico e que fora dessa região, o espectro isotrópico de radiação gravitacional primordial seja dominante. Outra possibilidade para contornar esse problema é observar ondas gravitacionais em frequências ainda mais baixas e isso é possível, pelo menos em princípio, através do monitoramento de pulsares, especialmente os binários. Esse retorno aos primórdios da era observacional das ondas gravitacionais é interessante porque tanto o pulsar em si, como seu movimento orbital em torno de um objeto secundário funcionam como relógios altamente estáveis, cuja frequência de pulsos é modulada pela presença de ondas gravitacionais. Um array de rádio-telescópios em escala mundial, o SKA, está em planejamento e deve entrar em operação em 2020 (KRAMER et al., 2004), tornando viável essa alternativa.

A *segunda* frente de trabalho, a teórica, embora esteja décadas a frente da tão esperada contrapartida observacional, ainda tem um longo e árduo caminho pela frente. Além de computar detalhadamente os efeitos do fundo gravitacional sobre os observáveis em potencial – RCF, ou pulsares – a fim de extrair dos dados a informação desejada, é perti-

nente estudar os efeitos dos fenômenos físicos conhecidos sobre o espectro, estabelecendo previsões para os futuros experimentos. Neste sentido, o estudo ora apresentado enfoca a evolução do espectro primordial em diferentes cosmologias, tratando precisamente a evolução da equação de estado efetiva do Universo; mas falta ainda tratar modelos mais sofisticados de inflação (modelos quasi-de Sitter, com parâmetros ε e η não-nulos, por exemplo) e considerar a física do processo de reaquecimento – o processo que marca o fim da inflação e o início da era da radiação – que foi assumido instantâneo e 100% eficiente. Outros autores, como Zhang et al. (2006) introduzem esses efeitos em seus cálculos, mas sempre considerando variações instantâneas da equação de estado efetiva. Uma sofisticação adicional do presente cálculo seria incluir os fenômenos que ocorrem durante a era da radiação, alterando a evolução do fator de escala do Universo. Watanabe e Komatsu (2006) fizeram essa consideração e, partindo do modelo padrão da física de partículas, concluem que pequenas variações instantâneas da equação de estado efetiva devem ocorrer devido à mudança nos graus de liberdade relativísticos dos neutrinos durante a era da radiação, levando ao surgimento de estruturas no espectro de ondas gravitacionais primordiais na região de alta frequência. No entanto, o fato é que o espectro cai rapidamente com a frequência e tanto os efeitos calculados por Watanabe e Komatsu (2006) quanto os do reaquecimento têm pouca chance de ser observados pela primeira geração bem sucedida de experimentos.

Feita a síntese do trabalho, é lícito retomar a imagem pictórica empregada no princípio para dizer que a tradução da geometria do espaço-tempo em gravitação, possível graças à pedra de Roseta algébrica que ficou conhecida como teoria da relatividade geral, possibilitou à comunidade científica o acesso a um volume de informações antes inimaginável sobre o Universo primordial. Tais informações foram impressas na forma oscilante e intrincada do espectro de ondas gravitacionais, os hieróglifos primeiros por excelência. O avanço no domínio desse novo idioma depende de intensos estudos teóricos que desvendem sua ortografia (as regras de formação do espectro) e sintaxe (seu sentido físico em conexão com outros observáveis); mas sobretudo, depende de aplicar esses conhecimentos teóricos sobre ao menos uma ou duas linhas de texto empiricamente recolhido e, para tanto, importantes missões arqueológicas (ou melhor, cosmológicas) devem ser empreendidas no futuro próximo. Ambas as frentes de trabalho, empírica e teórica, avançam dia a dia e o trabalho que se conclui nestas páginas representa uma contribuição para esse avanço.

Referências

- ABAZAJIAN, K.; ADELMAN-MCCARTHY, J. K.; AGÜEROS, M. A.; ALLAM, S. S. et al. The first data release of the Sloan Digital Sky Survey. *Astron. J.*, v. 126, p. 2081, 2003.
- ACERNESE, F.; AMICO, P.; AOUDIA, S.; ARNAUD, N. et al. Virgo and the world wide search for gravitational waves. In: VILASI, G.; ESPOSITIO, G.; LAMBIASE, G.; MARMO, G. et al. (Ed.). *General Relativity and Gravitational Physics: 16th SIGRAV Conference on General Relativity and Gravitational Physics*. New York: AIP Conf. Procs., 2005. v. 751, p. 185.
- ACERNESE, F.; AMICO, P.; AOUDIA, S.; ARNAUD, N. et al. Virgo status and comissioning results. *Class. Quantum Grav.*, v. 22, p. 185, 2005.
- AGUIAR, O. D.; ANDRADE, L. A.; BARROSO, J. J.; BORTOLI, F. et al. The brazilian gravitational wave detector Mario Schenberg: progress and plans. *Class. Quantum Grav.*, v. 22, p. 209, 2005.
- ANDO, M.; TSUBONI, K.; The TAMA Collaboration. TAMA project: design and current status. In: MESHKOV, S. (Ed.). *Gravitational Waves: Third Edoardo Amaldi Conference*. New York: AIP Conf. Procs., 2000. v. 523, p. 128.
- ARMENDÁRIZ-PICÓN, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late-time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, p. 4438, 2000.
- ARMENDÁRIZ-PICÓN, C.; MUKHANOV, V.; STEINHARDT, P. J. Essentials of k-essence. *Phys. Rev. D*, v. 63, p. 103510, 2001.
- ASTONE, P.; BABUSCI, D.; BASSAN, M.; BONIFAZI, P. et al. The next science run of the gravitational wave detector NAUTILUS. *Class. Quantum Grav.*, v. 19, p. 1911, 2002.
- ASTONE, P.; BASSAN, M.; BONIFAZI, P.; CARELLI, P. et al. Long-term operation of the Rome "Explorer" cryogenic gravitational wave detector. *Phys. Rev. D*, v. 47, p. 362, 1993.
- ASTONE, P.; BASSAN, M.; BONIFAZI, P.; CARELLI, P. et al. The EXPLORER gravitational wave antenna: recent improvements and performances. *Class. Quantum Grav.*, v. 19, p. 1905, 2002.
- BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, v. 22, p. 1882, 1980.
- BASKARAN, D.; GRISHCHUK, L. P.; POLNAREV, A. G. Imprints of Relic Gravitational Waves in Cosmic Microwave Background Radiation. 2006. gr-qc/0605100.

- BATTYE, R. A.; BUCHER, M.; SPERGEL, D. Domain wall dominated universes. 1999. astro-ph/9908047.
- BENNETT, C. L.; BANDAY, A. J.; GÓRSKI, K. M.; HINSHAW, G. et al. Four-year COBE DMR cosmic microwave background observations: maps and basic results. *Astrophys. J. Lett.*, v. 464, p. 1, 1996.
- BENNETT, C. L.; HALPERN, M.; HINSHAW, G.; JAROSIKAND, N. et al. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: preliminary maps and basic results. *Astrophys. J. Suppl.*, v. 148, p. 1, 2003.
- BENTO, M. C.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Phys. Rev. D*, v. 66, p. 043507, 2002.
- BLAIR, D. G.; IVANOV, E. N.; TOBAR, M. E.; TURNER, P. J. et al. High sensitivity gravitational wave antenna with parametric transducer readout. *Phys. Rev. Lett.*, v. 74, p. 1908, 1995.
- BLAU, S. K.; GUTH, A. H. Inflationary cosmology. In: HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. (Org.). *300 years of gravitation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. p. 524.
- BOND, J. R.; A., S. The collisionless damping of density fluctuations in an expanding universe. *Astrophys. J.*, v. 274, p. 443, 1983.
- BOND, J. R.; EFSTATHIOU, G. Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter. *Astrophys. J. Lett.*, v. 285, p. 45, 1984.
- BOND, J. R.; EFSTATHIOU, G. The statistics of cosmic background radiation fluctuations. *MNRAS*, v. 226, p. 655, 1987.
- BOYLE, L. A.; STEINHARDT, P. J. Probing the early universe with inflationary gravitational waves. 2005. astro-ph/0512014.
- BURKE, W. L. *Applied differential geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- CALDWELL, R. R. A phantom menace? cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. *Phys. Lett. B*, v. 545, p. 23, 2002.
- CAPOZZIELLO, S.; CARDONE, V. F.; CARLONI, S.; TROISI, A. Curvature quintessence matched with observational data. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 12, p. 1969, 2003.
- CARR, H. W. The metaphysical aspects of relativity. *Nature*, v. 106, p. 809, 1921.
- CARROLL, S. M. Quintessence and the rest of the world: Suppressing long-range interactions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, p. 3067, 1998.
- CARROLL, S. M. The cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, v. 4, p. 1, 2001.
- CARROLL, S. M.; DUVVURI, V.; TRODDEN, M.; TURNER, M. S. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? *Phys. Rev. D*, v. 70, p. 043528, 2004.

- CASINI, P. *Newton e a consciência européia*. São Paulo: Unesp, 1995.
- CERDONIO, M. Acoustic GW detectors in the 2010 time frame. *Class. Quantum Grav.*, v. 20, p. 23, 2003.
- CHIBA, T.; OKABE, T.; YAMAGUCHI, M. Kinetically driven quintessence. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 023511, 2000.
- COCCIA, E. Bars in action. In: MESHKOV, S. (Ed.). *Gravitational Waves: Third Edoardo Amaldi Conference*. New York: AIP Conf. Procs., 2000. v. 523, p. 32.
- COLES, P. The state of the universe. *Nature*, v. 433, p. 248, 2005.
- COLES, P.; ELLIS, G. F. R. The case for an open universe. *Nature*, v. 370, p. 609, 1994.
- COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. 2006. hep-th/0603057.
- CORBIN, V.; CORNISH, N. J. Detecting the cosmic gravitational wave background with the Big Bang Observer. *Class. Quantum Grav.*, v. 23, p. 2435, 2006.
- CORRY, L. Herman Minkowski and the postulate of relativity. *Arch. Hist. Exact Sci.*, v. 51, p. 273, 1997.
- CRITTENDEN, R. et al. Imprint of gravitational waves on the cosmic microwave background. *Phys. Rev. Lett.*, v. 71, p. 324, 1993.
- CUNNINGHAM, E. Relativity: the growth of an idea. *Nature*, v. 106, p. 784, 1921.
- DANZMANN, K.; RÜDIGER, A. LISA Tehcnology – concepts, status, prospects. *Class. Quantum Grav.*, v. 20, p. 51, 2003.
- DE BERNARDIS, P.; ADE, P. A. R.; BOCK, J. J.; BOND, J. R. et al. Multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background: significance and consequences for cosmology. *Astrophys. J.*, v. 564, p. 559, 2002.
- DE WAARD, A. MINIGRAIL progress report 2004. *Class. Quantum Grav.*, v. 22, p. 215, 2005.
- DODELSON, S.; GATES, E.; STEBINS, A. Cold + hot dark matter and the cosmic microwave background. 1995. astro-ph/9509147.
- DODELSON, S.; KINNEY, W. H.; KOLB, E. W. Cosmic microwave background measurements can discriminate among inflation models. *Phys. Rev. D*, v. 56, p. 3207, 1997.
- DVALI, G. R.; GABADAZE, G.; PORRATI, M. 4D gravity on a brane in 5D Minkowski space. *Phys. Lett. B*, v. 485, p. 208, 2000.
- EFASTATHIOU, G.; CHONGCHITNAN, S. The Search For Primordial Tensor Modes. 2006. astro-ph/0603118.

- EFSTATHIOU, G.; LAWRENCE, C.; TAUBER, J. (Ed.). *PLANCK: The scientific program*. ESA/Planck Science Team, 2006. Disponível em: <[http://www.rssd.esa.int/SA/PLANCK/docs/Bluebook-ESA-SCI\(2005\)1_V2.pdf](http://www.rssd.esa.int/SA/PLANCK/docs/Bluebook-ESA-SCI(2005)1_V2.pdf)>.
- EINSTEIN, A. A brief outline of the development of the theory of relativity. *Nature*, v. 106, p. 782, 1921.
- ELLIS, G. F. R.; SOTOEGGER, W. The 'fitting problem' in cosmology. *Class. Quantum Grav.*, v. 4, p. 1697, 1987.
- FABRIS, J. C.; GONÇALVES, S. V. B.; SOARES-SANTOS, M. Gravitational waves in the generalized Chaplygin gas model. *Gen. Rel. Grav.*, v. 36, p. 2559, 2004.
- FUKUGITA, M.; PEEBLES, P. J. E. The cosmic energy inventory. *Astrophys. J.*, v. 616, p. 643, 2004. astro-ph/0406095.
- GARRIGA, J.; VILENKIN, A. On likely values of the cosmological constant. *Phys. Rev. D*, v. 61, p. 083502, 2000.
- GERTSENSHTEIN, M. E.; PUSTOVOIT, V. I. *JETP*, v. 16, p. 433, 1962.
- GIOVANNINI, M. Theoretical tools for CMB physics. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 14, p. 363, 2005. CERN-PH-TH/2004-140, astro-ph/0412601.
- GRISHCHUK, L. P. Amplification of gravitational waves in an isotropic universe. *JETP*, v. 40, p. 409, 1975.
- GRISHCHUK, L. P. Relic gravitational waves and their detection. *Lect. Notes Phys.*, v. 562, p. 167, 2001.
- GRISHCHUK, L. P. Update on gravitational-wave research. 2003. gr-qc/0305051.
- GRISHCHUK, L. P. Relic gravitational waves and cosmology. 2005. gr-qc/0504018.
- GROTE, H. et al. The status of GEO600. *Class. Quantum Grav.*, v. 22, p. 193, 2005.
- GUO, Z.; OHTA, N.; ZHANG, Y. Parametrization of quintessence and its potential. 2005. astro-ph/0505253.
- GUSTAFSON, E.; SHOEMAKER, D.; STRAIN, K.; WEISS, R. LSC White Paper on detector research and development. 1999. Disponível em: <<http://www.ligo.caltech.edu/docs/T/T990080-00.pdf>>.
- GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problem. *Phys. Rev. D*, v. 23, p. 347, 1981.
- HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. (Org.). *300 years of gravitation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- HINSHAW, G.; NOLTA, M. R.; BENNETT, C. L.; BEAN, R. et al. Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: temperature analysis. 2006. astro-ph/0603451.
- HOGG, D. W. Distance measures in cosmology. 1999. astro-ph/9905116.

- HU, W.; SUGIYAMA, N.; SILK, J. The physics of microwave background anisotropies. *Nature*, v. 386, p. 37, 1997. astro-ph/9604166.
- ISLAM, J. N. *An introduction to mathematical cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- KAMENSHCHIK, A. Y.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. An alternative to quintessence. *Phys. Lett. B*, v. 511, p. 265, 2001.
- KENYON, I. R. *General Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- KOLB, E. W.; TUNER, M. S. *The Early Universe*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1990.
- KRAMER, M.; BACKER, D. C.; CORDES, J. M.; LAZIO, T. J. W. et al. Strong-field tests of gravity using pulsars and black holes. In: CARILLI, C.; RAWLINGS, S. (Ed.). *Science with the Square Kilometer Array*. Elsevier, 2004, (New Astronomy Reviews, v. 48). cap. 3. Disponível em: <<http://www.skatelescope.org/PDF/sciencebook/chap3.pdf>>.
- LANDAU, L. D.; LIFCHITZ, E. *Physique Statistique*. Moscou: Éditions de la Paix, 1969. (Physique Théorique, v. 5).
- LANDAU, L. D.; LIFCHITZ, E. *Théorie du Champ*. Moscou: Éditions de la Paix, 1969. (Physique Théorique, v. 2).
- LANGLOIS, D. Inflation, quantum fluctuations and cosmological perturbations. 2004. hep-th/04055053.
- LEE, A. T.; ADE, P.; BALBI, A.; BOCK, J. et al. A high spatial resolution analysis of the MAXIMA-1 cosmic microwave background anisotropy data. *Astrophys. J. Lett.*, v. 561, p. 1, 2001.
- LINDE, A. Inflation and quantum cosmology. In: HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. (Org.). *300 years of gravitation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. p. 604.
- LINDE, A. D. A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Phys. Lett.*, v. 108B, p. 389, 1982.
- LINDE, A. D. Chaotic inflation. *Phys. Lett.*, v. 129B, p. 177, 1983.
- LINDER, E. V. Microwave background anisotropy induced by gravitational waves. *Astrophys. J.*, v. 326, p. 517, 1988.
- LYTH, D.; RIOTTO, A. Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation. *Phys. Rep.*, v. 314, p. 1, 1999. hep-ph/9807278.
- MA, C.-P.; BERTSCHINGER, E. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. *Astrophys. J.*, v. 455, p. 7, 1995.
- MAGGIORE, M. Gravitational wave experiments and early Universe cosmology. *Phys. Rep.*, v. 331, p. 283, 2000.

- MAIA, M. R. G. Spectrum and energy density of relic gravitons in flat Robertson-Walker universes. *Phys. Rev. D*, v. 48, p. 647, 1993.
- MALDACENA, J. Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *JHEP*, v. 305, p. 13, 2003. astro-ph/0210603.
- MATHER, J. C.; CHENG, E. S.; COTTINGHAM, D. A.; EPLEE, R. E. et al. Measurement of the cosmic background spectrum by the COBE FIRAS instrument. *Astrophys. J.*, v. 420, p. 439, 1994.
- MAUCELI, E.; GENG, Z. K.; HAMILTON, W. O.; JOHNSON, W. W. et al. The Allegro gravitational wave detector: data acquisition and analysis. *Phys. Rev. D*, v. 54, p. 1264, 1996.
- MCCLELLAND, D. E. et al. Status of the Australian Consortium for Interferometric Gravitational Astronomy. AIP Conf. Procs., New York, v. 523, p. 140, 2000.
- MESHKOV, S. (Ed.). *Gravitational Waves: Third Edoardo Amaldi Conference*, v. 523. New York: AIP Conf. Procs., 2000.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1970.
- MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. *Phys. Rep.*, v. 215, p. 203, 1992.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. 2006. hep-th/0601213.
- PADMANABHAN, T. Cosmological constant-the weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, v. 380, p. 235, 2003.
- PADMANABHAN, T. Dark energy: The cosmological challenge of the millennium. *Current Science*, v. 88, p. 1057, 2005.
- PADMANABHAN, T.; CHOUDHURY, T. R. Can the clustered dark matter and the smooth dark energy arise from the same scalar field? *Phys. Rev. D*, v. 66, p. 081301, 2002.
- PAGE, L.; NOLTA, M. R.; BARNES, C.; BENNETT, C. L. et al. First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Interpretation of the TT and TE angular power spectrum peaks. *Astrophys. J. Suppl.*, v. 148, p. 233, 2003.
- PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, v. 75, p. 559, 2003.
- PEEBLES, P. J. E.; YU, J. T. Primeval adiabatic perturbation in an expanding Universe. *Astrophys. J.*, v. 162, p. 815, 1970.
- PERCIVAL, W. J. et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: The power spectrum and matter content of the universe. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 327, p. 1297, 2001.

- PERMUTTER, S.; BAUGH, C. M.; BLAND-HAWTHORN, J.; BRIDGES, T. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, v. 517, p. 565, 1999.
- RATRA, B.; PEEBLES, J. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev. D*, v. 37, p. 3406, 1988.
- REFREGIER, A. Overview of secondary anisotropies of the CMB. 1999. astro-ph/9904235.
- RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, v. 116, p. 1009, 1998.
- RIESS, A. G.; NUGENT, P. E.; GILLILAND, R. L.; SCHMIDT, B. P. et al. The farthest known supernovae: support for an accelerating universe and a glimpse of the epoch of deceleration. *Astrophys. J.*, v. 560, p. 49, 2001.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. L. *Cálculo Numérico*. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1997.
- SACHS, R. K.; WOLFE, A. M. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. *Astrophys. J.*, v. 147, p. 73, 1967.
- SELJAK, U.; HIRATA, C. Gravitational lensing as a contaminant of the gravity wave signal in CMB. 2003. astro-ph/0310163.
- SELJAK, U.; ZALDARRIAGA, M. A line of sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies. *Astrophys. J.*, v. 469, p. 437, 1996. astro-ph/9603033.
- SIGURDUR, H. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*. New York: Academic Press, 1978.
- SMOOT, G. F.; BENNETT, C. L.; KOGUT, A.; AYMEN, J. et al. Preliminary results from the COBE differential microwave radiometers - Large angular scale isotropy of the cosmic microwave background. *Astrophys. J. Lett.*, v. 371, p. 1, 1991.
- SOARES-SANTOS, M.; DE GOUVEIA DAL PINO, E. M. em prep. 2006.
- SOARES-SANTOS, M.; GONÇALVES, S. V. B.; FABRIS, J. C.; DE GOUVEIA DAL PINO, E. M. Gravitational waves: a 100-year tool applied to the dark energy problem. *Braz. J. Phys.*, v. 35, p. 1191, 2005.
- SOARES-SANTOS, M.; GONÇALVES, S. V. B.; FABRIS, J. C.; DE GOUVEIA DAL PINO, E. M. Modeling the spectrum of gravitational waves in the primordial Universe. In: DE GOUVEIA DAL PINO, E. M.; LUGONES, G.; LAZARIAN, A. (Ed.). *Magnetic Fields in the Universe: from laboratory and stars to primordial structures*. New York: AIP Conf. Procs., 2005. v. 784, p. 800.
- SPERGEL, D. N.; BEAN, R.; DORE, O.; NOLTA, M. R. et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology. 2006. astro-ph/0603449.

- SPERGEL, D. N.; ZALDARRIAGA, M. CMB polarization as a direct test of inflation. 1997. astro-ph/9705182.
- STACHEL, J. (Org.). *O ano miraculoso de Einstein: cinco artigos que mudaram a face da física*. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2005.
- STAROBINSKI, A. A. Cosmic background anisotropy induced by isotropic, flat-spectrum, gravitational waves perturbations. *Sov. Astron. Lett.*, v. 11, p. 133, 1985.
- STEIGMAN, G. Primordial alchemy: from the Big Bang to the present Universe. 2002. astro-ph/0208186.
- STEINHARDT, P. J.; TUROK, N. Cosmic evolution in a cyclic universe. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 126003, 2002.
- TEGMARK, M. The angular power spectrum of the four-year COBE data. *Astrophys. J. Lett.*, v. 464, p. 35, 1996.
- THORNE, K. S. Gravitational radiation. In: HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. (Org.). *300 years of gravitation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. cap. 9, p. 330–458.
- TONRY, J. L.; SCHMIDT, B. P.; BARRIS, B.; CANDIA, P. et al. Cosmological results from high- z supernovae. *Astrophys. J.*, v. 594, p. 1, 2003.
- VITTORIO, N.; SILK, J. Fine-scale anisotropy of the cosmic microwave background in a universe dominated by cold dark matter. *Astrophys. J. Lett.*, v. 285, p. 39, 1984.
- WATANABE, Y.; KOMATSU, E. Improved calculation of the primordial gravitational wave spectrum in the standard model. 2006. astro-ph/0604176.
- WEBER, J. Detection and generation of gravitational waves. *Phys. Rev.*, v. 117, p. 306, 1960.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. New York: John Wiley, 1972.
- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, v. 61, p. 1, 1989.
- WETTERICH, C. Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nucl. Phys. B*, v. 302, p. 668, 1988.
- WILL, C. M. Experimental gravitation from Newton's Principia to Einstein's General Relativity. In: HAWKING, S. W.; ISRAEL, W. (Org.). *300 years of gravitation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987. p. 80.
- WILSON, M. L.; SILK, J. On the anisotropy of the cosmological background matter and radiation distribution. i - the radiation anisotropy in a spatially flat universe. *Astrophys. J.*, v. 243, p. 14, 1981.
- WRIGHT, E. L.; MEYER, S. S.; BENNETT, C. L.; BOGGESS, N. W. Interpretation of the cosmic microwave background radiation anisotropy detected by the COBE Differential Microwave Radiometer. *Astrophys. J. Lett.*, v. 396, p. 13, 1992.

ZEHAVI, I. et al. Galaxy clustering in early Sloan Digital Sky Survey redshift data. *Astrophys. J.*, v. 571, p. 172, 2002.

ZHANG, Y.; ER, X. Z.; XIA, T. Y.; ZHAO, W.; MIAO, H. X. Exact analytic spectrum of relic gravitational waves in accelerating Universe. 2006. astro-ph/0604456.

ZHANG, Y.; YUAN, Y.; ZHAO, W.; CHEN, Y.-T. Relic gravitational waves in the accelerating Universe. *Class. Quantum Grav.*, v. 22, p. 1383, 2005.

ZHAO, W.; ZHANG, Y. The constraints on the relic gravitational waves by the current and future observations. 2006. astro-ph/0604458.