

Universidade de São Paulo  
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas  
Departamento de Astronomia

Alan Jorge Alves do Carmo

**Estudo da Dinâmica da Ressonância  
Planetária 3/1 de Movimentos Médios: uma  
Aplicação ao Sistema HD 60532 b-c**

São Paulo

2015





Alan Jorge Alves do Carmo

**Estudo da Dinâmica da Ressonância  
Planetária 3/1 de Movimentos Médios: uma  
Aplicação ao Sistema HD 60532 b-c**

Tese/Dissertação apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia

Orientadora: Prof.<sup>(a)</sup> Dr.<sup>(a)</sup> Tatiana Alexandrovna Michtchenko

São Paulo

2015



*Dedico esta a tese à minha família e amigos*



# Agradecimentos

À minha família, pelo amor incondicional e por sempre estar ao meu lado apesar da distância física;

À Laura, pelo companheirismo, paciência, boa-vontade, apoio e amor que me ofereceu durante esses longos anos;

À prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Tatiana A. Mitchchenko pela confiança no meu trabalho, pelas discussões científicas, sugestões e conselhos;

Ao prof. Dr. Sylvio Ferraz-Mello, pelo conhecimento adquirido pelas disciplinas, conselhos, conversas e por sempre inspirar-nos a seguir o caminho da pesquisa.

Aos companheiros de trabalho Dr. Eduardo A. Inês, Dr. Marcos T. dos Santos, Hugo A. Folonier, Dr. Adrian Collucci, Dr. Gleidson G. Gomes, Dr. Jorge Correa, Dr. Nelson Callegari, pela amizade, colaborações, discussões, sugestões e apoio;

A Paulo Penteado, pela ajuda com a programação em paralelo em MPI que me fez economizar meses de espera de resultados.

Aos amigos: Dr. Douglas A. de Barros, Dr. Felipe A. Oliveira, Dr. Daryel M. Paret, Ana C. Soja, Dr<sup>a</sup> Mônica Midori, Paulo Lago, Dr. Alessandro Moisés e Dr. Vinicius Placco e todos os outros que conviveram comigo durante estes anos.

Aos técnicos, funcionários e professores do IAG que fazem deste instituto um lugar confortável para convivência, estudo e trabalho;

A Lourenço Mutarelli e Rayraí Galvão por mostrar outras formas de caminhar e ver a vida;

Aos amigos de longa-data que nunca estão distantes e sabem quem são sem precisar citá-los;

Ao CnpQ, pelo apoio financeiro, sob o projeto n<sup>o</sup>: 153713/2010-0;

---

Esta tese foi escrita em  $\text{\LaTeX}$  com a classe IAGTESE, para teses e dissertações do IAG.

*“(...)Pra entender  
Basta uma noite de insônia  
Um sonho que não tem fim  
Um filme sem muita graça  
Uma praça sem muito sol  
Seis cordas pra guitarra  
Seis sentidos na mesma direção  
Seiscentos anos de estudo  
Ou seis segundos de atenção  
Pra entender  
Nada disso é tudo  
Mas tudo isso é fundamental”*

Humberto Gessinger

*“Todas as mentiras levam à verdade”*

X Files





# Resumo

A ressonância de movimentos médios é um dos fenômenos mais interessantes e frequentes em sistemas de exoplanetas. Seu estudo é importante para a compreensão de formação e estabilidade de longo-período de sistemas de planetas em órbitas próximas.

O objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica da 3/1 MMR analisando a topologia do espaço de fase em torno das soluções apsidais de corrotação. Estendemos o estudo da dinâmica ao redor da região ressonante e como ela depende das constantes do problema, determinando suas principais propriedades.

Para o estudo da topologia da 3/1 MMR desenvolvemos o Hamiltoniano semi-analítico baseado em Michtchenko et al. (2006). Identificamos as estruturas principais do espaço de fase e calculamos as soluções estacionárias simétricas e assimétricas através de métodos numéricos, utilizando uma expansão em coeficientes de Laplace da função perturbadora para determinação do ângulo crítico.

A dinâmica ao redor das soluções estacionárias foi explorada com a construção de mapas dinâmicos sobre planos representativos do espaço de fase. Utilizamos o método do espectro de potência dinâmico (Michtchenko et al., 2002) e analisamos como se comportam e evoluem as frequências do problema e identificamos na vizinhança da 3/1 MMR, além do puramente secular, três regimes de movimento: (I) Uma região estável no interior das separatrizes da 3/1 MMR, (II) o regime de quase-ressonância e (III) um domínio de ressonância secular verdadeira. Todos acompanham a ressonância e suas características e presença dependem das condições iniciais e parâmetros do problema. Complementamos a análise com a integração numérica das equações exatas de movimento para observar como se comportam os ângulos ressonante e secular. Os métodos desenvolvidos foram aplicados para o sistema HD60532 b-c.



# Abstract

The mean-motion resonance is one of the most interesting phenomena in celestial mechanics. Its importance lies on the comprehension of the formation and long-term stability of planetary systems in close orbits.

The aim of this work is the study of the dynamics of the 3/1 MMR from the point of view of the topology of phase space around the apsidal corotation resonance. We extend the study around the resonance regime and how the dynamics depends on the global parameters, deriving its main properties.

For the topology analysis of the 3/1 MMR we develop the semi-analytic Hamiltonian based on Michtchenko et al. (2006). We identify the main structures of the phase space and calculate the symmetrical and asymmetrical ACR using numerical methods and a Laplace expansion of the disturbing function to determine the critical angle of the problem.

The dynamics around the stationary solutions was explored through the development of dynamical maps over the phase space. We apply the Spectral analysis method (Michtchenko et al., 2002) and investigate how the frequencies of the problem behaves and identify near the 3/1 MMR, besides the pure secular zone, three regimes of motion: (I) A stable dominion inside the resonance separatrix, (II) a quasi-secular region and (III) a secular resonance dominion. All these regimes accompany the resonance and their characteristics and presence depends on the initial conditions and parameters of the problem. We complement the analysis with the numerical integration of the exact equations of motion to examine how the resonant and secular angles behave. All the methods developed were applied to the HD60532 b-c exoplanetary system.



# Lista de Figuras

1.1	Histograma do número de pares de exoplanetas em função da razão de períodos orbitais dos planetas . . . . .	24
2.1	Sistemas planetários próximos a 3/1 MMR . . . . .	30
2.2	Períodos próprios ao longo de $(\pi, \pi)$ -ACR para o sistema HD60532 b-c . .	40
2.3	Simulação de migração com condições iniciais $e_i \approx 0$ e $n_1/n_2 \approx 3.20$ . . . .	42
3.1	Evolução temporal de semieixos e excentricidades de um sistema próximo a 3/1 MMR . . . . .	48
3.2	Comparação entre módulos dos coeficientes de Laplace $F_1$ e $F_2$ associados a $\sigma_1$ e $\sigma_2$ . . . . .	53
3.3	Comparação entre módulos dos coeficientes de Laplace $F_1$ , $F_2$ e $F_3$ associados a $\sigma_1$ e $\sigma_2$ e $\sigma_3$ . . . . .	54
4.1	Plano representativo para o sistema HD60532 b-c e sistema com massas inversas de HD60532 b-c . . . . .	64
4.2	Espaços de fase em função das excentricidades e razão de movimentos médios	65
4.3	Níveis de energia do Hamiltoniano médio para o par de planetas b-c orbitando a estrela HD60532. . . . .	71
4.4	Família de soluções de ACR simétricas para uma 3/1 MMR . . . . .	73
4.5	Topologia do espaço de fase em função das excentricidades e ângulos para caracterizar estabilidade do ACR. . . . .	75
4.6	Famílias de soluções de ACR em função das excentricidades. . . . .	79
4.7	Famílias das soluções de ACR em função dos ângulos $\theta_1$ e $\Delta\varpi$ . . . . .	80
4.8	Lei das Estruturas para razão de massas 2.36 . . . . .	82

5.1	Mapas dinâmicos calculados para 0.06, 0.15, 0.278 e 0.30 . . . . .	84
5.2	Mapa dinâmico calculado para AM com $e_1 = 0.06$ e $\theta_1 = \pi$ e espectro dinâmico ao longo de $n_1/n_2 = 3.07$ . . . . .	87
5.3	Comportamento dinâmico de $e_2$ e $\Delta\varpi$ , com condições iniciais nas regiões 0, 1 e 2 . . . . .	89
5.4	Comportamento dos ângulos no interior da zona ressonante para $e_1 = 0.06$	91
5.5	Evolução temporal dos ângulos para condições iniciais em região 2. . . . .	92
5.6	Espectro dinâmico e integração numérica de $\varpi_i$ mostrando sua mudança de direção . . . . .	93
5.7	Evolução temporal dos ângulos usando coordenadas do ponto na região 3 .	95
5.8	Comportamento dos ângulos em todas as regiões do mapa dinâmico para $e_1 = 0.06$ . . . . .	97
5.9	Mapa dinâmico calculado para AM com $e_1 = 0.06$ e $\theta_1 = 0$ . . . . .	98
5.10	Mapa dinâmico calculado para AM com $e_1 = 0.15$ e $\theta_1 = \pi$ e espectro dinâmico ao longo de $e_2 = 3 - 0.026$ . . . . .	101
5.11	Evolução de $n_1/n_2 e\theta_1$ para condições iniciais no regime regular no interior da separatriz . . . . .	103
5.12	Evolução dos ângulos $w_i$ , $\theta_i$ e $\Delta\varpi$ de um ponto na região de movimento regular no interior da separatriz ressonante . . . . .	104
5.13	Comportamento dos ângulos em todas as regiões do mapa dinâmico para $e_1 = 0.15$ . . . . .	105
5.14	Mapa dinâmico calculado para AM com $e_1 = 0.15$ e $\theta_1 = 0$ . . . . .	106
5.15	Evolução temporal dos ângulos usando coordenadas do ponto na região 1 e 2. Momento angular calculado com $e_1 = 0.15$ e $\theta_1 = 0$ . . . . .	107
5.16	Mapa dinâmico e espectro dinâmico calculado para momento angular com $e_1 = 0.278$ do sistema HD60532 b-c. . . . .	108
5.17	Evolução dos ângulos $w_i$ , $\theta_i$ e $\Delta\varpi$ de um ponto em uma região de quase ressonância externa . . . . .	109
5.18	Evolução dos ângulos $\theta_1$ e $\Delta\varpi$ para elementos do sistema HD60532 b-c . .	111
5.19	Mapa dinâmico e espectro dinâmico calculado para momento angular com $e_1 = 0.30$ com $\theta_1 = 0$ . . . . .	112

6.1	Mapa dinâmico calculado para o sistema HD60532 b-c com massas $0.3M_J$ e $0.7M_J$ . . . . .	116
6.2	Mapa dinâmico para o sistema com $m_2/m_1 = 1$ e 55 Cnc b-c com valor de momento angular real. . . . .	118
6.3	Mapas dinâmicos calculados para os sistemas HD10180 b-c e GJ 163 b-c .	119





## Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros Orbitais dos sistemas planetários próximos a 3/1 MMR . . . . .	32
2.2	Razão de períodos entre os planetas encontrados próximos a 3/1 MMR . . . . .	32
2.3	Elementos orbitais e parâmetros físicos do sistema HD60532 b-c . . . . .	33
3.1	Comparação dos módulos dos coeficientes de Laplace de sistemas exoplanetários reais próximos a 3/1 MMR. . . . .	55
4.1	Conjuntos de ângulos para soluções de ACR simétrico . . . . .	63



# Sumário

1. Introdução . . . . .	23
2. Sistemas planetários próximos a 3/1 MMR . . . . .	29
2.1 Sistemas planetários próximos a uma 3/1 MMR . . . . .	33
2.1.1 HD60532 b-c . . . . .	33
2.1.2 55 Cnc b-c . . . . .	34
2.1.3 HD10180 d-e . . . . .	35
2.1.4 GJ 6163 b-c . . . . .	36
2.2 Outros sistemas exoplanetários candidatos a 3/1 MMR . . . . .	37
2.3 Sobre a origem dos sistemas planetários próximos a 3/1 MMR . . . . .	37
2.3.1 <i>Toy model</i> de uma simulação de migração adiabática sob força de Stokes aplicada ao sistema HD60532 b-c . . . . .	39
2.3.2 Resultados das simulações . . . . .	41
3. Modelagem do Problema . . . . .	45
3.1 Desenvolvimento do Hamiltoniano Semi-Analítico . . . . .	45
3.2 Escolha do ângulo ressonante . . . . .	49
3.3 Ferramentas numéricas . . . . .	56
3.3.1 Mapas Dinâmicos . . . . .	56
3.3.2 Espectros de Potência Dinâmicos . . . . .	58
4. Análise do Hamiltoniano Semi-Analítico . . . . .	61
4.1 Topologia do Hamiltoniano Semi-Analítico . . . . .	61
4.1.1 Planos representativos . . . . .	61

4.1.2	Notação dos ângulos nos planos representativos . . . . .	62
4.1.3	Análise da Topologia dos planos representativos . . . . .	66
4.1.4	Encontros próximos - curvas de colisão . . . . .	67
4.2	Soluções estacionárias do Hamiltoniano médio . . . . .	68
4.3	Soluções estacionárias simétricas . . . . .	71
4.3.1	Determinação de estabilidade . . . . .	73
4.3.2	Análise das famílias de soluções de ACR simétricas . . . . .	76
4.4	Soluções estacionárias assimétricas . . . . .	77
4.5	Lei das Estruturas . . . . .	81
5.	<i>Dinâmica na vizinhança dos ACRs</i> . . . . .	83
5.1	Características gerais . . . . .	85
5.2	Mapa dinâmico de ACR com baixa excentricidade e $\theta_1 = \pi$ fixo . . . . .	87
5.2.1	Região do ponto 1: regime ressonante . . . . .	90
5.2.2	Região do ponto 2: região de quase-ressonância . . . . .	92
5.2.3	Região do ponto 3: regime de ressonância secular . . . . .	94
5.3	Mapa dinâmico de ACR com baixa excentricidade de ACR e $\theta_1 = 0$ fixo . . . . .	98
5.4	Mapa dinâmico com ACR de excentricidade moderada e $\theta_1 = \pi$ fixo . . . . .	99
5.5	Mapa dinâmico ACR de excentricidade moderada e $\theta_1 = 0$ fixo . . . . .	105
5.6	Mapa dinâmico de ACR de alta excentricidade e $\theta_1 = \pi$ fixo . . . . .	108
5.7	Mapa dinâmico com ACR de alta excentricidade e $\theta_1 = 0$ fixo . . . . .	111
5.8	Discussão sobre o capítulo . . . . .	113
6.	<i>Considerações sobre a dependência das massas dos planetas</i> . . . . .	115
6.1	Análise sobre a dependência das massas individuais . . . . .	116
6.2	Análise sobre a dependência da razão de massas dos planetas . . . . .	117
6.3	Mapas dinâmicos para sistemas planetários detectados . . . . .	118
7.	<i>Conclusões</i> . . . . .	121
7.1	Resumo dos Resultados . . . . .	121
7.1.1	Sistemas de exoplanetas próximos a 3/1 MMR . . . . .	121
7.1.2	Determinação do ângulo crítico . . . . .	121
7.1.3	Topologia da 3/1 MMR . . . . .	122

7.1.4 Dinâmica em torno da ressonância . . . . .	122
7.2 Perspectivas Futuras . . . . .	124
<i>Referências</i> . . . . .	127
8. <i>Apêndice</i> . . . . .	137



## Introdução

O número de exoplanetas descobertos tem aumentado a cada dia. O desenvolvimento tecnológico associado ao método de velocidades radiais e aos projetos de trânsito Kepler e CoRoT contribuíram para que mais de 1500 exoplanetas tenham sido encontrados até o momento (Han et al. (2014)).

A maioria dos planetas dos sistemas exoplanetários detectados são do tipo Júpiter quente: gigantes gasosos que se encontram a distâncias muito pequenas da estrela a qual orbitam e com períodos translacionais da ordem de dias. Grande parte dos planetas que compõem esses sistemas planetários se encontram em proximidade ou em ressonância de movimentos médios (MMR). Essa característica corresponde a uma comensurabilidade em razão de inteiros entre as frequência translacionais, ou seja,  $(p + q)n_2 - pn_1 \approx 0$ , onde  $n_i$  é o movimento médio de cada corpo. O índice  $i = 1(2)$  corresponde ao corpo interno (externo),  $q$  é chamado de ordem da ressonância e  $p$  e  $q$  são números inteiros. No interior de uma MMR, a interação entre planetas próximos ocorre de maneira a proteger o sistema de instabilidades e um dos ângulos críticos libra em torno de um valor de equilíbrio. Ao longo do trabalho, estes ângulos escrever-se-ão na forma:  $\theta_i = q\sigma_i = (p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 - q\varpi_i$ .

O estudo de sistemas próximos a uma ressonância de movimentos médios é importante do ponto de vista de sua formação e estabilidade dinâmica. De fato, uma estabilidade de longo-período de sistemas exoplanetários próximos em altas excentricidades é possível principalmente à proximidade do planetas a uma MMR. Lissauer et al. (2011) comentam que dentre os exoplanetas detectados por velocidade radial, um terço corresponde a sistemas próximos a uma MMR e metade destes se localizam próximos a uma comensurabilidade 2/1. Em relação aos dados da missão Kepler, Fabrycky et al. (2014) afirmam que sistemas de exoplanetas próximos a uma MMR são comuns principalmente em sistemas de baixa

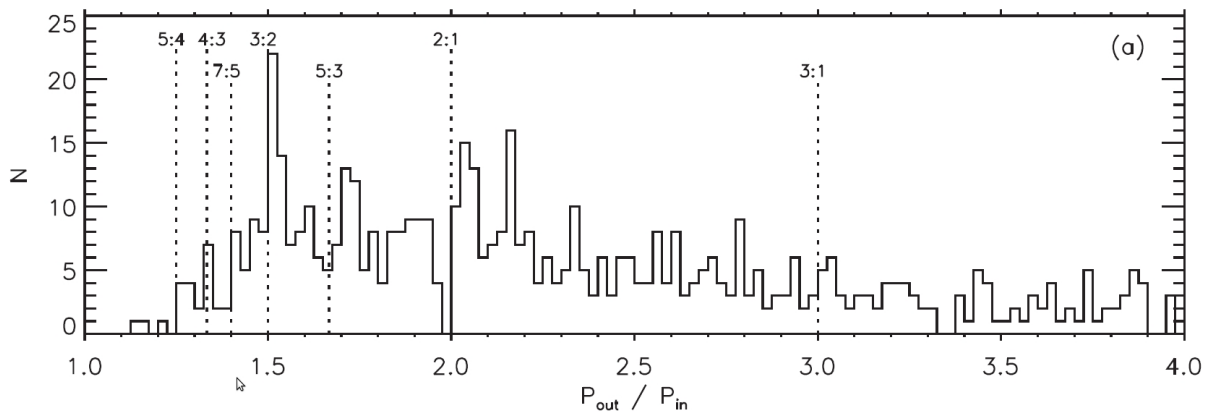


Figura 1.1: Histograma apresentando o número de pares de exoplanetas detectados em função da razão de períodos orbitais dos planetas. O gráfico foi retirado de Fabrycky et al. (2014). Notamos que há um excesso no exterior dos valores nominais das ressonâncias de movimentos médios.

massa e próximos a estrela a qual orbitam.

Ilustramos os sistemas catalogados em (e próximos a) uma ressonância de movimentos médios na Figura 1.1. As linhas pontilhadas representam os valores nominais das diferentes ressonâncias e o histograma o número de sistemas próximos a ela. Nele, podemos observar que existe um acúmulo de sistemas sempre à direita, ou em outras palavras, exterior ao valor nominal de cada ressonância. Salvo algum efeito seletivo, este fenômeno se apresenta mais proeminente para  $3/2$  e  $2/1$  MMR. Esse excesso para valores maiores que o nominal da ressonância não significa, contudo, que os sistemas se encontrem fora dela. De acordo com a Lei das Estruturas (Ferraz-Mello, 1988), a solução estacionária ressonante possui um desvio, apresentando razão de períodos sempre maior em relação ao seu valor nominal. Uma análise dinâmica, portanto, se faz necessária para determinar se este desvio pode ser responsável por este acúmulo. Alguns trabalhos afirmam, contudo, que efeitos de maré podem ser responsáveis pela “saída” de um sistema da ressonância (Lithwick e Wu, 2012; Batygin e Morbidelli, 2013) quando este se encontra comprovadamente fora do regime de libração.

Por serem mais comuns, os sistemas planetários em uma ressonância de 1ª ordem, em especial a  $2/1$  e  $3/2$  MMR são frequentemente estudados. Porém, o estudo de outras comensurabilidades não deve ser excluído, pois podem contribuir para uma compreensão maior dos diferentes sistemas. Pontos em comum e diferenças entre ressonâncias distintas devem ser estabelecidos a fim de se obter um panorama mais completo e entender como se formam e em que casos podem ser capturados nas diferentes razões de período observadas.



Com este intuito, neste trabalho estudamos o problema de três corpos planar geral através de um sistema composto de uma estrela orbitada por dois planetas em proximidade ou interior de uma ressonância 3/1 de movimentos médios. Vários sistemas exoplanetários possuem razão de períodos próximos a essa comensurabilidade e o seu estudo pode ajudar a levantar as diferenças e semelhanças entre as ressonâncias de movimentos médios de segunda ordem.

Apesar do nosso problema focar o estudo de exoplanetas orbitando suas estrelas, formalmente este problema é similar ao de dois satélites próximos a uma MMR orbitando um planeta. No sistema solar, além dos planetas Saturno e Urano que estão em uma configuração próxima a ressonância 3/1 de movimentos médios, alguns satélites de Urano encontram-se dentro da 3/1 MMR ou próximo a ela. É o caso do par Miranda e Umbriel (Henrard e Sato, 1990) e as ressonâncias entre Miranda e outros satélites menos massudos como Cressida e Desdemona (Verheylewegen e Lemaitre, 2014). Assim, o estudo aqui apresentado, pode ser levado, futuramente, a comparar as diferenças em relação à dinâmica dos satélites próximos a uma MMR, levando em consideração as distintas razões que levam exoplanetas e satélites a serem capturados em uma MMR.

É importante notar também que no sistema solar a maioria dos pares planetários ou de satélites não se encontra no interior de uma ressonância de movimentos médios, mas próximo a ela. O estudo da dinâmica dos sistemas exoplanetários, em particular na proximidade de uma 3/1 MMR, pode nos dar indícios de como satélites ou planetas se formaram e permanecem estáveis, bem como compreender o motivo da maioria dos planetas no sistema solar se encontrarem em quase-ressonâncias.

Esta tese faz parte de uma série de trabalhos voltados ao estudo da dinâmica ressonante de exoplanetas realizados pelo grupo de pesquisa do IAG-USP. Em investigações anteriores foram estudadas as 2/1 (Callegari et al., 2004; Michtchenko et al., 2008b,a), 3/2 (Callegari et al., 2006; Correa-Otto et al., 2013) e 5/2 MMRs (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001a). Este último, em especial analisou a influência do modo oscilatório ( $5n_{sat} - 2n_{jup}$ ) associado com a Grande Desigualdade na aceleração dos processos de difusão do movimento asteroidal (Ferraz-Mello et al., 1998). Apesar não haver uma grande população de sistemas exoplanetários em torno da 3/1 MMR, há um grande número de candidatos a serem confirmados, e um estudo dinâmico pode contribuir neste sentido.

O estudo da dinâmica da 3/1 MMR pode ser parcialmente compreendido através do

estudo de suas soluções estacionárias, as Apsidal Corotation Resonance (ACR). Vários autores se debruçaram sobre este tema em relação a esta comensurabilidade em particular. Beaugé et al. (2003) obtiveram as ACR simétricas e assimétricas para altas excentricidades das órbitas. Outros trabalhos se aprofundaram nesta questão. São os casos das pesquisas apresentadas por Michtchenko et al. (2006) e Voyatzis e Hadjidemetriou (2006). Este último, além de obter estas soluções, aplicou seu estudo ao sistema 55 Cnc b-c, que encontra-se próximo a 3/1 MMR. Voyatzis (2008) complementou este estudo realizando uma análise de quão caóticas são essas soluções, determinou a estabilidade e como elas bifurcam através da construção de espaços de fase em função da excentricidades e ângulos do problema. Em um trabalho mais recente, Antoniadou e Voyatzis (2014), estenderam estes estudos apresentando as ACR para sistemas planetários em órbitas não-coplanares.

O exame da caoticidade de um sistema é necessário uma vez que a análise da topologia em torno das configurações catalogadas de um sistema permite-nos verificar se os parâmetros orbitais catalogados são confiáveis. Sistemas que se encontrem em uma região caótica ou próximo a uma, podem possuir dados não confiáveis, uma vez que nestes regimes, suas órbitas são comumente instáveis ou irregulares. Um estudo dinâmico pode contribuir a diminuir algumas das limitações que os dados presentes na literatura carregam devido aos métodos de detecção empregados. Dentre estes, as velocidades radiais e interferometria das curvas de luz são os mais comuns. As principais limitações dos dados catalogados são:

- A falta de determinação das massas e excentricidades de grande parte dos exoplanetas detectados pelo programa Kepler.
- O desconhecimento direto da inclinação do movimento dos astros em relação ao plano do céu pelo método de velocidades radiais.
- Os efeitos de *alias* que surgem devido aos intervalos e números de observações das estrelas e seus movimentos.

A importância deste trabalho reside, portanto, não apenas na compreensão dinâmica de sistemas de exoplanetas próximos a uma 3/1 MMR, mas também na refutação ou validação dos elementos e parâmetros catalogados de um sistema. Obtendo, dessa forma, um panorama geral das características dos sistemas de exoplanetas reais.

Esta tese se organiza da seguinte maneira: No capítulo 2 levantamos, a partir da literatura atual, os sistemas planetários que encontram-se próximos a 3/1 MMR. Escolhemos

---

o sistema HD60532 b-c para aplicar os métodos desenvolvidos neste trabalho e explicamos o porquê desta escolha. Ademais, é feita uma pequena revisão de como esses exoplanetas podem ser formados e damos um exemplo para o sistema escolhido. No capítulo 3 apresentamos o modelo semi-analítico (Michtchenko et al., 2006) e desenvolvemos o Hamiltoniano médio do problema. Determinamos suas principais características e fazemos a escolha dos ângulos ressonantes através dos coeficientes da expansão de Laplace da função perturbadora. Apresentamos também as ferramentas numéricas empregadas ao longo do trabalho, os mapas dinâmicos e análises frequenciais do espectro de potência dinâmico. No capítulo 4 aplicamos o Hamiltoniano para compreender a topologia do problema e encontrar as soluções estacionárias do problema. Determinamos as estabilidades destas soluções e estudamos a lei das estruturas (Ferraz-Mello, 1988) para o caso ressonante planetário. Em seguida, no capítulo 5, observamos a dinâmica em torno das soluções de equilíbrio, analisamos a caoticidade das soluções e de seus arredores e determinamos os regimes de movimento existentes. No capítulo 6 examinamos como a dinâmica ao redor do regime ressonante muda em relação às massas individuais e razão de massas. Encerramos a tese com uma discussão dos trabalhos realizados, conclusão das análises e perspectivas futuras no capítulo 7.



## Sistemas planetários próximos a 3/1 MMR

Neste capítulo realizamos uma pesquisa extensiva sobre os sistemas de exoplanetas descobertos e divulgados através do *Exoplanet Orbit Database* (Han et al., 2014). Conferimos os parâmetros físicos e elementos orbitais divulgados no catálogo mencionado com os artigos em que foram publicados e procuramos os sistemas de exoplanetas confirmados e que possuem um valor da razão de períodos (movimentos médios) entre  $2.8 < n_1/n_2 < 3.15$ .

Lissauer et al. (2011) comentam que entre os planetas detectados por velocidades radiais, um terço corresponde a sistemas próximos a uma MMR e metade destes figuram próximos a uma comensurabilidade 2/1. As detecções de exoplanetas, em especial as realizadas pela missão Kepler, demonstram que sistemas exoplanetários nas vizinhanças de uma MMR são bastante comuns, principalmente em sistemas de baixa massa e próximos às estrelas que orbitam (Fabrycky et al., 2014). Esses sistemas, se comparados aos planetas gigantes do sistema solar, possuem parâmetros bastante distintos. Enquanto os exoplanetas apresentam altas excentricidades, grandes massas e baixos valores de semieixo maior, os planetas no sistema solar possuem baixas massas e excentricidades e altos valores de semieixo maior.

Conforme discutido no capítulo anterior, há um excesso de exoplanetas detectados com razão de períodos maior que o valor nominal das ressonâncias e um déficit com valor inferior às mesmas para planetas com raio dentro do limite  $R < 4R_{\oplus}$  (Lissauer et al., 2011; Fabrycky et al., 2014; Lee et al., 2013). Esse excesso e déficit no caso da ressonância 3/1 só é notável quando  $R < 2R_{\oplus}$ . Porém, grande parte dos planetas detectados pelo programa Kepler não possuem suas massas e/ou excentricidades determinadas, o que impede uma análise da dinâmica ressonante dos sistemas. Além disso, de acordo com Weiss e Marcy (2014) as massas determinadas por *Trasit Time Variation* possuem valores menores, para

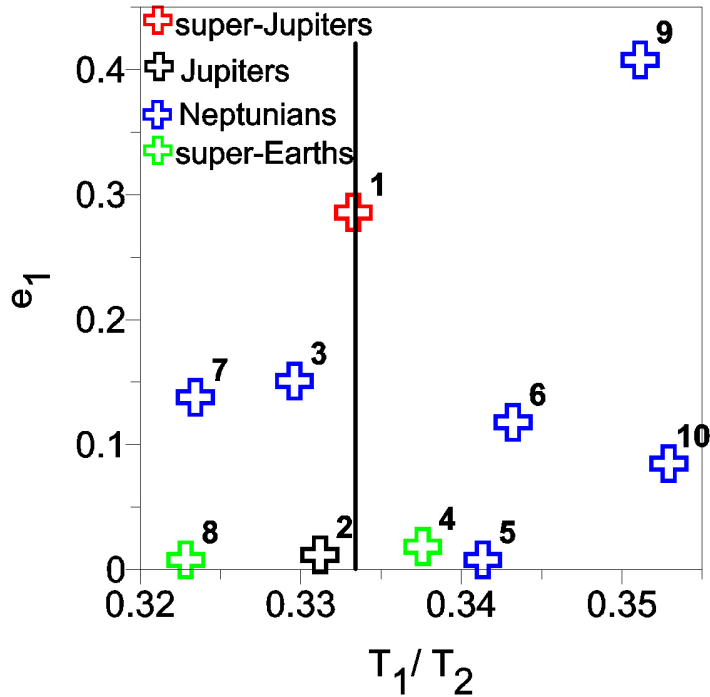


Figura 2.1: Sistemas planetários detectados que encontram-se próximos a uma 3/1 MMR. Os eixos correspondem a razão de períodos do par de planetas considerado e a excentricidade do planeta interno. Os sistemas planetários estão classificados de acordo com sua massa. Consideramos  $\bar{M} = 0.5(m_1 + m_2)$ , e a classificação obedece:  $0.006M_J < \bar{M} < 0.03M_J =$  Super-Terras,  $0.03M_J < \bar{M} < 0.2M_J =$  Netunos,  $0.2M_J < \bar{M} < 2M_J =$  Jupiters e  $2M_J < \bar{M} =$  Super Jupiters. A barra vertical marca a razão de períodos orbitais dos planetas nominal da ressonância de movimentos médios 3/1. Dentre os sistemas, HD60532 b-c é o que se encontra mais próximo do valor nominal das ressonância. Os sistemas planetários que encontram-se sobre o eixo-x com  $e_1 = 0$ , Kepler-11 b-e e Kepler-20 b-c não tem suas excentricidades divulgadas na literatura. Os sistemas planetários estão ordenados em relação à distância do valor nominal da ressonância: **1**-HD 60532 b-c, **2** - 55 Cnc b-c, **3** - HD 10180 d-e, **4** - GJ 163 b-c, **5** - Kepler 20 b-c, **6** - HD 20781 b-c, **7** - HD31527 b-c, **8** - Kepler 11 b-e, **9** - HD20003 b-c e **10** - HD10180 c-d. As referências de onde retiramos os dados deste gráfico se encontram na Tabela 2.2. Os dados dos sistema Kepler-20 e Kepler-11 foram retirados de Gautier (2012) e (Lissauer, 2011) respectivamente.

exoplanetas de mesmo raio, quando comparados ao método de velocidades radiais. Este resultado foi obtido para uma amostra de 65 planetas com raios  $R < 4R_{\oplus}$

Na Figura 2.1 construímos um gráfico dos sistemas planetários encontrados na literatura próximos a uma 3/1 MMR: os eixos correspondem a razão de períodos orbitais e excentricidade do planeta interno do par considerado; a barra negra vertical marca a posição do valor nominal da 3/1 MMR. Na figura também estamos considerando os pares de planetas em órbitas não consecutivas, ou seja, com um objeto massivo entre o par de corpos ressonante (é o caso do par b-e do sistema Kepler 11). Os pares de exoplanetas

estão classificados pela média simples  $\bar{M}$  de suas massas. A classificação obedece:

$$\bar{M} = 0.5(m_1 + m_2), \quad (2.1)$$

em que,

- $0.006M_J < \bar{M} < 0.03M_J = \text{Super-Terras.}$
- $0.03M_J < \bar{M} < 0.2M_J = \text{Netunos.}$
- $0.2M_J < \bar{M} < 2M_J = \text{Júpiteres.}$
- $2M_J < \bar{M} = \text{Super Júpiteres.}$

Através dessa classificação, a maioria dos exoplanetas detectados possui massas da ordem de Netuno, com as exceções do par HD60532 b-c, classificados como Super-Jupiters, 55 Cnc b-c como Júpiteres e os sistemas GJ 163 b-c e Kepler 11 b-e, classificados como Super-Terras. É importante frisar que esta comparação visa apenas comparar os parâmetros físicos dos exoplanetas com os planetas do sistema solar. Um paralelo com a dinâmica de Netuno ou Júpiter, por exemplo, exigiria considerar outros parâmetros como a massa da estrela e distância aos planetas.

Notamos que dos pares de exoplanetas próximos a 3/1 MMR nominal, apenas o sistema HD60532 b-c (indicado pela cruz vermelha de número 1) está praticamente sobre o valor da ressonância nominal. A ordenação dos números da legenda da Figura 2.1 é crescente em relação à distância do valor da ressonância nominal, do mais próximo ao mais distante. Sendo assim, depois do sistema HD60532 b-c, os exoplanetas que se aproximam da ressonância em ordem decrescente são: 2 - 55 Cnc b-c, 3 - HD 10180 d-e, 4 - GJ 163 b-c, 5 - Kepler 20 b-c, 6 - HD 20781 b-c, 7 - HD 31527 b-c, 8 - Kepler 11 b-e, 9 - HD20003 b-c and 10 - HD10180 c-d. Como o sistema HD60532 b-c é o mais próximo da ressonância, o escolhemos como exemplo e aplicação dos métodos desenvolvidos ao longo deste trabalho.

Restringimos o conjunto de sistemas próximos a uma 3/1 MMRs baseado em alguns critérios. Em relação à Figura 2.1 retiramos os sistemas HD10180 c-d, Kepler 11 b-e e Kepler-20 b-c. O primeiro foi excluído por ter uma razão de períodos menor que 2.85, sendo bastante difícil o sistema possuir efeitos de uma 3/1 MMR. Kepler-11 b-e foi excluído por não ter as excentricidades dos planetas determinadas e por apresentar, assim como Kepler-20 b-c, um planeta entre o par que possui comensurabilidade próxima a 3/1.

Destacamos nas Tabelas 2.1 e 2.2 nossa amostra restante: a primeira traz os elementos orbitais e parâmetros físicos dos planetas, enquanto a segunda a razão de movimentos médios, assim como as referências as quais retiramos os dados destes sistemas.<sup>1</sup> Dentre eles, os que possuem uma maior possibilidade de estarem no interior de uma 3/1 MMR são os quatro primeiros da Tabela 2.1 (HD60532 b-c, 55 Cnc b-c, HD10180 d-e e GJ163 b-c), uma vez que se encontram mais próximos a comensurabilidade dessa ressonância.

Fazemos a seguir, uma breve descrição de cada um destes sistemas.

sistema	$M_{\star}(M_{\odot})$	$m_1(M_J)$	$m_2(M_J)$	$a_1$ (UA)	$a_2$ (UA)	$e_1$	$e_2$
HD60532 b-c	1.44	3.1548	7.4634	0.7606	1.5854	0.278	0.038
55 Cnc b-c	0.90	0.844	0.1783	0.11339	0.23738	0.0023	0.073
HD10180 d-e	1.06	0.0378	0.0805	0.12859	0.2699	0.143	0.065
GJ 163 b-c	0.40	0.0334	0.0229	0.06069	0.1254	0.0106	0.0094
HD20781 b-c	0.84	0.03787	0.0496	0.169	0.3456	0.11	0.28
HD31527 b-c	1.01	0.0363	0.0497	0.1253	0.2665	0.13	0.11
HD20003 b-c	1.01	0.0377	0.0422	0.0974	0.1961	0.4	0.16

Tabela 2.1 - Principais parâmetros orbitais dos sistemas planetários disponíveis na literatura que se encontram próximos a ressonância 3/1 de movimentos médios. Para mais informações sobre a forma como foram obtidos os dados e os erros associados a cada medida dos elementos da tabela, consultar as referências listadas na Tabela 2.2.

system	$\frac{T_2}{T_1}$	reference
HD60532 b-c	3.0077788238	Laskar e Correia (2009)
55 Cnc b-c	3.026728551	Nelson et al. (2014)
HD10180 d-e	3.0413836532	Lovis et al. (2011)
GJ 163 b-c	2.9701346327	Bonfils et al. (2013)
HD20781 b-c	2.9204459691	Mayor et al. (2011)
HD31527 b-c	3.0994802369	Mayor et al. (2011)
HD20003 b-c	2.8545024897	Mayor et al. (2011)

Tabela 2.2 - Valor da razão de períodos orbitais entre os sistemas planetários disponíveis na literatura que se encontram-se próximos a uma 3/1 MMR. As referências da última coluna indicam de onde foram retirados os dados para esta e para a tabela 2.1

<sup>1</sup> O leitor pode referir-se aos artigos citados na Tabela 2.2 para mais detalhes de como foram determinados os elementos orbitais dispostos.



Param.	[unidades]	HD60532 b	HD60532 c
$\sqrt{X^2}$		4.369	
rms	[m/s]	4.342	
Date	[JD-2400000]	54000.000(fixado)	
$V$	[km s <sup>-1</sup> ]	-0.0055 ± 0.0003	
$P$	[day]	201.83 ± 0.14	607.06 ± 2.07
$\lambda$	[deg]	14.78 ± 0.66	317.02 ± 0.93
$e$	[m/s]	0.278 ± 0.006	0.038 ± 0.008
$\omega$	[deg]	352.83 ± 1.05	119.49 ± 9.14
$K$	[m/s]	30.34 ± 0.32	47.84 ± 0.44
$i$	[deg]	20(fixed)	20(fixed)
$M$	[ $M_J$ ]	3.1548	7.4634
$a$	[AU]	0.7606	1.5854

Tabela 2.3 - Elementos orbitais e parâmetros físicos do sistema HD60532 b-c. A massa da estrela central é  $M_\star = 1.44M_\odot$ . Estes dados são retirados de Laskar e Correia (2009)

## 2.1 Sistemas planetários próximos a uma 3/1 MMR

### 2.1.1 HD60532 b-c

O sistema HD60532 b-c por enquanto é o único par de exoplanetas confirmados que se encontra no interior de uma ressonância 3/1 de movimentos médios (Laskar e Correia, 2009), tendo sido descoberto por Desort et al. (2008). Sua estrela, de tipo F e  $M_\star = 1.44M_\odot$  abriga dois Super-Júpiters. Eles tem massas  $m_b = 3.01 \times 10^{-3}M_\odot$  e  $m_c = 7.22 \times 10^{-3}M_\odot$  (Laskar e Correia, 2009) e encontram-se no interior da 3/1 MMR sob uma corrotação apsidal do ângulo  $\Delta\varpi$  em torno de  $180^\circ$ . Laskar e Correia (2009), para determinar as massas destes planetas, primeiro consideraram que os planetas encontravam-se em um mesmo plano. A inclinação em relação ao plano do céu foi então utilizada como parâmetro livre, e os autores obtiveram um *best fit* da solução em relação a estabilidade de longo-período. As soluções mais estáveis encontradas possuíam  $I = 90^\circ$  e  $I = 20^\circ$ , sendo esta última a mais provável. Por este motivo, assumimos o *best fit* com  $I = 20^\circ$  como os elementos do sistema HD60532 b-c. Na Tabela 2.3 explicitamos os dados do sistema HD60532 b-c que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Sándor e Kley (2010) estudaram a formação do par de planetas através de uma simulação de migração utilizando uma versão isotérmica do software FARGO (Masset, 2000) para reproduzir as interações do planeta com um disco de gás nos estágios finais de

sua formação. Estes autores afirmam que a órbita anti-alinhada do sistema é o produto de formação devido à interação do planeta interno com um disco interior presente entre HD60532-b e a estrela. Este disco interno só seria possível se a massa do planeta externo fosse grande o suficiente para que um gap entre os planetas fosse criado. A interação do planeta externo com o disco exterior faria com que o planeta externo migrasse interiormente com uma velocidade diferente do planeta interno. A matéria no disco presente entre os planetas seria então "empurrada" para o interior da órbita, formando um disco interno que acabaria por frear a migração dos planetas, estabilizando os parâmetros orbitais como os determinados em Laskar e Correia (2009). Para que isso seja possível, consideram, então, que os elementos e massas dos planetas devem ser o conjunto de dados obtidos por Laskar e Correia (2009) em que o sistema possui uma inclinação em relação ao plano do céu de  $I = 90^\circ$ .

A solução obtida por Sándor e Kley (2010) mostra ainda, que, os ângulos do problema, com exceção do ângulo  $\theta_1$  que libra em torno de zero, oscilam em torno de  $180^\circ$ . Sabe-se, porém, que as soluções estacionárias para um par próximo a ressonância 3/1 só são estáveis a baixas excentricidades para  $\theta_1 = 180^\circ$  Beaugé et al. (2003); Michtchenko et al. (2006). Sándor e Kley (2010) afirmam que estas divergências entre as soluções estacionárias simétricas podem significar que a simulação não alcançou a sua configuração final.

Podemos dizer então que o trabalho mencionado não obteve sucesso em simular a formação do sistema HD60532 b-c com seus dados catalogados, provavelmente devido à assunções incorretas em relação às massas ou configurações finais das órbitas dos planetas.

Na Seção 2.3 realizamos uma simulação simples de uma migração dos planetas do sistema HD60532 b-c, modelando interações gravitacionais entre um disco de gás exterior e o planeta HD60532-c com uma força de Stokes não conservativa.

### 2.1.2 55 Cnc b-c

O objeto 55 Cnc é um sistema de estrelas binárias, distantes cerca de 1065 AU uma da outra. 55-Cnc A é uma estrela anã do tipo K0 com massa  $M = 0.905M_\odot$  (von Braun et al., 2011) e é orbitada por uma estrela anã do tipo M. Ao redor da estrela A existe um sistema de cinco planetas.

Os planetas b e c deste sistema planetário possuem massas  $m_b = 0.844 \pm 0.124M_J$  e  $m_c = 0.1M_J$  e encontram-se próximos a uma 3/1 MMR. Enquanto apenas quatro dos

planetas do sistema haviam sido detectados, foi suposto que os estes planetas encontravam-se no interior de uma 3/1 MMR (Zhou et al., 2004; Marzari et al., 2005), mas com novas observações realizadas através do método de velocidades radiais, (Fischer et al., 2008) supôs a existência de um quinto planeta, e os elementos orbitais dos planetas foram corrigidos. Posteriormente, estes elementos foram recalculados devido à descoberta de um novo planeta. Dawson e Fabrycky (2010) em um estudo mais recente, afirmam que o par  $b - c$  encontra-se na verdade em um regime quase-ressonante.

Neste trabalho, utilizamos os dados obtidos por Nelson et al. (2014) em que realizou-se uma análise bayesiana com um *N-Body differential Markov-Chain Monte Carlo* da velocidade radial e observações de trânsito. A dinâmica do sistema planetário em geral também foi estudada nesse trabalho. O par  $b - c$  novamente foi classificado fora da ressonância 3/1 de movimentos médios, apesar da proximidade dela. Como é um dos poucos sistemas de exoplanetas próximos a 3/1 MMR com  $m_2/m_1 < 1$ , sua dinâmica será brevemente analisada neste trabalho.

### 2.1.3 HD10180 d-e

HD10180 é uma estrela do tipo solar com uma massa de  $M = 1.06 \pm 0.05 M_{\odot}$ . É um dos sistemas exoplanetários mais interessantes detectados, composto por sete planetas confirmados (Lovis et al., 2011). Tuomi (2012) supôs que a estrela na verdade pode abrigar até nove planetas. Outro estudo, considerando a inclinação dos planos orbitais Kane e Gelino (2014) obteve um sistema com seis corpos como melhor ajuste, considerando todas as órbitas excêntricas. Laskar e Correia (2011) estudaram a estabilidade a longos períodos dos ajustes com sete planetas a partir dos dados observacionais, mostrando que o planeta mais interno,  $b$  teria um rápido aumento em sua excentricidade devido a perturbações seculares dos outros planetas e à forte interação de maré com a estrela. Também no mesmo trabalho introduziu-se a fricção da maré e através da análise da dinâmica secular do sistema, obtiveram os vínculos que tornariam a órbita deste planeta estável. Uma vez que os dados observacionais superestimam as excentricidades dos planetas, foi possível fazer um ajuste destes dados e declarar que os elementos orbitais determinados parecem confiáveis.

Apesar das diferentes soluções obtidas para a quantidade de planetas do sistema, os planetas  $d$  e  $e$  em todos os casos, continuam com uma razão de períodos próxima a 3/1

MMR. Uma vez que este sistema possui um número bastante grande de exoplanetas e a maioria deles com massas pequenas, da ordem de Netuno, é um sistema bastante interessante, sendo uma boa opção para comparar com os planetas do sistema solar. Contudo, os semieixos dos planetas são bem menores quando comparados a escala do sistema solar, por isso, as interações gravitacionais entre os corpos é bastante forte, tornando seu estudo um caso mais complexo. O par HD10180 b-c, portanto, pode não ser adequado para ser estudado sob o problema de três corpos, uma vez que as fortes interações com seus companheiros devem ter uma importância fundamental em sua dinâmica.

#### 2.1.4 GJ 6163 b-c

O par de planetas GJ 163 b-c faz parte de um sistema cujas observações e análises apontaram a existência de três ou quatro planetas. A estrela GJ 163 é uma anã M3.5 (Hawley et al., 1996) com massa de  $M_{\star} = 0.40M_{\odot}$  com cerca de 10% de incerteza (Delfosse et al., 2013).

A detecção dos exoplanetas e de seus elementos orbitais foi realizada quase simultaneamente por Bonfils et al. (2013) e Tuomi e Anglada-Escudé (2013) através das velocidades radiais obtidas pelo espectrômetro HARPS. Ambos encontraram como mais provável um sistema com três planetas, podendo existir um quarto (embora não haja evidências conclusivas disso). Um deles, GJ163-c podendo estar no interior de uma zona habitável. A determinação dos elementos orbitais nos dois casos foi realizada através de métodos bayesianos.

Bonfils et al. (2013) utilizaram o método de *Markov chain Monte Carlo* e determinaram dois planetas, *b* e *c* com períodos de cerca de 8 e 25 dias e o planeta *d* com cerca de 600 dias de período orbital. Como a razão de períodos entre os planetas *b* e *c* figura em torno de  $T_c/T_b = 2.97$ , os autores realizaram uma análise dinâmica para detectar se o sistema se encontra no interior de uma 3/1 MMR e constataram que o sistema estaria fora desta ressonância, com o ângulo  $\Delta\varpi$  oscilando em torno de  $180^\circ$  em um regime puramente secular com pequena amplitude.

Tuomi e Anglada-Escudé (2013) utilizaram ferramentas bayesianas baseadas em trabalhos anteriores (Tuomi et al., 2013) para obter as melhores estimativas dos sinais dos planetas nos dados RV de GJ 163, usando diferentes modelos. Assim como Bonfils et al. (2013), também obtiveram três planetas como melhor solução para os dados de velocidade

radiais.

Nos dois casos, os planetas têm aproximadamente os mesmos períodos, com massas bastante similar: em Bonfils et al. (2013) a massa máxima dos planetas GJ-163-*b* e GJ-163-*c* é de  $\approx 10.6M_{\oplus}$  e  $7.3M_{\oplus}$ , enquanto em Tuomi e Anglada-Escudé (2013) é de  $9.6M_{\oplus}$  e  $8.2M_{\oplus}$  respectivamente. Os semieixos são praticamente os mesmos nos dois casos e a maior diferença encontra-se nas excentricidades. No primeiro caso tem-se  $e_1 = 0.0106$ ,  $e_2 = 0.0094$  e o segundo  $e_1 = 0.03$  e  $e_2 = 0.08$ .

Ao longo deste trabalho, quando consideramos os dados do sistema GJ 163 b-c, nos referiremos aos obtidos por Bonfils et al. (2013). Apesar do mesmo haver afirmado que o sistema encontra-se fora da 3/1 MMR, estudos mais detalhados são necessários.

## 2.2 Outros sistemas exoplanetários candidatos a 3/1 MMR

Outros sistemas exoplanetários detectados situam-se próximos a uma comensurabilidade 3/1 de movimentos médios. Porém, a maior parte destes não possui suas excentricidades ou massas determinadas. Em Rowe et al. (2014), por exemplo, há vários sistemas detectados próximos a 3/1 MMR, porém grande parte deles com dados incompletos, e por isto, os excluimos deste estudo.

Como o número de casos de exoplanetas em MMRs de segunda ordem não é grande, alguns dos sistemas que valem ser lembrados para uma futura análise da sua dinâmica próxima a uma 3/1 MMR são: Kepler-180 b-c, Kepler-326 b-d, Kepler-359 b-d, Kepler-107 b-e, Kepler-102 b-c, Kepler-373 b-c, Kepler-84 c-d. A variedade de parâmetros destes sistemas pode ajudar-nos a entender quais são os mais propensos a uma captura em uma 3/1 MMR.

## 2.3 Sobre a origem dos sistemas planetários próximos a 3/1 MMR

A origem dos sistemas exoplanetários próximos ou no interior de uma MMR é ainda um tema bastante discutido. O fato dos planetas no sistema solar se encontrarem próximos a ressonâncias de movimentos médios, mas não em seu interior, é um forte indicativo de que uma migração convergente entre os planetas ocorreu durante os estágios iniciais de sua formação (Lee e Peale, 2002). Algumas das suposições para a formação dos sistemas exoplanetários em uma MMR são:

- A migração e captura dos planetas em uma MMR em direção a uma órbita mais interna, devido à interações com o disco de gás, que já foi amplamente discutida em trabalhos como (Lee e Peale, 2002; Ferraz-Mello et al., 2003; Beaugé et al., 2006).
- A formação *in situ* dos exoplanetas. De acordo com o modelo de *Minimum-mass solar nebula* (Weidenschilling, 1977; Hayashi, 1981), o modelo *minimum-mass extrasolar nebula* (Chiang e Laughlin, 2013) ou finalmente o que considera formação através da migração rápida de planetésimos, que leva a um disco interno de densidade sólida superficial suficiente para a formação dos exoplanetas (Hansen e Murray, 2012).
- A captura de um sistema por espalhamento (*scattering*). Apesar dos estudos terem mostrado que há uma baixa probabilidade de configurações ressonantes serem alcançadas através deste processo (Raymond et al., 2008, 2009).

A maioria dos planetas no sistema solar, entretanto, não estão capturados no interior de ressonâncias de movimentos médios. Um dos mecanismos supostos para explicar essa característica diz que o desvio pode ter ocorrido devido a migrações divergentes ou características estocásticas do mecanismo migratório (Hahn e Malhotra, 1999). Em relação aos sistemas de exoplanetas, em especial os tipo Jupiter Quente, diz-se que as interações de maré entre os planetas podem ser responsáveis pela saída dos sistemas da sua configuração ressonante (Lithwick e Wu, 2012; Batygin e Morbidelli, 2013).

Dentre as teorias que tentam explicar como se formam os exoplanetas em uma MMR, o mecanismo mais provável é o que supõe a migração dos exoplanetas devido a interação com o disco primordial protoplanetário. A força gerada pela massa do disco age sobre os planetas, fazendo-os migrar à orbitas mais internas, aproximando-os da estrela. Um modelo desta interação foi desenvolvida por Lin e Papaloizou (1979) e posteriormente estudado por Goldreich e Tremaine (1979) e Goldreich e Tremaine (1980).

Kley (2000), Kley (2003), Snellgrove et al. (2001), Papaloizou (2003) mostraram que uma escolha adequada de parâmetros pode levar os sistemas planetários a uma migração interior e também à sua captura em uma MMR. Em Dermott et al. (1988) e Gomes (1995a) é demonstrado que ela é mais provável quando as excentricidades das órbitas dos planetas é menor. Por esse motivo, as condições iniciais que utilizaremos cumprirão esta condição.

Já em Michtchenko e Rodríguez (2011) é demonstrado que os sistemas planetários podem ser capturados em uma MMR através de uma migração com uma dissipação lenta

através das soluções estacionárias do problema secular e sua convergência depende da razão das massas dos planetas e da ordem da ressonância de movimentos médios.

Portanto, a possibilidade de formação de um sistema exoplanetário em MMR através de um processo migratório pode servir de parâmetro para determinar se os elementos orbitais determinados através dos métodos de detecção são plausíveis, verificando sua estabilidade e probabilidade de ser capturado.

### 2.3.1 Toy model de uma simulação de migração adiabática sob força de Stokes aplicada ao sistema HD60532 b-c

Nesta seção realizamos um experimento simples de uma simulação de migração do sistema planetário HD60532 b-c. Conforme dito na seção 2.1.1, as tentativas de simular a sua formação falharam até o momento.

Nossa intenção é observar se este sistema planetário pode ser capturado na 3/1 MMR através de uma migração adiabática. Consideramos que o corpo externo é influenciado pela interação com o disco de gás ao redor da estrela, migrando em uma velocidade diferente do planeta interno. Este último migra em conjunto com o planeta externo devido à atração gravitacional entre ambos, até que sejam capturados no interior de uma MMR.

Consideramos uma migração adiabática como o mecanismo que leva à captura da ressonância. Seguimos o procedimento visto em Beaugé et al. (2006), para planetas com órbitas iniciais quase-circulares ou circulares. Neste modelo são adicionados termos que correspondem às forças não-conservativas às equações exatas de Newton do problema em questão. Estes termos tem a forma de uma força de Stokes:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -C(\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v}_c), \quad (2.2)$$

em que  $\mathbf{r}$  é o vetor posição do corpo, tomando como referencial a estrela,  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade,  $\mathbf{v}_c$  é o vetor velocidade circular na mesma posição e  $C$  e  $\alpha$  são parâmetros relacionados com as características do gás do disco onde os planetas estão inseridos.

Introduzindo a Equação 2.2 nas equações diferenciais do problema de três corpos, consegue-se demonstrar que os semieixos e excentricidades dos planetas sobre os quais atua a força de Stokes em conjunto com a resultante das forças gravitacionais, tem a seguinte forma, em primeira ordem em excentricidades (Beauge e Ferraz-Mello (1993),

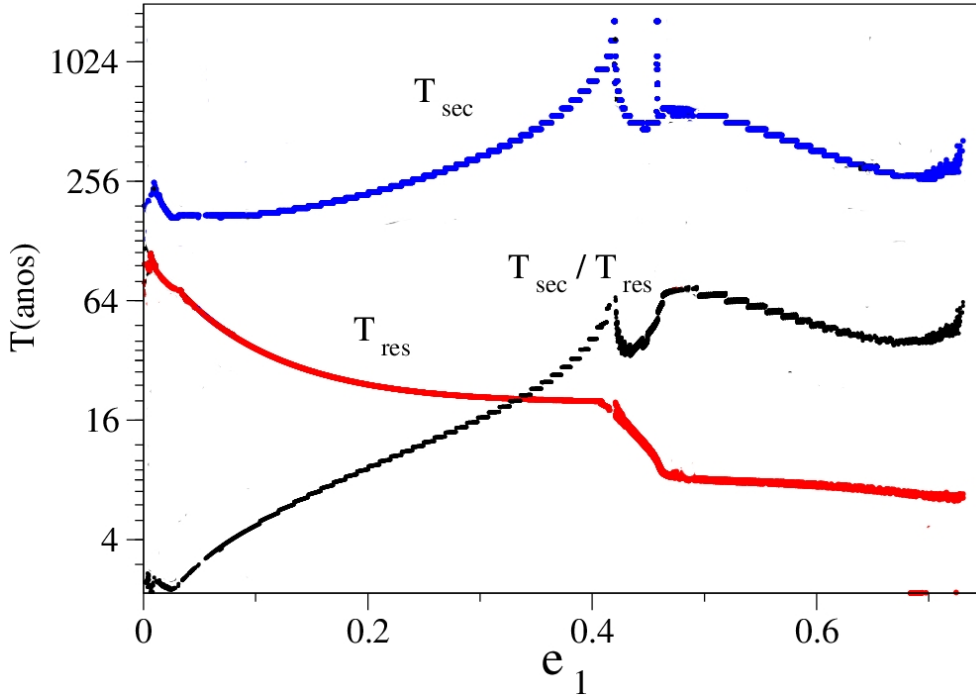


Figura 2.2: Períodos próprios calculados ao longo da  $(\pi, \pi)$ -ACR para o sistema HD60532 b-c. A curva em vermelho corresponde ao período ressonante ( $T_{res}$ ), a curva em azul ao período secular ( $T_{sec}$ ) e a curva em negro à razão entre  $T_{sec}/T_{res}$ .

Gomes (1995b)):

$$a_i(t) = a_{i0}e^{-A_it}, e_i(t) = e_{i0}e^{-B_it}, \quad (2.3)$$

em que  $a_{i0}$  e  $e_{i0}$  são os valores iniciais de semieixo e excentricidade para  $t = 0$ . Já as constantes  $A_i$  e  $B_i$ , que definem a ordem de decaimento ou crescimento dos elementos orbitais em questão, estão relacionadas com os parâmetros da força de Stokes da Equação (2.2) da seguinte forma:

$$A = 2C(1 - \alpha)B = C\alpha \quad (2.4)$$

Para uma migração adiabática, a razão entre o período de oscilação em torno da solução de ACR deve ser muito menor que a derivada em função do tempo do semieixo maior (Beaugé et al., 2006). Ou seja:

$$\epsilon \equiv \tau|A| \ll 1. \quad (2.5)$$

Conferimos a satisfação desta condição construindo o gráfico dos períodos próprios do sistema para sua razão de massas  $m_2/m_1 = 2.36$ , conforme visto em Michtchenko et al. (2008b).

Como o decaimento dos semieixos e excentricidades são exponenciais, podemos obter os elementos orbitais atuais de um sistema através da simulação da migração dos planetas,



utilizamos o parâmetro  $K_c = \tau_a/\tau_e$ , em que  $\tau_a$  e  $\tau_e$  são os tempos de decaimento do semieixo e excentricidade, que correspondem ao inverso de  $A_i$  e  $B_i$  da Equação 2.3. O parâmetro  $K_c$  pode ser calculado em função dos elementos orbitais osculadores de um sistema de exoplanetas através da relação:

$$(1 - \beta_2)(1 - b) + \frac{2e_2^2}{\beta_2}K_c = (1 - \beta_1 + \frac{q}{p})b\frac{L_1}{L_2}, \quad (2.6)$$

em que,

$$\begin{aligned} \beta_i &= \sqrt{1 - e_i^2} \quad (i = 1, 2), \\ b^{-1} &= 1 + \frac{p + q}{p} \frac{L_1}{L_2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

como visto em Nelson e Papaloizou (2002) e escrito nesta forma por Beaugé et al. (2006). Aplicaremos este modelo ao sistema HD60532 b-c, utilizando para a integração os parâmetros orbitais do sistema na Tabela 2.3, uma vez que os dados na tabela correspondem aos elementos osculadores dos planetas.

Como veremos no próximo capítulo, os valores médios das excentricidades figuram em torno de  $e_1 = 0.09$  e  $e_2 = 0.25$ . Calculando a constante  $K_c$  a partir da Equação 2.6 para este sistema obtemos  $K_c \approx 20$ , de modo que utilizamos  $\tau_a = 5 \times 10^6$  anos e  $\tau_e$  calculado em relação a  $K_c$  e  $\tau_a$ .

### 2.3.2 Resultados das simulações

Tomamos então, vários conjuntos de condições iniciais para observar por qual caminho HD60532 b-c pode vir a ser capturado na 3/1 MMR. Determinamos como condições para a migração altos valores de momento angular, com baixas excentricidades ou excentricidades nulas. A razão de movimentos que usamos como condição inicial teve valor de  $n_1/n_2 = 3.20$  situando o sistema planetário longe da ressonância 3/1 de movimentos médios.

Em Michtchenko e Rodríguez (2011) foi descrito que sistemas exoplanetários, através de um processo migratório, podem ser capturados em uma ressonância de movimentos médios através dos modos estacionários do problema secular. Neste caso, seus elementos orbitais evoluiriam sobre as soluções estacionárias do problema secular devido aos efeitos de dissipação que age sobre os planetas, variando, então, o momento angular total e fazendo os planetas migrarem a órbitas mais internas. Estas soluções estacionárias do problema

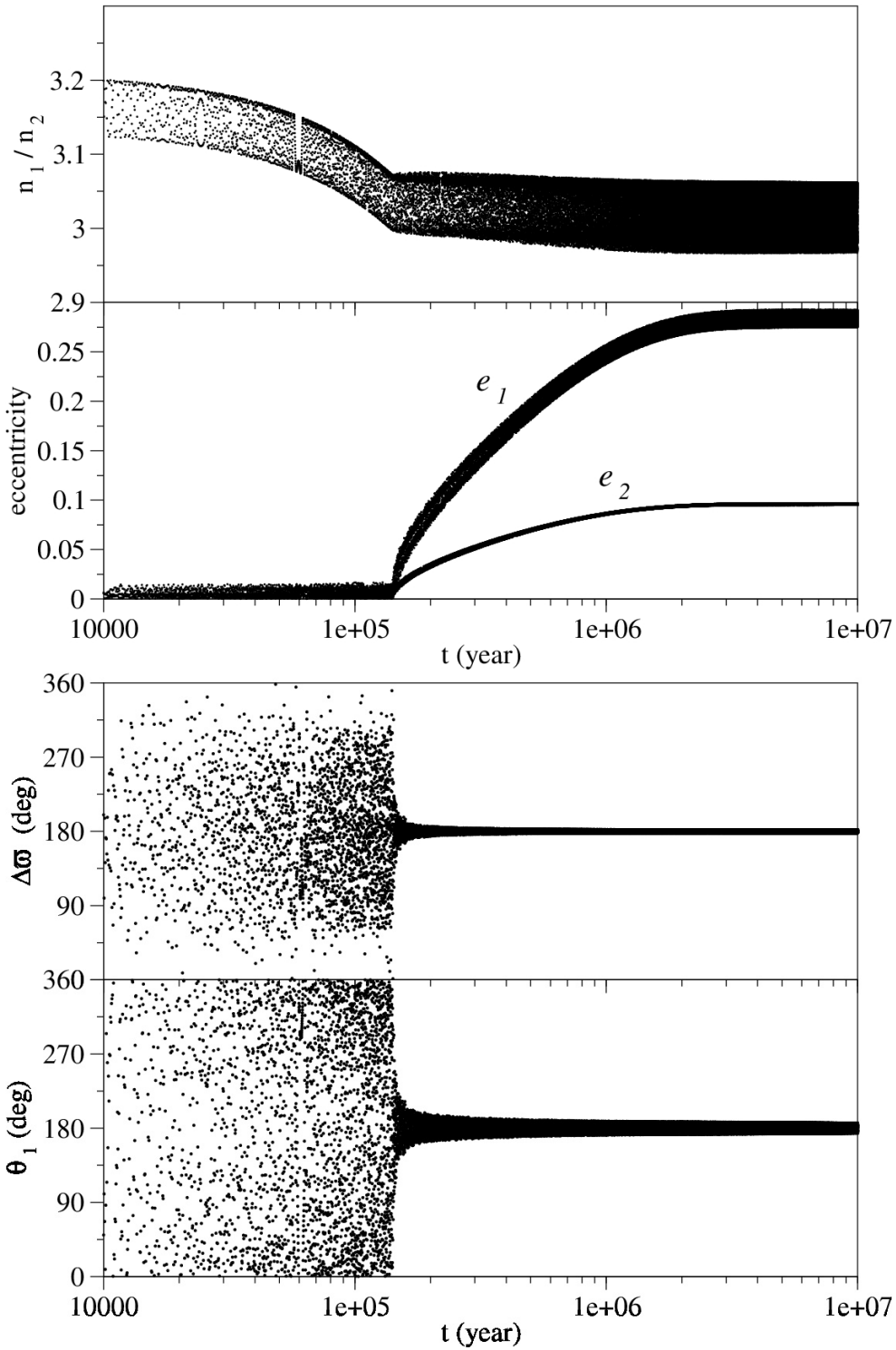


Figura 2.3: Simulação de uma migração adiabática devido à ação de uma força de Stokes aplicada ao planeta externo. Utilizamos  $K_c = \tau_a/\tau_e = 20$ , com  $\tau_a$  sendo o tempo de decaimento exponencial do semieixo do planeta externo e  $\tau_e$  o tempo de decaimento da excentricidade do planeta externo. Utilizamos  $\tau_a = 5 \times 10^6$ . As excentricidades iniciais dos planetas são ambas  $e_1 = e_2 \approx 0.001$ . O valor inicial da razão de movimentos médios é  $n_2/n_1 = 3.20$ . O sistema é capturado no interior da 3/1 MMR após 200 mil anos. Notamos que o ângulo crítico  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  ambos são capturados e passam a librar em torno de  $180^\circ$ . As excentricidades atingem os valores médios determinados em Laskar e Correia (2009) e permanecem estáveis nesta configuração após 2 milhões de anos. O sistema oscila em torno da  $(\pi, \pi)$ -ACR.

secular são chamadas Modo I e Modo II. No Modo I de movimento o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de 0, enquanto que no modo II de movimento o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de 180°.

Na Figura 2.3 mostramos o resultado obtido para a simulação de migração. Utilizamos como condições iniciais as excentricidades  $e_1 = e_2 = 0.001$ . Os semieixos são recalculados de forma que  $n_1/n_2 = 3.20$  e utilizamos  $K_c = 20$  com  $\tau_a = 5 \times 10^6$ . Notamos que o par de planetas é capturado depois de duzentos mil anos. Os ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  oscilam em torno de 180° e após 2 milhões de anos, o sistema estabiliza-se em torno de um valor estável e para de migrar. As excentricidades dos planetas oscilam, então, em torno dos valores médios das excentricidades reais do sistema HD60532 b-c e permanecem estáveis.

O comportamento dos ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  e dos elementos orbitais confirmam que o sistema atingiu um estado de mínima energia caracterizado pelas órbitas antialinhadas e da oscilação do ângulo crítico em torno de 180°. A definição deste ângulo crítico é realizada no capítulo seguinte.



## Modelagem do Problema

### 3.1 Desenvolvimento do Hamiltoniano Semi-Analítico

O problema que estudamos neste trabalho consiste em um sistema formado por dois planetas com massas  $m_1$  e  $m_2$  orbitando uma estrela central com massa  $M_0 \gg m_1, m_2$ . Os índices 1 e 2 sempre referir-se-ão aos planetas interno e externo respectivamente. Assumimos que ambas as órbitas dos planetas estão sobre um mesmo plano (problema planar). Nós aplicamos nosso modelo ao sistema HD60532 b-c cujos elementos orbitais encontram-se na Tabela 2.3 do capítulo anterior. Utilizamos as variáveis ação-ângulo canônicas de Poincaré em um referencial astrocêntrico (Laskar, 1991), cujos ângulos e momentos conjugados são:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \text{longitude média,} & L_i &= m'_i \sqrt{\mu_i a_i}, \\ -\varpi_i &= \text{longitude do pericentro,} & L_i - G_i &= L_i \left( 1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que:  $a_i$  e  $e_i$  são respectivamente os semi-eixos maiores e excentricidades das órbitas dos planetas;  $m'_i = \frac{m_i M_0}{m_i + M_0}$  é a massa reduzida e  $\mu_i = G(M_0 + m_i)$ , em que  $G$  é a constante gravitacional.

Escrevemos o Hamiltoniano do sistema nessas variáveis, que de modo geral assume a forma:

$$H = H_0 + H_1 \quad (3.2)$$

em que  $H_0$  corresponde à parte Kepleriana, ou seja, à interação entre a estrela e cada planeta, e é definida como:

$$H_0 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 m_i^3}{2L_i^2}. \quad (3.3)$$

O segundo termo,  $H_1$  é a parte perturbadora do Hamiltoniano, que é escrito da forma:

$$H_1 = -Gm_1m_2 \frac{1}{\Delta} + T_1 \quad (3.4)$$

O primeiro termo da equação 3.4 é a parte direta da função perturbadora, sendo  $\Delta$  a distância instantânea entre os dois planetas. O segundo termo é a parte indireta da função perturbadora. O leitor pode referir-se a Laskar e Robutel (1995) e Ferraz-Mello et al. (2005) para mais detalhes.

Escrevemos uma ressonância na forma  $(p + q)/p$ , em que  $q$  é chamada a ordem da ressonância e ambos  $p$  e  $q$  são números inteiros. No caso da 3/1 MMR, tem-se  $p = 1$  e  $q = 2$ . Para um sistema na vizinhança de uma ressonância de movimentos médios é adequado o uso das coordenadas canônicas de Poincaré dadas pelas equações 3.1, sobre as quais realizamos uma transformação canônica e obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1, & & J_1 &= L_1 + s(I_1 + I_2), \\ \lambda_2, & & J_2 &= L_2 - (1 + s)(I_1 + I_2), \\ \sigma_1 &= (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \varpi_1, & I_1 &= L_1 - G_1, \\ \sigma_2 &= (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \varpi_2, & I_2 &= L_2 - G_2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que  $s = p/q$ , e os ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são chamados de ângulos críticos.

É importante ressaltar que embora os ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sejam chamados de ângulos críticos, não são os únicos, pois um terceiro,  $\sigma_3$ , existe para uma 3/1 MMR de acordo com a regra de D'Alembert. Este é escrito da forma:

$$\sigma_3 = (1 + s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \frac{1}{2}\varpi_1 - \frac{1}{2}\varpi_2. \quad (3.6)$$

A escolha dos ângulos para estudo da topologia e dinâmica do problema será detalhada mais adiante.

O problema escrito em função das variáveis das Equações 3.5 tem quatro graus de liberdade a priori. Como citamos, elas são obtidas de uma transformação canônica nas equações 3.1 sob a forma:  $T(M_1, M_2, \varpi_1, \varpi_2) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)$ , onde  $M_i = \lambda_i - \varpi_i$ , que

são as anomalias médias dos planetas. Assim, os ângulos genéricos do problema que antes eram escritos:  $\theta = mM_1 - nM_2 + k\Delta\varpi$ , passam a ter a seguinte forma:

$$\theta = m\sigma_1 - n\sigma_2 + k(\sigma_2 - \sigma_1) + [m(p + q) - np]Q, \quad (3.7)$$

onde  $Q$  é o ângulo sinódico definido como  $Q = q(\lambda_1 - \lambda_2)$  (Beaugé e Michtchenko, 2003),  $m$  e  $n$  são números inteiros. Os parâmetros  $p, q, m$  e  $n$  obedecem a regra de D'Alembert.

A expressão 3.7 nos mostra que o Hamiltoniano não mais depende das longitudes médias individuais de cada planeta, e sim da diferença entre elas. O Hamiltoniano agora pode ser escrito apenas em função dos ângulos  $(\sigma_1, \sigma_2, Q)$ , e o momento conjugado à  $\lambda_1 + \lambda_2$  é uma constante global; o momento angular total do sistema:

$$AM = J_1 + J_2. \quad (3.8)$$

Uma vez que estamos interessados em estudar a dinâmica a longos-períodos, as interações de curto-período não devem influenciar o movimento nestas escalas de tempo. Deste modo, eliminamos os termos de altas frequências através do método semi-analítico (Michtchenko et al., 2006) em que submetemos o Hamiltoniano a uma média numérica sobre os ângulos rápidos do problema. Como o ângulo sinódico  $Q$  depende apenas das longitudes médias e possui uma frequência muito mais alta do que os ângulos  $\sigma_i$  na vizinhança da comensurabilidade, realizamos a média numérica sobre ele, restando ao Hamiltoniano médio as perturbações ressonante e secular. A média pode ser escrita na forma:

$$\overline{H}(I_1, I_2, \sigma_1, \sigma_2; J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H dQ. \quad (3.9)$$

Esta média introduz um segundo parâmetro global invariante, a constante de espaçamento ou constante de escala:

$$K = (1 + s)L_1 + sL_2 = (1 + s)J_1 + sJ_2 = \text{cte}, \quad (3.10)$$

(Michtchenko e Ferraz-Mello (2001b)).

cuja constância pode ser percebida a partir da transformação entre as variáveis da Equação 3.1 para as da 3.5 conforme a relação da Equação 3.10. Ela introduz um acoplamento entre os semieixos maiores dos planetas que, próximos à ressonância, oscilam em anti-fase entre si. Ou seja, quando o semieixo de um dos planetas é máximo, o do outro é mínimo. Desta forma, o valor  $K$  permanece constante. Além disso, as amplitudes dessas

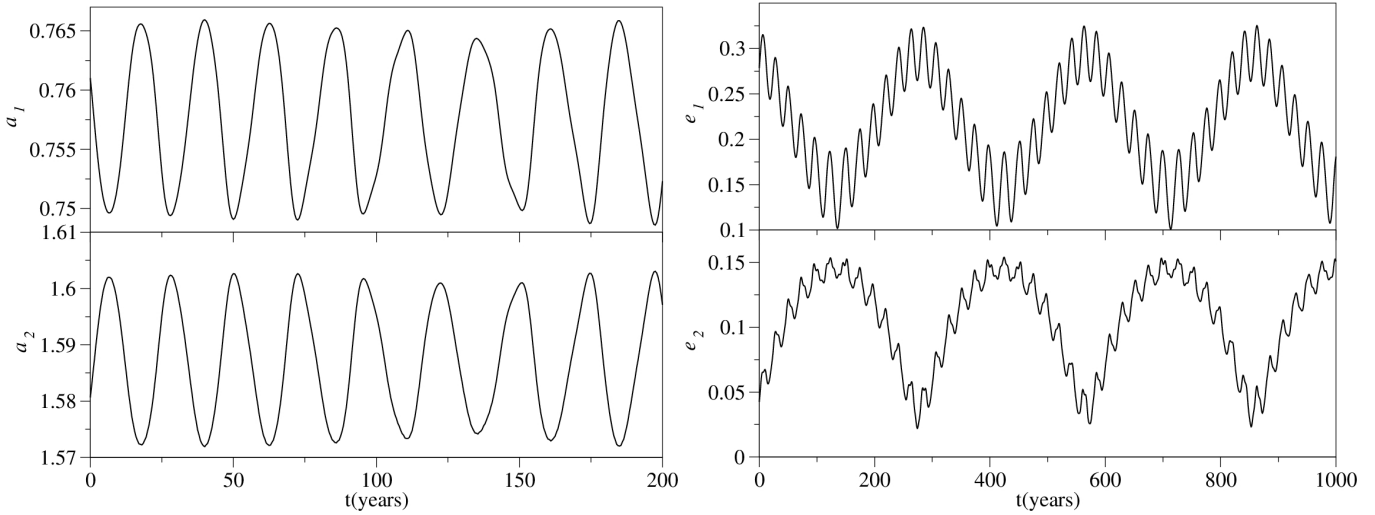


Figura 3.1: Evolução temporal dos semieixos maiores (esquerda), e excentricidades (direita) de um sistema planetário ressonante. Notamos que o semieixo maior exibe apenas uma frequência principal que tem um período da ordem das interações ressonantes. O gráfico das excentricidades mostra duas frequências principais, secular e ressonante. Também percebemos a relação dos semieixos e excentricidades com as constantes  $K$  e  $AM$  respectivamente.

oscilações são inversamente proporcionais às suas massas. Esta oscilação ocorre numa frequência relacionada com as interações ressonantes, uma vez que para uma expansão em primeira ordem em massa não há variação secular dos semieixos maiores (Michtchenko et al., 2008b).

O sistema agora possui dois graus de liberdade. Como temos duas constantes de movimento,  $K$  e  $AM$ , podemos recalculamos os elementos orbitais em função dessas constantes para um mesmo nível de momento angular. Se consideramos os semieixos maiores dos planetas constantes ou oscilando com pequena amplitude, o momento angular total introduz uma relação entre as excentricidades dos dois planetas, de modo que quando uma cresce, a outra tem que decrescer para manter constante o momento angular. No gráfico do lado direito da Figura 3.1 vemos a evolução temporal das excentricidades dos planetas. A escala de tempo das oscilações das excentricidades está relacionada com a frequência do ângulo secular  $\Delta\varpi$  e tem ordem de centenas de anos.

No gráfico do lado esquerdo da Figura 3.1 podemos ver estas propriedades. A frequência de oscilação ressonante é da ordem de algumas dezenas de anos. Os gráficos nesta figura foram calculados a partir dos dados do sistema HD60532 b-c, com os semieixos tais que o sistema encontra-se sobre o valor nominal da ressonância.



### 3.2 Escolha do ângulo ressonante

A invariância das constantes  $AM$  e  $K$  tem consequências importantes para a evolução orbital do sistema. Ela indica que o problema possui apenas dois graus de liberdade e, conseqüentemente, apenas duas são as variáveis-ângulo livres do problema. A evolução dinâmica do sistema pode então ser determinada por dois modos de movimentos:

1. **O Modo secular de movimento:** relacionado com o ângulo secular  $\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1$ . O comportamento dentro da região ressonante deste ângulo é de libração ou circulação.  $\Delta\varpi$  é o único dentre os ângulos principais relacionado com esta interação e o definimos como um dos ângulos livres do problema.
2. **O modo ressonante de movimento:** relacionado com o ângulo crítico ressonante, que pode ser um dos três possíveis para o caso da 3/1 MMR. Estes três ângulos são  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  que podem ser vistos nas Equações 3.5 e 3.6. Dentro do regime ressonante o ângulo crítico ressonante vibra em torno de um valor de equilíbrio. Quando isto não ocorre para nenhum dos ângulos ressonantes, dizemos que o sistema encontra-se fora da ressonância, passando a circular ou oscilar. Como o problema tem apenas dois graus de liberdade, apenas um destes ângulos é livre. Os outros dois são portanto escritos em função do ângulo crítico ressonante e de  $\Delta\varpi$ .

É imperativo, então, determinar qual dos ângulos ressonantes deve ser o ângulo crítico do problema, determinando em conseqüente quais são os dependentes. Para tal, comparamos os coeficientes relacionados aos ângulos ressonantes de um Hamiltoniano desenvolvido através da expansão da função perturbadora em coeficientes de Laplace. Esta expansão foi primeiro realizada por Le Verrier (1855) e mais recentemente reestudada e revisada por Murray e Dermott (1999), Murray (1985) e Brouwer e Clemence (1961). Uma expansão similar, mas para a ressonância 2/1 de movimentos médios foi desenvolvida por Callegari et al. (2004) e durante o mestrado realizamos uma expansão da 3/1 MMR (Alves, 2010) até a 2ª ordem em excentricidades.

Como a construção do Hamiltoniano é realizada através da expansão de uma série infinita, seriam necessários infinitos termos para descrever o problema exatamente. Os argumentos dos cossenos de cada termo desta série tem a forma geral:

$$\phi = j_1\lambda_1 + j_2\lambda_2 + j_3\varpi_1 + j_4\varpi_2 + j_5\Omega_1 + j_6\Omega_2, \quad (3.11)$$

e os coeficientes de cada um dos ângulos que determinam estes termos obedecem a regra de D'Alembert, que diz que a sua soma é nula, ou seja:

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0. \quad (3.12)$$

Para uma primeira aproximação, elegemos os termos mais importantes para descrever um sistema nos arredores de uma ressonância 3/1 de movimentos médios. Escolhemos apenas os termos responsáveis pela componente secular (ou seja, sem dependência dos ângulos rápidos do sistema) e os ligados à ressonância em questão, que introduzem os pequenos divisores devido à proximidade com a ressonância (neste caso os termos com a relação  $3n_2 - 1n_1 \cong 0$ ). O Hamiltoniano final desenvolvido encontra-se na equação 3.13 a seguir:

$$\begin{aligned} H = & A(I_1 + I_2) + 2B(I_1 + I_2)^2 + CI_1 + DI_2 + E\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varpi \\ & + F_1 I_1 \cos(2\sigma_1) + F_2 I_2 \cos(2\sigma_2) + F_3 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que,

$$\begin{aligned} A &= -\frac{M_1}{2J_1^3} + \frac{3}{2} \frac{M_2}{2J_2^3}, & B &= -\frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{M_1}{J_1^4}, \\ C &= -c_2 \frac{M_3}{J_1 J_2^2} + \frac{3}{2} c_1 \frac{M_1}{J_2^3}, & D &= -c_3 \frac{M_3}{J_2^3} + \frac{3}{2} c_1 \frac{M_3}{J_2^3}, \\ E &= -c_4 \frac{M_3}{J_2^2 \sqrt{J_1 J_2}}, & F_1 &= -\frac{1}{2} c_5 \frac{M_3}{J_2^3 J_1}, \\ F_2 &= -\frac{1}{2} c_6 \frac{M_3}{J_2^3}, & F_3 &= \frac{1}{2} c_7 \frac{M_3}{J_2^2 \sqrt{J_1 J_2}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

e:  $M_1 = \mu_1^2 m_1^3$ ,  $M_2 = \mu_2^2 m_2^3$  e  $M_3 = \frac{m_1 M_2}{M_0}$ .  $c_i$  são os coeficientes de Laplace e possuem a forma:

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{1}{2} \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha), \\ c_1 &= \frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha), \\ c_2 &= \frac{1}{8} [2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{\frac{1}{2}}^{(0)}, \\ c_4 &= \frac{1}{4} [2 - 2\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] b_{\frac{1}{2}}^{(1)}. \\ c_5 &= \frac{1}{8} [21 + 10\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(3)}, \\ c_6 &= \frac{1}{4} [-20 - 10\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(2)}, \\ c_7 &= \frac{1}{4} [17 + 10\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(1)} - \frac{27}{8} \alpha. \end{aligned} \quad (3.15)$$

em que  $\alpha = a_1/a_2$  e  $D_\alpha^i$  é a  $i$ -ésima ordem de derivada em função de  $\alpha$ . Os coeficientes são obtidos através da série:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha) &= \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{1.2.3\dots j}\alpha^j \\ &\times \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)}\alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1.2(j+1)(j+2)}\alpha^4 + \dots \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

quando  $j = 0$ ,

$$\frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{1.2.3\dots j}\alpha^j = 1. \quad (3.17)$$

A série é convergente para  $\alpha < 1$ . A expansão é truncada em relação a série infinita dos coeficientes de Laplace. Quando dois termos consecutivos desta série possuem diferença menor que  $10^{-10}$ , consideramos uma aproximação suficiente.

A parte do Hamiltoniano que contém os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  não depende dos ângulos rápidos nem ressonantes do problema, sendo a parte secular do mesmo. Já os termos  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são coeficientes dos termos que correspondem à parte ressonante do Hamiltoniano e estão relacionados respectivamente com os ângulos  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Assumimos, então, que a escolha do ângulo ressonante pode ser conectada com a amplitude do seu termo no Hamiltoniano, de modo que o ângulo ressonante crítico é aquele que possui coeficiente  $F_i$  de maior módulo.

Em uma primeira análise, calculamos apenas a comparação entre os módulos de  $F_2$  e  $F_1$ , uma vez que estes coeficientes estão associados aos ângulos ligados ao planeta interno e externo. O coeficiente  $F_3$  está associado ao ângulo  $\sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  e, conseqüentemente, possui uma contribuição simétrica para a libração dos dois ângulos.

Na Figura 3.2 mostramos o módulo de  $|F_2| - |F_1|$  em função da razão de massas e excentricidade do planeta externo (gráfico superior) e das soluções  $(\pi, \pi)$ -ACR que serão calculadas no capítulo seguinte, para diferentes razões de massa indicadas na legenda (gráfico inferior).

Observamos que para valores de razão de massa  $m_2/m_1 < 1.5 (> 1.5)$ , aproximadamente,  $|F_2| > |F_1|$  ( $|F_2| < |F_1|$ ). A curva preta em negrito no gráfico superior marca o local onde  $F_1 \cong F_2$ . Na região vermelha,  $|F_1|$  é maior que  $|F_2|$ , e logo  $\sigma_1$  deve librar enquanto  $\sigma_2$  oscilar ou circular. Na região negra,  $|F_2| > |F_1|$ , e portanto,  $\sigma_2$  deve ser o ângulo crítico. A cruz marca a posição do sistema HD60532 b-c com razão de massas 2.36 e excentricidade do planeta externo  $e_2 = 0.038$ . No gráfico inferior, cada curva preta corresponde a um

valor de razão de massas indicadas pela legenda. A curva em vermelho é obtida quando  $F_1 \cong F_2$ . Notamos que esta curva aproxima-se à  $m_2/m_1 = 1.5$ , logo, ao redor dela, como a diferença de módulo entre  $|F_1|$  e  $|F_2|$  não é grande, a determinação do ângulo crítico não é clara.

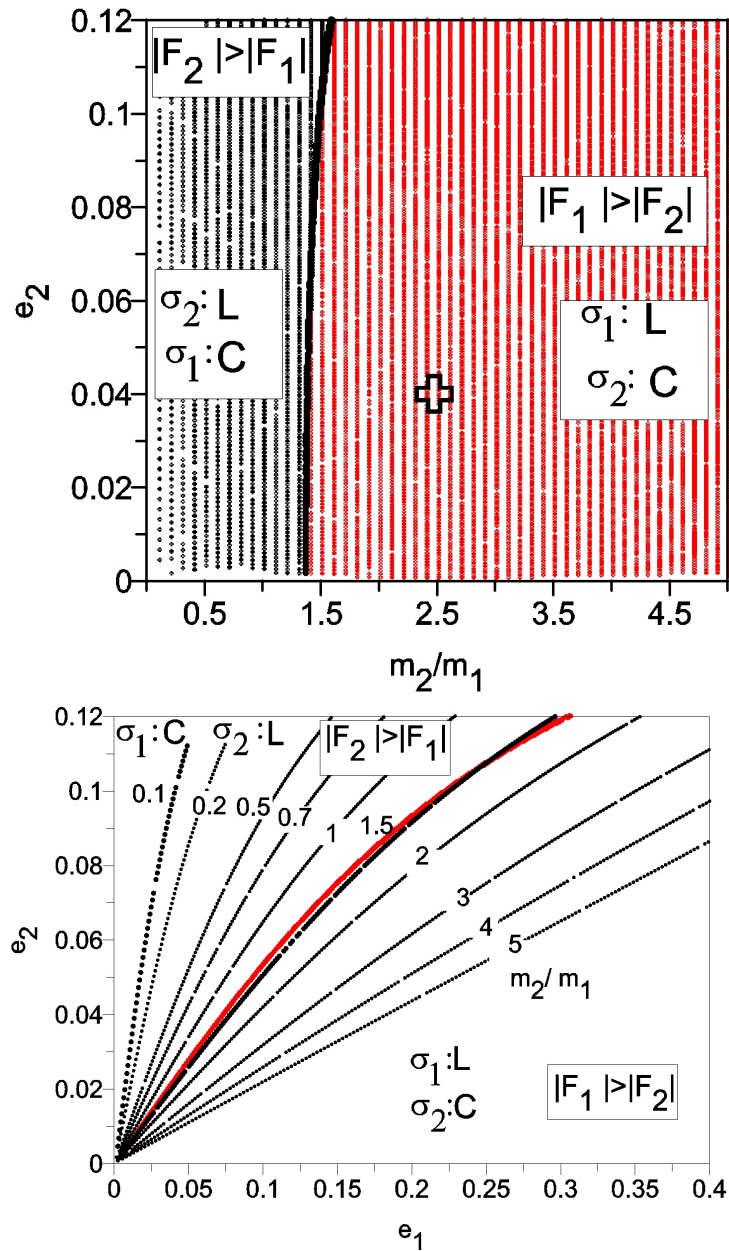


Figura 3.2: Em ambos gráficos os coeficientes de Laplace foram calculados ao longo de várias famílias de razão de massa das soluções de ACR simétricas usando as massas do sistema HD60532 b-c. Superior: Plano paramétrico com comparação entre os coeficientes de Laplace  $F_1$  e  $F_2$  associados aos ângulos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  em função da razão de massas e da excentricidade do planeta externo. A região vermelha corresponde aos módulos de  $|F_1| > |F_2|$  enquanto que a negra corresponde a  $|F_2| > |F_1|$ . O ângulo  $\sigma_1$  deve librar quando  $F_1 > F_2$ , enquanto  $\sigma_2$  oscila ou circula, e o inverso acontece quando  $|F_2| > |F_1|$ . A linha negra separa as regiões em que  $|F_1|$  e  $|F_2|$  são os coeficientes de maior módulo. (Inferior): Plano paramétrico comparando os coeficientes de Laplace associados aos ângulos ressonantes da 3/1 MMR em função das excentricidades dos planetas para várias famílias de razão de massa. Cada curva em negro corresponde a uma razão de massas descrita sobre o gráfico. A curva em vermelho define o limite em que há a mudança de ângulo libranter. À direita da curva,  $|F_1| > |F_2|$  e à esquerda  $|F_2| > |F_1|$ . No primeiro,  $\sigma_1$  deve ser o ângulo libranter, enquanto no segundo  $\sigma_2$  deve ser o ângulo libranter.

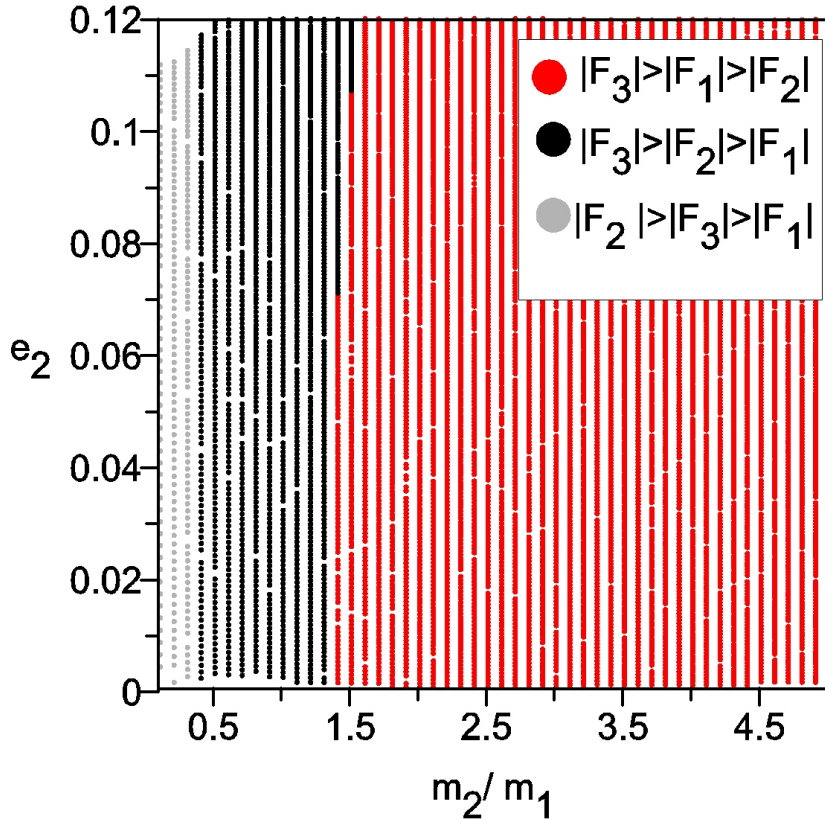


Figura 3.3: Plano paramétrico em função da razão de massas e excentricidade do planeta externo. Os módulos dos coeficientes foram calculados ao longo das famílias de ACR simétrico. As cores marcam as regiões onde os coeficientes  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  tem maior módulo. A região vermelha corresponde a  $|F_3| > |F_1| > |F_2|$ , a região em vermelho a  $|F_3| > |F_2| > |F_1|$  e a região cinza corresponde a  $|F_2| > |F_3| > |F_1|$ .

Uma comparação entre os módulos dos três coeficientes é feita no gráfico da Figura 3.3 em função de  $m_2/m_1$  e  $e_2$  e das mesmas condições iniciais do gráfico superior da Figura 3.2. Na região vermelha, onde  $m_2/m_1 > 1.5$ , tem-se  $|F_3| > |F_1| > |F_2|$ , na região em preto,  $|F_3| > |F_2| > |F_1|$  e na região cinza  $|F_2| > |F_3| > |F_1|$ . Na maior parte do plano  $F_3$  é o coeficiente de maior módulo e apenas para razão de massas muito baixas  $F_2$  tem maior módulo. Como  $|F_3|$  está associado aos dois corpos, pois  $\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$ , consideramos que o módulo de seu valor não é importante na hora de determinar qual o ângulo crítico, que retringiremos a  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .

Os gráficos vistos em 3.2 e 3.3 mostram que quando o planeta externo tem massa maior, o ângulo librante deve ser  $\sigma_1$  como nos casos dos objetos no cinturão de asteroides, e quando o planeta interno tem massa maior,  $\sigma_2$  deve ser o ângulo librante, como no caso dos objetos trans-netunianos. Ao redor de  $m_2/m_1 = 1.5$ , tanto o ângulo  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  podem librar. Em torno dela, a determinação do ângulo crítico é inconclusiva.

Este resultado implica que o corpo cujo ângulo associado libra é, quase sempre, o de menor massa, que sofre uma influência gravitacional mais forte. Nos trabalhos de Callegari et al. (2004); Michtchenko et al. (2008b,a) uma ressonância interna ocorre quando o ângulo referente ao planeta interno,  $\sigma_1$ , libra. Uma ressonância externa, ao contrário, ocorre quando  $\sigma_2$  libra. Esta definição pode relacionar-se, conforme citamos, à ressonância de três corpos restrita de objetos em nosso sistema solar. Os casos das ressonâncias interna dos objetos no cinturão de asteroides com Júpiter e os objetos transnetunianos em ressonância externa com Netuno são os casos extremos da classificação em relação a razão de massas, quando  $m_1 \rightarrow 0$  e  $m_2 \rightarrow 0$  respectivamente.

Na Tabela 3.1 escrevemos os valores dos coeficientes de Laplace calculados e a magnitude em módulo de cada um deles. Incluímos também a razão de massas dos planetas para todos os sistemas.

Sistema	$ F_1 $	$ F_2 $	$ F_3 $	$m_2/m_1$	ordem de magnitude.
HD60532 b-c	0.0651124	0.0370635	0.0956418	2.36	$ F_3  >  F_1  >  F_2 $
HD10180 d-e	0.0112544	0.0069224	0.0173463	2.12	$ F_3  >  F_1  >  F_2 $
55 Cnc b-c	0.0332037	0.202838	0.160718	0.21	$ F_2  >  F_3  >  F_1 $
GJ 163 b-c	0.0232124	0.0414828	0.052335	0.64	$ F_3  >  F_2  >  F_1 $
HD20781 b-c	0.00597424	0.00656756	0.0121951	1.31	$ F_3  >  F_2  >  F_1 $
HD31527 b-c	0.00781969	0.00758842	0.0154135	1.36	$ F_3  >  F_1  >  F_2 $

Tabela 3.1 - Relações entre as constantes dos termos ressonantes do Hamiltoniano obtido através da expansão de coeficientes de Laplace para os sistemas exoplanetários próximos a ressonância 3/1 de movimentos médios. Observamos também a razão de massas entre os planetas e como se relacionam os valores das constantes.

Os valores de  $|F_i|$  da tabela concordam com os resultados apresentados na Figura 3.2. Os sistemas HD60532 b-c e HD10180 b-c por possuírem razão de massas maior que 2 apresentam  $|F_1| > |F_2|$ . Já os sistemas com razão de massa menor do que 1, como 55 Cnc b-c e GJ163 b-c apresentam  $|F_2| > |F_1|$ , sendo as exceções os sistemas HD20781 b-c e HD31527 b-c, que apresentam  $m_2/m_1$  próximos a 1 (1.31 e 1.36). Notamos que no primeiro  $|F_2| > |F_1|$  enquanto no segundo  $|F_1| > |F_2|$ . O fato da razão de massas ser próxima a 1 mostra que existe uma indeterminação entre qual ângulo deve ser o crítico. É importante lembrar que como  $|F_3|$  não está associado a nenhum corpo individualmente, levamos em consideração apenas  $|F_1|$  e  $|F_2|$ .

Dada a complexidade do problema, uma análise mais profunda é necessária para investigar o comportamento dos ângulos nestas regiões e então, determinar qual ângulo deve ser o que libra, e portanto, o ressonante. Esta determinação do ângulo ressonante, portanto, deve antes de tudo servir como uma indicação.

### 3.3 Ferramentas numéricas

No Capítulo 5 faremos uma análise da dinâmica em torno das soluções de corrotação apsidal simétrica para um sistema próximo a 3/1 MMR. Ao redor dessas soluções de ACR há regimes dinâmicos que encontram-se relacionados a ressonância. Os métodos apresentados em seguida serão aplicados no estudo do problema. Focamos na análise frequencial através das transformadas de Fourier. Analisamos tanto a caoticidade de um sistema de acordo com suas condições iniciais, como a determinação das principais frequências do sistema e sua evolução em função dos elementos orbitais, identificando assim os diferentes regimes existentes.

#### 3.3.1 Mapas Dinâmicos

A construção dos mapas dinâmicos é baseada no *Spectral Analysis Method* (SAM) desenvolvido por Michtchenko e Ferraz-Mello (2001b) e descrita em detalhes em Michtchenko et al. (2002) e Ferraz-Mello et al. (2005). Este método foi aplicado por Michtchenko et al. (2001, 2006) e Michtchenko et al. (2008c) à dinâmica de asteroides e à sistemas próximos a uma 2/1 MMR. Através deste método podemos representar a dinâmica e determinar a regularidade do movimento em relação as condições iniciais de um sistema sobre um espaço de fase.

Um mapa dinâmico é formado por uma grade de condições iniciais calculadas através dos parâmetros orbitais de um plano de fase do problema, a serem usadas nas equações exatas do problema. Cada conjunto de condições iniciais é integrado durante um tempo suficiente para que se transcorram alguns períodos de escala de tempo do modo secular. Neste caso consideramos pelo menos 10 períodos de oscilação desta frequência.

Sobre o mapa distribuímos a quantidade ‘ $N$ ’, que é o número de picos do espectro de Fourier calculado, neste caso, sobre a série temporal dos parâmetros orbitais do sistema. No presente trabalho, realizamos a transformada de Fourier principalmente sobre as ex-



centricidades e razão de semieixos. Como mencionamos no capítulo passado, os semieixos no problema ressonante médio apresentam apenas frequência ressonante. As excentricidades, por sua vez, apresentam componente secular e ressonante. Através destas variáveis devemos mapear as frequências dos dois modos de movimento de modo satisfatório.

Para que um pico seja contado na obtenção do número espectral para cada ponto do mapa, as amplitudes devem ter um módulo de valor significativo. Este valor está relacionado com o ruído de pequenas amplitudes que costumam acompanhar sinais periódicos de alta frequência. Tomamos então, o valor da frequência de maior amplitude. Todas as frequências calculadas que tenham pico menor que 5% do valor da máxima, são descartadas.

Assim como nos espaços de fase calculados neste trabalho, para cada mapa dinâmico construído fixamos os ângulos  $\theta_1 = 2\sigma_1 + \Delta\varpi$  em 0 ou  $\pi$ . Esta escolha está relacionada com as soluções estacionárias de ACR simétrico. As condições iniciais das anomalias médias podem ser obtidas a partir de  $M_1 = \sigma_1 + (p+q)Q$ , e  $M_2 = \sigma_2 + pQ$  (Beaugé e Michtchenko, 2003), e usamos  $Q = 0$  e  $\sigma_i = \frac{\theta_i}{2}$ . Definimos também  $\varpi_1 = 0$  e logo,  $\varpi_2 = \Delta\varpi$ .

Neste trabalho os mapas dinâmicos foram construídos sob intervalos das variáveis do retrato de fase constante. A vantagem desta escolha é que através de uma mesma escala podemos, classificando quão regular ou caótica é uma região, comparar os diferentes mapas dinâmicos para vários sistemas planetários e determinar quais destes são mais caóticos em relação aos outros. Outra aplicação consiste em observar como evolui o caos para um sistema com dissipação, em que seu momento angular varia. Cada ponto de condições iniciais do mapa será integrado por pelo menos 100 mil anos.

Para alguns mapas, limitamos também os intervalos de frequência que não são importantes na dinâmica do problema. Para os calculados com os parâmetros físicos de HD60532 b-c (Tabela 2.3), por exemplo, filtramos todas as frequências maiores que  $1 \text{ ano}^{-1}$ . Nestes intervalos observamos apenas as frequências de curto período, que não nos interessam do ponto de vista ressonante.

É importante lembrar que a topologia do espaço de fase sobre o qual os mapas dinâmicos são desenvolvidos é determinado por três parâmetros: a razão de massa  $m_2/m_1$  e as quantidades  $K$  e  $AM$ . Estes últimos, respectivamente a constante de escala e o momento angular total do sistema que são as integrais primeiras do problema.

A importância do método reside em determinar quão caóticas são as regiões sobre um

espaço de fase do sistema em função de condições iniciais. No caso de movimentos caóticos, as frequências independentes variam no tempo, e o movimento não mais pode ser escrito como uma combinação de funções periódicas, pois a transformada de Fourier não consiste, neste caso, em uma soma de funções  $\sigma$ -Dirac. Como consequência, o espectro de potências dinâmico não é discreto, e sob um tempo suficiente apresentam um grande valor para o número espectral  $N$ . Nos mapas elaborados, classificamos o número espectral  $N$  em uma escala de cores do branco ao negro, respectivamente dos movimentos regulares aos caóticos. Assim, esperamos identificar as soluções estacionárias e de movimento quase-periódico que devem aparecer como regiões mais claras, delimitadas por separatrizes que são associadas ao caos.

### 3.3.2 Espectros de Potência Dinâmicos

O outro método que utilizamos também faz uso da análise do espectro de frequências através de transformadas de Fourier, e é conhecido por *Dynamical Power Spectra*. Este método foi desenvolvido por Michtchenko et al. (2002), e pode ser entendido como uma complementação ao mapa dinâmico quanto a compreensão da dinâmica. Ao invés de mapearmos as quantidades de picos, determinando a caoticidade de um conjunto de condições iniciais, apresentamos como evoluem as frequências em função dos parâmetros e elementos orbitais do sistema.

O uso desse método nos permite identificar, como nos mapas dinâmicos, a sensibilidade de determinadas frequências em relação aos parâmetros orbitais e como evoluem ao longo de suas variações. No caso de uma solução estacionária, por exemplo, a frequência possui um valor máximo. Regiões caóticas também podem ser associadas a pontos-de-sela e separatrizes de regimes de movimento. Batimentos entre frequências em regiões de ressonâncias secundárias ou outras ressonâncias de movimentos médios também podem ser identificados ao observarmos o espectro dinâmico.

Assim como nos mapas dinâmicos, limitamos as frequências detectadas para ressaltar que elas estejam dentro do intervalo de interesse de nosso estudo. A escolha das curvas sobre as quais realizamos o cálculo do espectro dinâmico é feita de modo que possamos observar como se comportam as frequências ao longo do máximo número de regimes de movimento possíveis.

Ambos os métodos, do Espectro de Potência Dinâmico e Mapas Dinâmicos, exigem

muito tempo de computação dado o alto número de integrações e filtragem dos termos de curto-período. Por este motivo, a fim de otimizar o tempo gasto para execução dos métodos, desenvolvemos a paralelização dos programas com o intuito de rodar em diferentes processadores os conjuntos de condições iniciais independentes que o programa computa. A paralelização foi realizada em conjunto com o Dr. Paulo Penteado, o qual contribuiu com a linguagem MPI utilizada na paralelização. Todos os programas foram rodados no cluster Alphacrucis do Departamento de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo em conjunto com a UNICSUL.

A paralelização foi feita de forma que, se dispomos de  $N$  processadores, podemos rodar  $N-1$  processos ao mesmo tempo, uma vez que um dos  $N$  processos é o processador mestre que administra, envia e recebe informações dos processadores chamados de escravos. Cada vez que um dos processadores escravos termina o seu *job*, o mestre recebe um sinal de fim de tarefa do processador escravo e transmite a ele um novo conjunto de condições iniciais. O programa termina quando não há mais conjuntos de condições iniciais não finalizadas. Utilizamos até 96 processadores ao mesmo tempo, de modo que podemos rodar 95 integrações a cada vez. A economia de tempo foi de até  $400\times$  em alguns casos. A velocidade com que os cálculos são processados dependem também do método de integração utilizado, das condições iniciais e dos parâmetros físicos dos corpos. Utilizamos para todos os casos o integrador Radau 15 que utiliza o algoritmo de um integrador Runge-Kutta de 15ª ordem desenvolvido para linguagem Fortran por Everhart (1985) e traduzido para linguagem C por Goździewski e Maciejewski (1995).

Nos próximos capítulos, principalmente no capítulo 5, aplicamos os métodos acima para analisar a dinâmica e caoticidade das regiões em torno das soluções estacionárias de ACR simétrico.



## Análise do Hamiltoniano Semi-Analítico

O objetivo deste capítulo é estudar as propriedades do Hamiltoniano desenvolvido no capítulo anterior. A partir dele faremos um estudo sistemático da topologia de um sistema de exoplanetas na proximidade de uma ressonância 3/1 de movimentos médios. Para isso, inicialmente examinamos os níveis de energia e momento angular sobre o espaço de fase dos elementos orbitais dos planetas através dos planos representativos. De posse desta análise, determinamos as soluções estacionárias do problema, classificando-as de duas formas: simétricas e assimétricas. Elas estão relacionadas com o valor em torno do qual o ângulo ressonante libra e as formas relativas das órbitas dos planetas. Encontramos as soluções simétricas através do método geométrico desenvolvido por Michtchenko e Ferraz-Mello (2001a) e determinamos então sua estabilidade. A partir das soluções instáveis, utilizando um algoritmo minimizador de funções, encontramos as soluções assimétricas associadas a elas. Ao longo do capítulo discutimos também as propriedades das soluções estacionárias, como a lei das estruturas (Ferraz-Mello, 1988).

### *4.1 Topologia do Hamiltoniano Semi-Analítico*

#### *4.1.1 Planos representativos*

A construção dos planos representativos tem sua importância no estudo da topologia do problema e na identificação dos principais regimes de movimento do problema médio ressonante. Permitindo-nos obter uma noção geral da dinâmica destes corpos no plano de condições iniciais.

Como o hamiltoniano médio que construímos tem dois graus de liberdade, o espaço de fase do problema ressonante é quadridimensional. Podemos reduzir esta análise para

um estudo sistemático das condições iniciais sobre o plano. Fixamos então, as condições iniciais dos ângulos  $\theta_1 = 2\sigma_1$  e  $\Delta\varpi$  observando assim, o espaço de fase sobre um plano bidimensional. Ao longo deste trabalho, estes planos estão escritos principalmente em função de  $(e_1, e_2)$  e  $(n_1/n_2, e_2)$ , onde  $n_1$  e  $n_2$  são os movimentos médios dos planetas interno e externo respectivamente. Em ambos casos o valor dos semieixos maiores são recalculados através das equações (3.10) e (3.8) fixadas as constantes do problema, AM, K e  $m_2/m_1$ .

#### 4.1.2 Notação dos ângulos nos planos representativos

Conforme ressaltamos anteriormente, a escolha dos ângulos do problema é bastante importante. No último capítulo escolhemos  $\sigma_1$  e  $\Delta\varpi$  como ângulos livres do sistema HD60532 b-c, onde  $\sigma_1$  é o ângulo ressonante. Este ângulo tem uma dependência intrínseca com a ordem da ressonância (Equações (3.5) e (3.6)) e reproduzem a topologia  $q$  vezes em um espaço de fase (Lemaitre, 1984), pois nesta forma  $\sigma_i$  módulo  $\frac{2\pi p}{q}$ . Por este motivo, utilizaremos neste e posteriores capítulos a notação  $\theta_i = q\sigma_i$ , onde  $q = 2$  é a ordem da ressonância.

Para representação dos planos, utilizamos  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ . Isso porque como os ângulos  $\theta_i$  correspondem a  $q\sigma_i$ , para cada combinação de  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ , mais de um valor de  $(\sigma_1, \sigma_2)$  é possível. Na Tabela 4.1, mostramos a equivalência dos valores simétricos dos ângulos para três diferentes conjuntos:  $((\theta_1, \Delta\varpi), (\theta_1, \theta_2)$  e  $(\sigma_1, \sigma_2))$ . Nela vemos, por exemplo, que para um par  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, 0)$  são possíveis as combinações  $(\sigma_1, \sigma_2) = (\pi/2, 3\pi/2)$  e  $(3\pi/2, \pi/2)$ .

Já uma representação em função de  $(\theta_1, \theta_2)$  não é adequada porque o uso destes ângulos gera uma sobreposição de diferentes combinações dos ângulos  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ . Na mesma tabela citada podemos ver que quando  $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ ,  $(\theta_1, \Delta\varpi)$  adquirem os valores:  $(0, 0)$  e  $(0, \pi)$ , que correspondem a diferentes configurações das órbitas. O uso de  $(\theta_1, \theta_2)$ , então, sobreporia a topologia de  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, 0)$  e  $(0, \pi)$ .

Além da escolha de  $\theta_1 = q\sigma_1$  e  $\Delta\varpi$ , não impor essa múltipla reprodução do espaço de fase nem a sobreposição de diferentes soluções, faz com que sejam necessários menos planos representativos para observar toda a topologia ao redor das soluções de ACR simétrico<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Estas soluções, como veremos adiante, ocorrem quando há as órbitas dos corpos está alinhada ou antialinhada, e portanto  $\Delta\varpi = 0(\pi)$ .

$\theta_1$	$\Delta\varpi$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\theta_1$	$\theta_2$
0	0	0	0	0	0
		$\pi$	$\pi$	0	0
0	$\pi$	0	$\pi$	0	0
		$\pi$	0	0	0
$\pi$	0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi$	$\pi$
		$3\pi/2$	$3\pi/2$	$\pi$	$\pi$
$\pi$	$\pi$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$\pi$	$\pi$
		$3\pi/2$	$\pi/2$	$\pi$	$\pi$

*Tabela 4.1* - Três conjuntos de ângulos diferentes representando os valores dos ângulos de uma solução de ACR simétrico. Utilizamos ao longo deste trabalho o conjunto  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ . O primeiro conjunto consegue reproduzir as soluções degeneradas do conjunto  $(\sigma_1, \sigma_2)$ . Já o conjunto  $(\theta_1, \theta_2)$  é inadequado para representar os planos por sobrepor diferentes conjuntos.

Ao longo deste trabalho fazemos a representação dos conjuntos de soluções simétricas em um único plano em função da excentricidades. Nele, sempre que  $e_1(e_2) > 0$ ,  $\theta_1(\Delta\varpi) = 0$  e quando  $e_1(e_2) < 0$ ,  $\theta_1(\Delta\varpi) = \pi$ . A utilização do ângulo  $\theta_1$  nestes planos apresenta uma descontinuidade entre o plano em que  $\theta_1 = \pi$  e para o plano em que  $\theta_1 = 0$ , que ocorre devido à diferença dos valores dos níveis de energia entre os dois planos devido às diferentes valores dos ângulos. Este artefato pode ser claramente observado nos espaços de fase plotados nas Figura 4.1 e 4.2 (marcada pela linha negra vertical em  $e_1 = 0$ ). Apesar deste problema, sua topologia não afeta os resultados obtidos de sua análise. Um cuidado maior ao redor da região em que  $e_1 = 0$ , porém, é necessário.

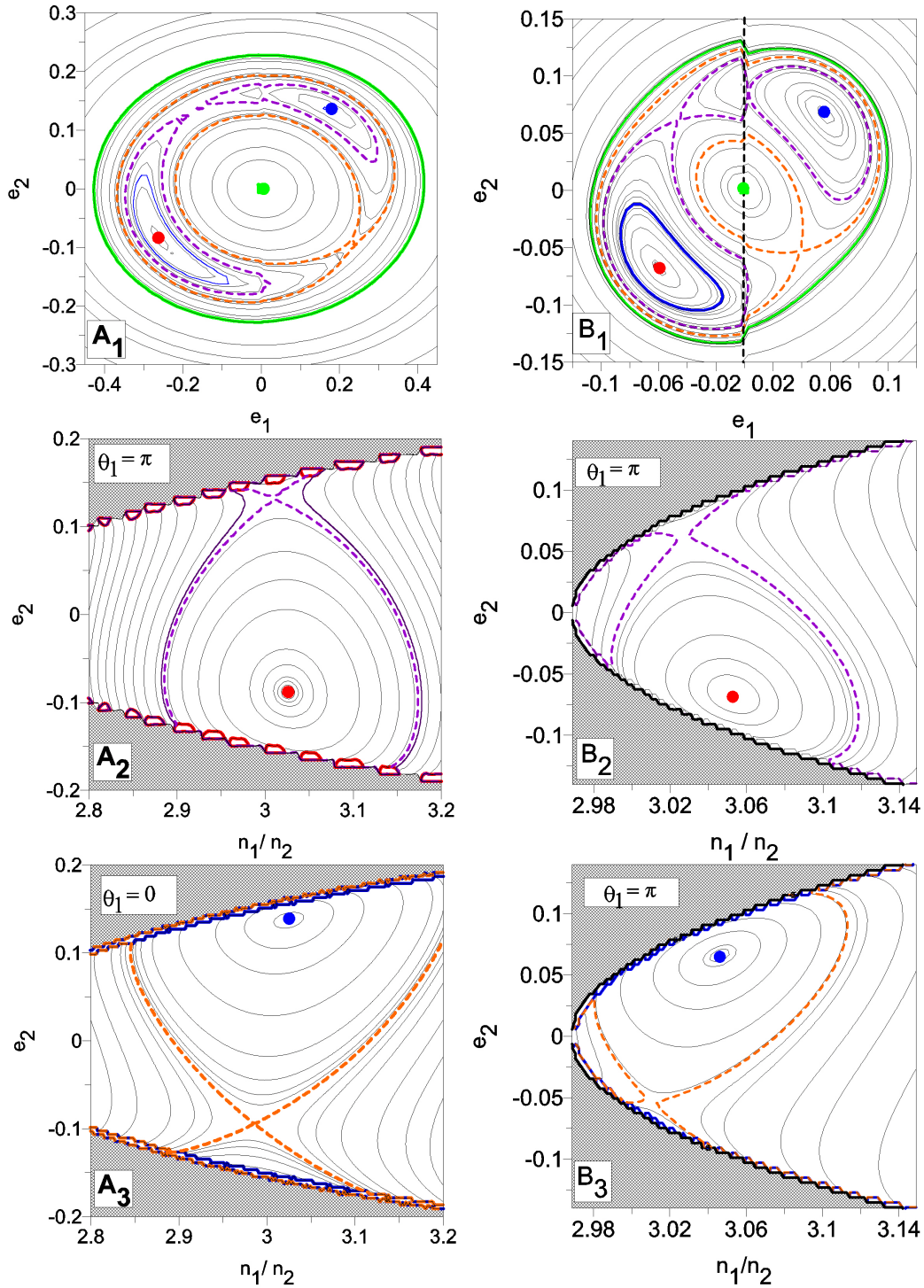


Figura 4.1: A coluna do lado esquerdo (A) apresenta planos representativos para  $m_2/m_1 = 2.36$  e a do lado direito para  $m_2/m_1 = 1/2.36$ . Os gráficos  $A_1$  e  $B_1$  estão em calculados em função de  $(e_1, e_2)$ ,  $A_2$  e  $B_2$  de  $(n_1/n_2, e_2)$  com  $\theta_1 = \pi$  e  $A_3$  e  $B_3$  de  $(n_1/n_2, e_2)$  com  $\theta_1 = 0$ . Em todos os gráficos, o ponto vermelho corresponde ao máximo global de energia, e encontra-se no interior da região ressonante, limitada pela separatriz cujo nível de energia, marcado pela linha pontilhada roxa. A linha pontilhada laranja marca outro nível de energia de ponto-de-sela. O ponto azul corresponde a um valor de máximo local. O ponto e linha contínua verde, correspondem um valor de mínimo local, localizado em  $(e_1, e_2) = (0, 0)$ . Quando  $e_1(e_2) > 0$ ,  $\theta_1(\Delta\varpi) = 0$  e se  $e_1(e_2) < 0$ ,  $\theta_1(\Delta\varpi) = \pi$ . A linha negra pontilhada separa os planos em que  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_1 = \pi$ , em que ocorre uma descontinuidade devido à escolha do ângulo  $\theta_1$ .



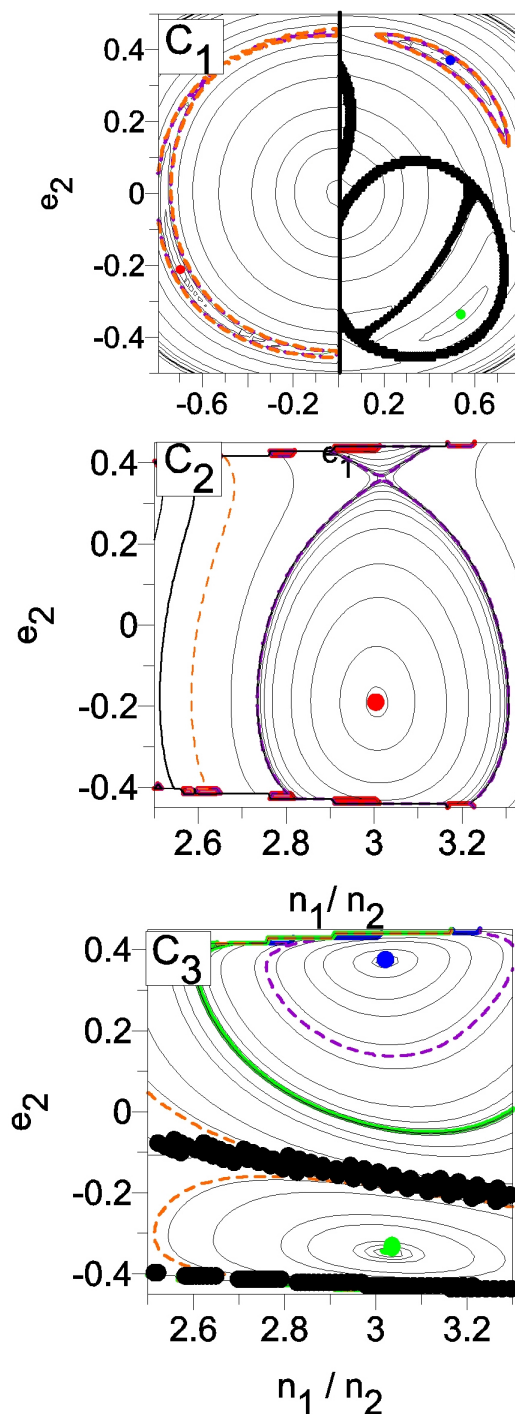


Figura 4.2: Planos representativos para AM do ACR do sistema HD60532 b-c com  $e_1 = 0.459$ . Para todos os gráficos, as regiões em negro identificadas no quadrante em que  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, \pi)$  do gráfico  $C_1$ , correspondem às regiões em que o sistema planetário tem encontros próximos calculados a partir do raio de Hill. O ponto vermelho corresponde ao máximo global do problema. O ponto azul corresponde a um máximo local. O ponto e curva verde correspondem aos valores de energia de um máximo local que aparece dentro da região em que há encontros próximos entre os planetas, este nível de energia não existe nos planos da Figura 4.1. As linhas pontilhadas laranja e roxa correspondem aos valores de energia das separatrizes das regiões de estabilidade, sendo a ressonante uma delas. ( $C_1$ ): Espaço de fase em função de  $e_1$  e  $e_2$ . ( $C_2$ ): Espaço de fase em função de  $n_1/n_2$  e  $e_2$  com  $\theta_1 = \pi$ . ( $C_3$ ): Espaço de fase em função das excentricidades.  $\theta_1 = 0$ .

### 4.1.3 Análise da Topologia dos planos representativos

Na Figura 4.1 plotamos os níveis de energia para duas razões de massa diferentes. Na coluna da esquerda, (A) para as constantes  $K$ ,  $AM$  e  $m_2/m_1 = 2.36$  do sistema HD60532 b-c, e na coluna da direita (B) para  $m_2/m_1 = 1/2.36$ , que corresponde ao sistema HD60532 b-c com massas invertidas e  $K$  e  $AM$  a partir destes dados. Nestes planos, os semieixos dos planetas são recalculados em função das variáveis livres e das constantes  $AM$  e  $K$  (Equações 3.10 e 3.8).

Os gráficos  $A_1$  e  $B_1$  da Figura mostram uma mesma estrutura complexa da 3/1 MMR para ambas razões de massa, com a presença de vários pontos fixos<sup>2</sup>. Cada ponto fixo corresponde a uma solução estacionária do hamiltoniano ressonante médio, também conhecidas como *Apsidal Corotation Resonance* (ACR). Nos planos vemos três pontos estáveis, denotados pelos pontos vermelho, verde e azul. Um deles encontra-se na região em que  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (\pi, \pi)$  (ponto vermelho) que é o máximo global do problema e corresponde a  $(\pi, \pi)$ -ACR, e outro máximo local, da  $(0, 0)$ -ACR em  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, 0)$  (ponto azul). O ponto em que  $(e_1, e_2) = (0, 0)$  (verde) também é um ponto fixo, neste caso, um mínimo local. Os níveis marcados pelas linhas pontilhadas laranja e roxa definem a energia de pontos de equilíbrio instáveis, e portanto, das separatrizes que delimitam os regimes estáveis. A roxa, em particular, é o nível de energia da separatriz da  $(\pi, \pi)$ -ACR, enquanto que o nível em laranja engloba não apenas essa região como também o regime da  $(0, 0)$ -ACR. As regiões em que não há soluções possíveis estão marcadas pelas hachuras em cinza.

Ao redor de cada ACR é esperado um domínio estável de movimento ressonante. Estes regimes podem ser visualizados nos gráficos  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $A_3$  e  $B_3$  da figura. Os gráficos  $A_2$  e  $B_2$  correspondem ao ramo  $e_1 < 0$  dos planos  $A_1$  e  $B_1$  respectivamente e foram construídos ao redor de  $(\pi, \pi)$ -ACR. Já  $A_3$  e  $B_3$  correspondem ao ramo  $e_1 > 0$  dos gráficos  $A_1$  e  $B_1$  respectivamente e construídos ao redor de  $(0, 0)$ -ACR. Estes planos serão bastante utilizados no capítulo seguinte para denotar as principais características da 3/1 MMR. Notamos também que os pontos fixos não se encontram no valor nominal da ressonância, neste caso, 3/1. Este desvio vai ser estudado mais adiante na seção 4.5

Além de identificarmos em função dos elementos orbitais o regime ressonante nos planos representativos, podemos definir a região *near resonance* através destes planos, em que o

<sup>2</sup> Importante frisar que em todos os gráficos da Figura 4.1, os níveis de energia assinalados por uma mesma cor tem mesmos valores.

sistema encontra-se influenciado pela ressonância, mas seus ângulos ao invés de librar, circulam. Em Michtchenko e Ferraz-Mello (2001a); Callegari et al. (2004), por exemplo, estes regimes são definidos para uma  $5/2$  e  $2/1$  MMR. Os autores afirmam que as energias que delimitam esse domínio estão compreendidas entre o valor de energia do mínimo local (semelhante ao que vemos nos planos das Figuras 4.1 e 4.2) e o valor da energia do ponto-de-sela que define a separatriz da ressonância (análogo a curva roxa das mesmas figuras mencionadas).

Para a  $2/1$  MMR, este regime é dividido em dois domínios limitados por níveis de energia de mesmo valor. Um “interno” e outro “externo”. O primeiro é caracterizado por uma circulação prógrada dos ângulos críticos, enquanto que o segundo por uma circulação retrógrada. No caso da  $3/1$  MMR, os mesmos domínios se apresentam. Nos planos das Figuras 4.1 e 4.2, o domínio interno está compreendido entre o centro  $(e_1, e_2) = (0, 0)$  (marcado pelo ponto verde) e o nível de energia da separatriz, marcado pela linha pontilhada roxa. O domínio externo, por sua vez, está delimitado pelo nível de energia marcado pela linha contínua verde e a linha pontilhada roxa.

Já na Figura 4.2 plotamos os planos representativos calculados para  $K = 0.6345$ ,  $m_2/m_1 = 2.36$  e  $AM(e_1 = 0.459)$ . Em geral, as mesmas estruturas são observadas. A diferença correspondendo a região de *close encounter* marcada pelas curvas em negro nos gráficos  $C_1$  e  $C_3$ , que é responsável pelo aparecimento de um novo regime de movimento em seu interior<sup>3</sup>. Apesar da estrutura incluir um ponto fixo possivelmente estável, a possibilidade de um sistema de planetas existir neste regime é muito pequena, devido ao fato de encontrar-se depois da curva de colisão. Um sistema que existisse nestas condições teria que ter evoluído dentro deste regime e as curvas de colisão, neste caso, impediriam a formação de um sistema que evoluísse desde o exterior do regime. O cálculo desta curva de colisão encontra-se na subseção seguinte.

#### 4.1.4 Encontros próximos - curvas de colisão

A curva de colisão marcada pelas áreas em negro na Figura 4.2, corresponde às condições iniciais em que a evolução da órbita dos planetas leva a uma aproximação suficiente para que as órbitas tornem-se instáveis. Ela é calculada aplicando o critério de Hill-Lyapunov

<sup>3</sup> O nível de energia destacado pela cor verde, nestes planos, é o único que não corresponde à energia do mínimo local dos planos da Figura 4.1. Nestes planos não ressaltamos o nível de energia do mínimo.

de Marchal e Bozis (1982) que baseia-se nos pontos Lagrangeanos  $L_1$  e  $L_2$  para o problema de três corpos restrito. O critério determina que se a distância instantânea entre os corpos for menor que o valor do raio de Hill ( $\Delta_{Hill}$ ) o sistema pode aproximar-se o suficiente para que haja uma colisão. Sua expressão pode ser calculada na forma:

$$\Delta_{Hill} = 2.4(m_1/M_0 + m_2/M_0)^{1/3}, \quad (4.1)$$

que foi estendida por Gladman (1993) para o problema de três corpos não-restrito com órbitas circulares e que também mostrou que este critério de estabilidade garante que o sistema é Hill-estável se são satisfeitas as suas condições. Porém, se não satisfeitas, o teste mostra-se inconclusivo, podendo haver órbitas estáveis que não satisfaçam o critério.

Outros critérios de estabilidade também merecem ser citados. O *overlap* de ressonâncias desenvolvido por Wisdom (1980), a análise numérica para sistemas com mais de três corpos e baixas excentricidades realizado por Chambers et al. (1996), e mais recentemente, um estudo analisando vários desses critérios, realizado por Giuppone et al. (2013). Nosso interesse não é determinar um critério de estabilidade, mas identificar quais condições iniciais sobre o espaço de fase permitem que os planetas aproximem-se o suficiente para que ocorra uma colisão.

Fazemos esta determinação a partir da observação dos níveis de energia sobre o plano representativo. Quando os planetas aproximam-se o suficiente para que haja uma colisão, a interação gravitacional entre os mesmos é muito forte, e o sistema possui alta energia devido ao potencial gravitacional. Os níveis de energia nestas condições são facilmente detectados no plano. Calculamos então, qual deve ser o valor do raio de Hill, trocando 2.4 por uma variável  $\alpha$  na Equação 4.1, de forma a ajustar as curvas de colisão aos níveis de alta energia. Assim, calculamos qual deve ser a distância mínima que um sistema próximo a uma 3/1 MMR pode se aproximar para que permaneça Hill-estável. Para a Figura 4.1, obtivemos  $\alpha = 0.5$ .

## 4.2 Soluções estacionárias do Hamiltoniano médio

Como visto na seção anterior, a topologia de uma 3/1 MMR apresenta vários pontos de equilíbrio. Nesta seção obtemos as soluções estacionárias do Hamiltoniano médio da 3/1 MMR, também conhecida como corrotação apsidal ressonante (ACR). Estas soluções são estacionárias no modelo médio, e usualmente quase-periódicas no sistema não-médio,

realizando oscilações em torno do ponto fixo do sistema médio (Nos planos representativos da seção anterior, citamos algumas das mesmas que aparecem como centros estáveis sobre o plano  $e_1, e_2$ ).

As ACR não dependem dos semieixos maiores dos planetas individualmente, mas da razão entre eles e de  $m_2/m_1$  (Beaugé et al., 2003). Antoniadou e Voyatzis (2014) confirmaram este resultado, ao verificar que para uma mesma razão de massas, valores individuais diferentes levam a um desvio insignificante dos valores efetivos das soluções de ACR, podendo-se considerar, portanto, que essas soluções de fato não dependem das massas individuais dos planetas. Além disso, estas soluções dependem pouco significativamente do parâmetro de escala  $K$ , e portanto, nesta seção fixamos seu valor enquanto variamos  $m_2/m_1$  e AM. Analiticamente, as soluções de corrotação apsidal com amplitude zero, obedecem as seguintes condições de equilíbrio:

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = \frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{d\sigma_2}{dt} = 0, \quad (4.2)$$

que são equivalentes a:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \sigma_1} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \sigma_2} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial I_1} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial I_2} = 0, \quad (4.3)$$

e podem ser classificadas em dois tipos: simétricas e assimétricas.

As ACRs simétricas ocorrem quando o ângulo  $\Delta\varpi$  evolui de modo que o formato das órbitas é estacionário e isto acontece quando o ângulo  $\Delta\varpi$  libra em torno de 0 ou 180°. No primeiro caso, dizemos que as órbitas estão alinhadas, enquanto no segundo, antialinhadas. A combinação dos ângulos  $(\theta_1, \Delta\varpi)$  destas soluções pode ser vista na Tabela 4.1, e são:  $(0, 0)$ ,  $(0, \pi)$ ,  $(\pi, 0)$  e  $(\pi, \pi)$ .

Na dinâmica secular, as soluções estacionárias em que o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de zero ou  $\pi$  são chamadas de Modo I e Modo II respectivamente, e são conhecidas das teorias seculares lineares (Pauwels, 1983; Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001a; Michtchenko e Malhotra, 2004). Elas são comumente rotas através das quais sistemas de exoplanetas que encontram-se próximos o suficiente podem migrar até serem capturados no interior do regime ressonante (Michtchenko e Rodríguez, 2011).

As soluções assimétricas ocorrem quando o ângulo  $\Delta\varpi$  libra em torno de outros valores diferentes de 0 ou  $\pi$ . Encontrar estas soluções não é um trabalho trivial. Utilizamos algumas considerações topológicas para inferir sua existência, assim como métodos numéricos de minimizadores de funções n-dimensionais para encontrá-las.

Para uma primeira análise tomamos o Hamiltoniano semi-analítico que desenvolvemos anteriormente e consideramos o sistema com uma razão dos semieixos fixa, tal que o mesmo encontra-se sobre o valor nominal de uma ressonância 3/1 de movimentos médios. Esta condição é obtida diretamente da 3ª Lei de Kepler:

$$\alpha = \left( \frac{p}{p+q} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{M_0 + m_1}{M_0 + m_2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

A partir desta aproximação, a parte Kepleriana passa a ser constante, e descartamos seu valor durante o cálculo do Hamiltoniano, ficando apenas com a parte perturbadora da função. Na Figura 4.3 plotamos os níveis de energia (representados pelas linhas sólidas finas) e de momento angular total do sistema em função da excentricidades, utilizando os parâmetros físicos do par HD60532 b-c determinados em Laskar e Correia (2009) que constam na Tabela 2.3. Os valores dos semieixos fixados são:  $a_1 = 0.7606$  e  $a_2 = 1.5854$ , para  $n_1/n_2 = 3$ .

As linhas pontilhadas são os níveis de momento angular total calculado a partir da equação 3.8. Sabemos que o momento angular em função das excentricidades, para um valor de razão semieixos fixo, tem a forma de uma elipse. O achatamento da elipse estende-se na direção do eixo de excentricidade associado ao planeta de menor massa, o que pode ser verificado no gráfico.

O método geométrico, introduzido por Michtchenko et al. (2006) consiste em, a partir dos níveis de energia do Hamiltoniano aproximado, encontrar para cada nível de momento angular constante, seu valor máximo. Estes pontos extremos podem ser obtidos numericamente e correspondem às intersecções tangentes entre as curvas de AM e energia, vistos no gráfico 4.3 marcadas pelas linhas grossas negras. Assim, encontramos para cada nível de momento angular os valores de excentricidade que determinam a solução de todas as combinações simétricas de  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ -ACR.

As linhas verdes diagonais observadas no quadrante  $e_1(e_2 > 0)$  e  $e_1 > 0, e_2 < 0$  são as regiões cujas condições iniciais levam a uma aproximação dos planetas suficiente para que haja colisão entre eles. Elas são calculadas a partir das soluções alinhadas e antialinhadas das órbitas em que ocorre o cruzamento das órbitas dos planetas. Nestas condições o valor da função perturbadora tende a infinito. Esta condição pode ser calculada a partir da seguinte equação:

$$a_1(1 + e_1 \cos \theta_1) = a_2(1 + e_2 \cos \Delta\varpi), \quad (4.5)$$

onde consideramos os ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  tal que as órbitas estejam alinhadas ou antialinhadas. Ou seja,  $\Delta\varpi$  e  $\theta_1$  iguais a 0 ou  $\pi$ .

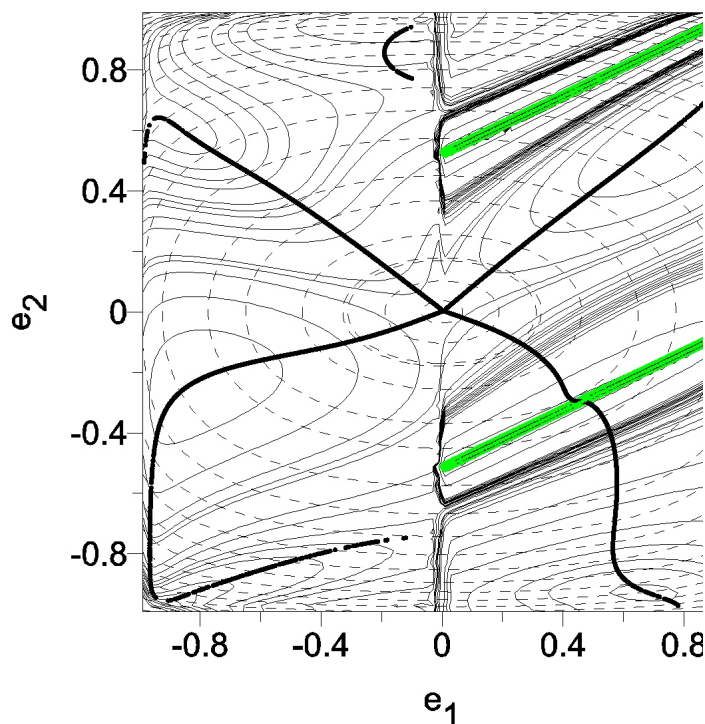


Figura 4.3: *curvas contínuas*: Níveis de energia do Hamiltoniano em função da excentricidades, considerando o sistema com razão de movimentos médios tais que o sistema encontre-se no valor nominal da ressonância 3/1 de movimentos médios. Valores negativos(positivos) de  $e_1(e_2)$  correspondem a  $\theta_1(\Delta\varpi) = \pi(0)$ . *Em linhas pontilhadas*: Níveis de momento angular total do sistema HD60532 b-c. As curvas verdes são as curvas de colisão. As curvas espessas negras denotam os pontos onde ocorrem as tangências entre os níveis de momento angular e energia.

### 4.3 Soluções estacionárias simétricas

Na seção anterior, obtivemos o ACR para  $m_2/m_1 = 2.36$ , usando como aproximação os semieixos dos planetas fixos tal que o sistema se encontre no valor nominal da 3/1 MMR. Para a obtenção dos valores dos semieixos da ACR efetiva, introduzimos um grau de liberdade adicional ao deixar livre os semieixos dos planetas. Os valores destas variáveis neste caso, devem ser próximos dos fixados na ressonância, uma vez que estes pontos fixos tem pouca dependência de  $K$  e dependem apenas da razão de massas e semieixos. Os

ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  são fixos em 0 ou  $\pi$ , de modo que o problema possui dois graus de liberdade.

Uma vez que os máximos de energia neste caso se encontram em um plano, fazemos uso de um algoritmo para encontrar mínimos de funções. Utilizamos o método *Simplex*, retirado de Press et al. (1992). O método necessita como entrada, de  $n + 1$  condições iniciais próximas ao mínimo da função a qual se quer encontrar. Como condição inicial usamos as coordenadas da ACR calculada para a razão de movimentos médios fixa em 3 e dois pontos próximos a ela com  $n_1/n_2 > 3$  e  $n_1/n_2 < 3$  e como função o Hamiltoniano médio desenvolvido.

O algoritmo gera poliedros  $(n - 1)$ -dimensionais e através de  $i$ -operações de reflexão, expansão e contração, aproxima-se do ponto extremo. O truncamento ocorre quando o valor da função em duas iterações consecutivas é menor que um valor de corte determinado previamente. Desta forma, determinamos o valor dos semieixos efetivos da ACR. É necessário deixar claro que este método é aplicável para encontrar os pontos fixos que correspondem a mínimos ou máximos locais.

Isto é, pontos-de-sela não podem ser encontrados facilmente através deste método, sendo a melhor opção, neste caso, calcular a Hessiana da função Hamiltoniana. Estes pontos de equilíbrio instável serão importantes na hora determinar as soluções de ACR assimétricas. Na Figura 4.4 plotamos as ACR simétricas, determinadas pelos métodos citados para várias razões de massa. No gráfico, as soluções em preto correspondem às soluções estáveis, enquanto as vermelhas às instáveis, e as curvas negras espessas são as curvas de colisão calculadas a partir da Equação 4.5. Na próxima seção detalhamos como classificamos as estabilidades destes pontos de equilíbrio e em seguida, faremos uma análise sobre as mesmas.



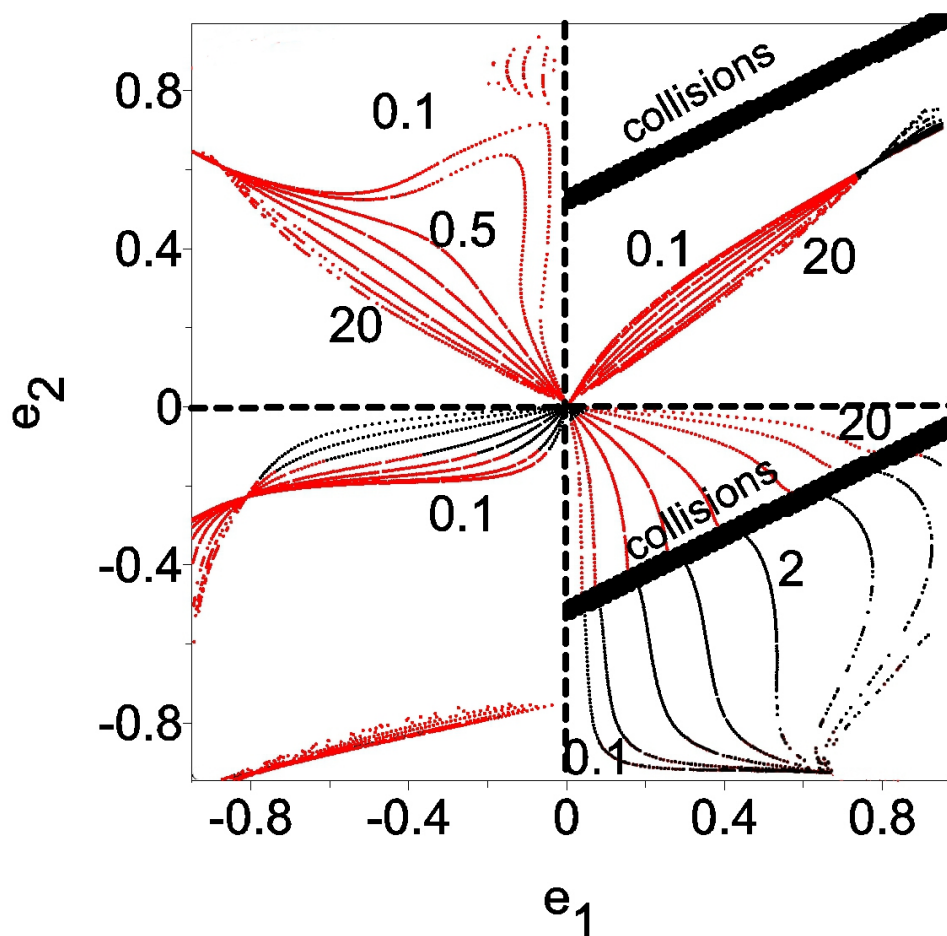


Figura 4.4: Famílias de soluções de ACR simétricas para uma ressonância 3/1 de movimentos médios. Quando  $e_1(e_2) < 0$ ,  $\theta_1(\Delta\varpi) = \pi$  e quando  $e_1(e_2) > 0$ ,  $\theta_1(\Delta\varpi) = 0$ . As curvas pretas correspondem as soluções estáveis, enquanto as vermelhas às instáveis. As curvas espessas pretas são as curvas de colisão, calculadas para o valor nominal da ressonância de movimentos médios através da equação 4.5. As curvas pontilhadas delimitam os planos para cada par de ângulos do ACR simétrico. A razão de massas para cada família está indicada junto à curva a qual corresponde.

#### 4.3.1 Determinação de estabilidade

Para determinar as estabilidades das soluções de ACR, plotamos os planos representativos das excentricidades e ângulos para cada valor momento angular possível e observamos sua estrutura e topologia em torno dos pontos fixos. Lembrando que o espaço de fase de um sistema com dois graus de liberdade é quadridimensional, a análise desta topologia deve ser feita, portanto, no plano da excentricidades e dos ângulos  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ . Analisamos, então, se a solução de ACR encontrada no plano  $(e_1, e_2)$  corresponde a um ponto de máximo, mínimo ou ponto-de-sela, determinando também se são extremos globais ou locais.

Quando o ACR no planos das excentricidades não é um ponto fixo hiperbólico, é

necessário verificar a topologia em torno do plano representativo em função de  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ , uma vez que um ponto fixo numa estrutura de centro no plano das excentricidades não garante a mesma estrutura no plano dos ângulos do problema. Plotamos então, os níveis de energia em função de  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ , com o momento angular e constante de escalas fixos calculados a partir dos elementos da solução de ACR em questão. Dessa forma, se uma solução de ACR corresponde a um centro no espaço de fase das excentricidades mas a um ponto-de-sela no dos ângulos, teremos um ponto de equilíbrio instável. Do mesmo modo, um ponto de equilíbrio que seja máximo ou mínimo nos dois planos, será estável. Os pontos-de-sela detectados no plano das excentricidades não precisam desta análise, pois já garantem a instabilidade da solução.

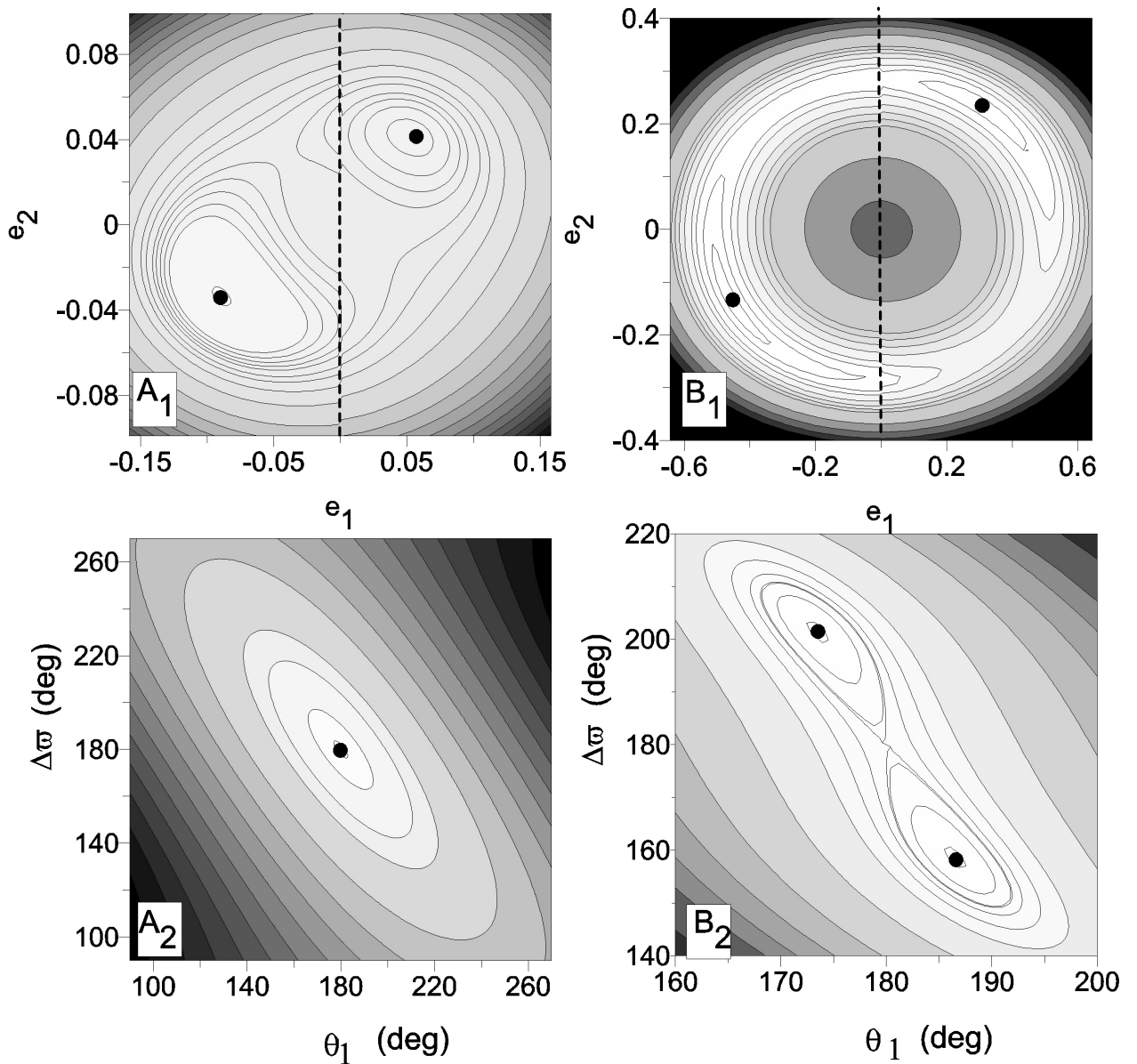


Figura 4.5: Níveis de energia no plano de condições iniciais para dois ACRs. (Coluna A):  $(\pi, \pi)$ -ACR estável com coordenadas  $(e_1, e_2) = (0.093, 0.035)$ . Em  $(A_1)$  mostramos o plano em função da excentricidades. Os pontos fixos tem estrutura de centro estável. A linha pontilhada separa o plano em que  $e_1 > (< 0)$  que corresponde a  $(\theta_1 = 0(\pi))$ . Em  $A_2$  tem-se o plano em função de  $(\theta_1, \Delta\varpi)$  para  $(e_1, e_2)$  fixos no valor do ACR. (Coluna B): Níveis de energia para solução de  $(\pi, \pi)$ -ACR instável com  $(e_1, e_2) = (0.45, 0.13)$ . Em  $B_1$  temos o plano em função da excentricidades. O  $(\pi, \pi)$ -ACR tem estrutura de ponto estável. Em  $B_2$  plotamos os níveis de energia em função de  $(\theta_1, \Delta\varpi)$ , com  $(e_1, e_2)$  fixos nos valores do ACR. Vemos que  $(\pi, \pi)$  apresenta uma estrutura de ponto-de-sela.

Na Figura 4.5 plotamos dois exemplos da determinação da estabilidade, onde as curvas sólidas são os níveis de energia, e a escala de cor do escuro para o claro segue os valores crescentes do Hamiltoniano. Nos gráficos  $A_{1,2}$  o ponto no plano  $(\pi, \pi)$  tem ACR em torno de  $(e_1, e_2) = (-0.093, -0.035)$ . Quando fixamos este ponto e observamos o plano em função

dos ângulos  $(\theta_1, \Delta\varpi)$  ( $A_2$ ), vemos que a topologia é de soluções quase-periódicas e o ponto em  $(\pi, \pi)$  corresponde a um centro estável. Portanto, a solução  $(e_1, e_2) = (-0.093, -0.035)$  é um ponto fixo estável.

Já nos gráficos da coluna  $B$ , para outro valor de momento angular, temos uma solução de  $(\pi, \pi)$ -ACR com  $(e_1, e_2) = (-0.45, -0.13)$ . Percebemos que no plano da excentricidades o mesmo corresponde a um centro estável. Ao analisar o plano dos ângulos ( $B_2$ ), porém, vemos que o ponto  $(\pi, \pi)$  corresponde a um ponto-de-sela. Portanto, esta solução é instável. Neste mesmo plano ( $B_2$ ), observamos também duas soluções estáveis a qual o ponto-de-sela delimita através das separatrizes. As mesmas possuem valores de  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  diferentes de 0 e  $\pi$ , sendo, conseqüentemente, soluções de ACR assimétricas. A determinação destas soluções partirá, portanto, dos pontos de equilíbrio instável.

#### 4.3.2 Análise das famílias de soluções de ACR simétricas

Na Figura 4.4 plotamos as famílias de ACR para  $m_2/m_1 = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.36, 5.0, 10$  e  $20$ . As curvas negras correspondem aos pontos fixos estáveis, e as vermelhas às instáveis. As curvas de colisão graficadas foram calculadas pela Equação 4.5.

Estas famílias de soluções dão-nos a indicação em torno de quais soluções estacionárias da ressonância 3/1 podem ocorrer sistemas de exoplanetas reais estáveis. Como sabemos que o ponto máximo global de energia localiza-se no plano em que  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (\pi, \pi)$ , e que para baixas excentricidades as soluções são estáveis, há uma grande possibilidade de os sistemas de exoplanetas que encontram-se próximos a uma 3/1 MMR estejam em torno destas soluções.

Por sua vez, as famílias de soluções estáveis observadas para  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, \pi)$  possuem valores de excentricidade bastante altos e estão localizadas além da curva de colisão. Neste caso, a formação de sistemas estáveis para estas soluções é bastante difícil através da migração planetária, pois este processo ocorre a partir de órbitas circulares ou quase-circulares, restando a possibilidade do sistema poder formar-se *in situ* (O que é igualmente difícil dado o alto valor de excentricidade necessário e a instabilidade da proximidade com as curvas de colisão).

As outras famílias de pontos fixos estáveis encontram-se no plano em que  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, 0)$ . As mesmas parecem originar-se da bifurcação de um ponto-de-sela em comum torno de  $(e_1, e_2) = (0.76, 0.60)$ . Para este plano, soluções com excentricidades abaixo

deste valor são todas instáveis. A probabilidade de que um sistema possa formar-se com tão alta excentricidade é pequena. Portanto, como a maior probabilidade de sistemas reais encontra-se em torno das soluções de  $(\pi, \pi)$ -ACR, no capítulo seguinte, quando explorarmos a dinâmica em torno do ACR, focaremos nesta região. As outras ACR, que possuem menor probabilidade de abrigarem sistemas reais de exoplanetas devem ser estudadas em um trabalho futuro.

Outra característica observada na Figura 4.4, é que, nos quatro planos de combinações dos ângulos, estas famílias convergem para um ponto onde todas se cruzam. Em especial para a região de  $(0, 0)$ -ACR, ocorre uma bifurcação dos pontos de equilíbrio responsável por uma mudança na estabilidade.

No plano em que  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, 0)$ , este ponto está localizado em  $(e_1, e_2) = (0.766, 0.606)$ . Para  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (\pi, 0)$  tem excentricidades  $(e_1, e_2) = (0.877, 0.606)$  e para  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, \pi)$  localiza-se em  $(e_1, e_2) = (0.814, 0.231)$ . Estes pontos coincidem com os centros observados nos planos de energia que construímos e observamos na Figura 4.3 e também podem ser vistos na Figura 4.4.

Como descrito por Lee (2004), estes centros correspondem aos valores de excentricidade em que  $\frac{d\varpi_1}{dt}$  e  $\frac{d\varpi_2}{dt}$  são ambos iguais a zero. É o ponto onde a direção de rotação dos ângulos  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  mudam de direção de prógrado para retrógrado, ou vice-versa.

#### 4.4 Soluções estacionárias assimétricas

As soluções estacionárias assimétricas diferem das simétricas pelo fato de suas órbitas não serem alinhadas ou antialinhadas, pois o ângulo secular  $\Delta\varpi$  libra agora em torno de ângulos diferentes de 0 ou 180°. Estas soluções são mais difíceis de serem encontradas em relação às simétricas, uma vez que não sabemos os valores de equilíbrio que os ângulos possuem, de forma que os consideramos como variáveis livres, aumentando o número de graus de liberdade do problema.

Devido ao Teorema de Poincaré-Birkhoff, existem, para sistemas conservativos, soluções estáveis associadas a pontos fixos hiperbólicos, determinadas pelos números de dimensões do espaço de fase. As ACR assimétricas aparecem associadas a pontos-de-sela das ACR simétricas que não possuem centros estáveis nos planos dos ângulos simétricos. Voyatzis (2008) fez uma análise de várias famílias de soluções assimétricas da 3/1 MMR, assim

como da estabilidade dessas soluções assimétricas. Em nosso caso investigamos apenas as soluções estacionárias assimétricas que estão associadas às  $(\pi, \pi)$ -ACR, uma vez que ao redor destas soluções é mais provável que haja exoplanetas em órbitas estáveis.

Na Figura 4.5  $B_2$  ilustramos um exemplo de ACR assimétrica delimitada pelo nível de energia de um ponto-de-sela da  $(\pi, \pi)$ -ACR. Os valores dos ângulos para esta solução, são:  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (173^\circ, 201^\circ)$ .

Um dos métodos utilizados para obter estas soluções é o de fazer uma simulação de migração de um par de planetas com alto momento angular, e conseqüentemente, excentricidades bastante próximas a zero. A evolução dos elementos orbitais dos planetas neste caso, ocorre ao longo das soluções de ACR para sua correspondente razão de massas. Em Beaugé et al. (2003) esta técnica é utilizada para encontrar as soluções de ACR simétricas para uma ressonância 2/1 de movimentos médios.

Nesta tese estamos utilizando o mesmo método empregado em trabalhos como Michtchenko et al. (2006) e Voyatzis e Hadjidemetriou (2006). Implementamos o mesmo algoritmo minimizador de funções Simplex descrito anteriormente (Press et al., 1992), tomando como condições iniciais os pontos instáveis obtidos das soluções simétricas de ACR. Apresentamos o resultado nas Figuras 4.6 e 4.7: os pontos vermelhos na Figura 4.6 correspondem a valores de momento angular que no capítulo seguinte servirão como parâmetro para caracterizar os regimes dinâmicos presentes em função do momento angular.

Focamos nas soluções que possuem domínios quase-periódicos que permitam que um sistema planetário possa ser formado e evolua de maneira estável por milhões de anos. Em ambos os gráficos observamos como as soluções estacionárias assimétricas bifurcam a partir das soluções simétricas e como os ângulos evoluem através das soluções assimétricas.

Na Figura 4.6 as soluções em cinza correspondem às  $(\pi, \pi)$ -ACR simétricas. As curvas em negro às soluções assimétricas estacionárias que bifurcam das primeiras. As marcadas por cruces às soluções estáveis observadas no plano  $(0, \pi)$  e a reta diagonal pontilhada é curva de colisão calculada no início deste capítulo. As legendas que acompanham as curvas correspondem às razões de massa dos planetas.

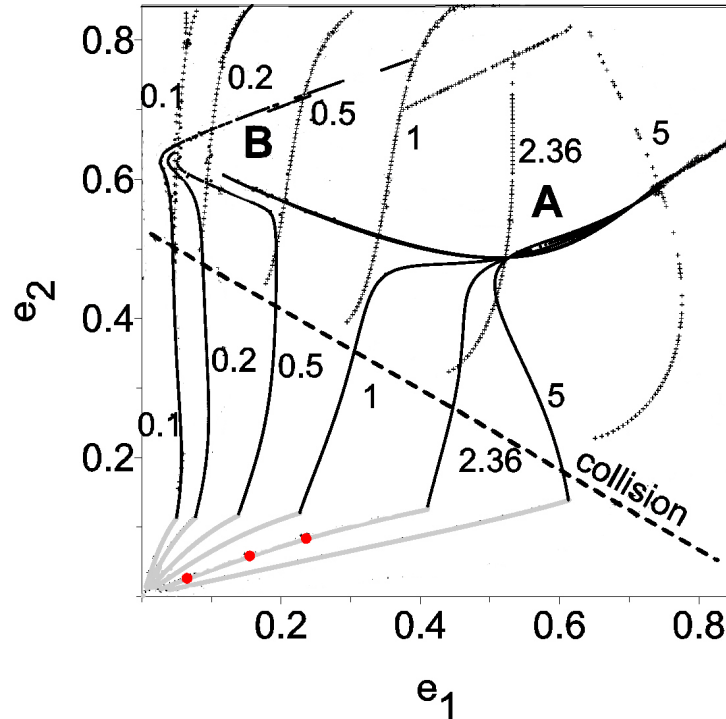


Figura 4.6: Família de soluções assimétricas para a 3/1 MMR. Cada curva corresponde a uma razão de massas diferente. Dois ramos principais de soluções são visíveis (A) e (B). Ambas bifurcam da solução  $(\pi, \pi)$ -ACR. As curvas em cinza correspondem às famílias de soluções simétricas para  $(\pi, \pi)$ -ACR. As curvas em negro correspondem às famílias de soluções assimétricas que bifurcam da  $(\pi, \pi)$ -ACR. As curvas formadas por cruzes correspondem às soluções estáveis da  $(\pi, 0)$ -ACR. Os pontos em vermelho correspondem a valores da solução de ACR para um sistema com razão de massas do sistema HD60532 b-c que serão estudados no capítulo seguinte. O ramo (A) bifurca da  $(\pi, \pi)$ -ACR, enquanto o ramo (B) da  $(0, 0)$ -ACR. Sistemas com  $m_2/m_1 < 1$  bifurcam diretamente para o ramo (B), enquanto sistemas com  $m_2/m_1 > 1$  para o ramo (A).

Próximo à origem, em baixas excentricidades, as soluções são estáveis e evoluem para valores crescentes de excentricidade (curvas cinzas). Esta evolução é interrompida abruptamente com o rápido aumento da excentricidade do planeta externo, quando ocorre a bifurcação desta solução em um ponto-de-sela e dois centros estáveis assimétricos (curvas negras).

Observamos dois ramos principais das soluções assimétricas: o ramo para altas excentricidades do planeta interno marcado pela letra A na figura e um segundo ramo com um rápido aumento da excentricidade do planeta externo, que corresponde ao B marcado. Quando  $m_2/m_1 < 1$ , o sistema bifurca diretamente para o ramo superior observado na figura. No ramo A, as soluções cruzam-se em um ponto em comum em torno de  $(e_1, e_2) = (0.5, 0.5)$ . Logo após esse ponto, as ACR para todas as razões de massa praticamente coincidem e retornam para a  $(0, 0)$ -ACR. Em relação ao ramo B,

o que notamos é um "estrangulamento" da evolução rápida ao longo de  $e_2$  em torno  $(e_1, e_2) = (0.05, 0.62)$ . Uma estrutura de bifurcação semelhante foi observada para uma 2/1 MMR por Michtchenko et al. (2008a) e explicada como efeitos de uma ressonância secular dentro da região de MMR. Diferentemente das 2/1 MMR, cujas ACR assimétricas apenas ocorrem para  $m_2/m_1 < 1.015$  Ferraz-Mello et al. (2003), para a 3/1, notamos as ACR assimétricas para todo o espectro de razão de massas.

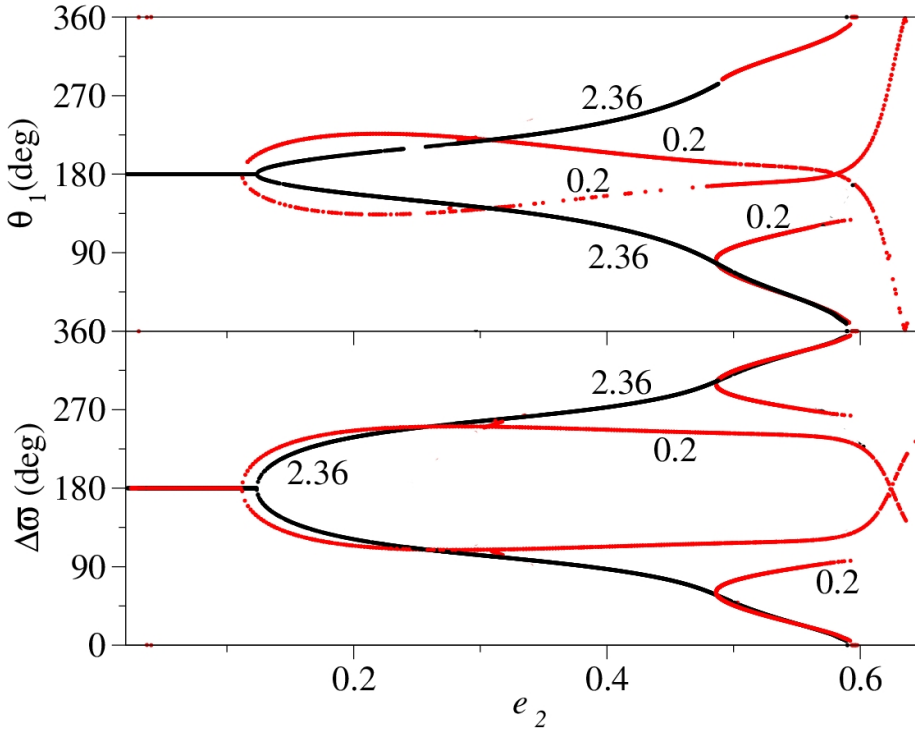


Figura 4.7: Família de soluções de ACR assimétricas para a 3/1 MMR em função dos ângulos ressonante e secular e excentricidade do planeta externo. Superior: Evolução dos ângulo  $\theta_1$  a partir da bifurcação do  $(\pi, \pi)$ -ACR para a solução assimétrica. Inferior: Evolução do ângulo  $\Delta\varpi$  ao longo da solução assimétrica que bifurca a partir da  $(\pi, \pi)$ -ACR. Ambos os gráficos calculados para razões de massa 2.36 e 0.2 correspondentes aos sistemas HD60532 b-c e 55 Cnc b-c respectivamente. Observamos que os ângulos passam por uma bifurcação tipo forquilha e à medida que evoluem, voltam a uma ACR simétrica em torno de  $e_2 = 0.6$ .

A evolução dos ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  ao longo das duas famílias de ACR assimétricas em relação a  $e_2$  pode ser observada na parte superior e inferior da Figura 4.7, respectivamente. Mostramos na figura as famílias para duas razões de massa: 2.36 (curvas negras) e 0.2 (curvas vermelhas). O primeiro valor corresponde ao sistema HD60532 b-c, enquanto que o segundo ao sistema 55 Cnc b-c. Os ramos de evolução dos ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  são simétricos em relação a reta com  $\theta_1(\Delta\varpi) = 180^\circ$ . As bifurcações para as duas razões de massa ocorrem a partir de  $e_2 \approx 0.1$ , evoluindo de maneira assimétrica até retornarem



a  $(0, 0)$ -ACR em  $e_2 \approx 0.6$ . A partir de  $e_2 = 0.06$ , notamos também uma bifurcação da  $(0, 0)$ -ACR para 55Cnc b-c que evolui em direção  $(\Delta\varpi) \rightarrow 95^\circ$  e para  $\theta_1 \rightarrow 126^\circ$ . Estas soluções correspondem ao ramo  $A$  dos pontos de ACR assimétricos para  $m_2/m_1 = 0.2$  que pode ser visto na Figura 4.6.

Uma vez que já possuímos as soluções de ACR assimétrico, temos o interesse agora de investigar os regimes em torno das soluções simétricas de ACR, para identificar como os sistemas planetários podem acessar a ressonância e estudar os diferentes regimes de movimento que podem existir em torno dessas ressonâncias e sua robustez e regularidade.

#### 4.5 Lei das Estruturas

Conforme vimos nos espaços de fase nas Figuras 4.1 e 4.2, os pontos fixos no interior da região ressonante não se encontram exatamente sobre o valor nominal  $3/1$ . O desvio do valor nominal da ressonância é também observado para MMR no problema restrito de três corpos e é conhecida como lei das estruturas (Ferraz-Mello, 1988). Sendo observada inicialmente em dinâmica ressonante asteroidal. Esta lei mostra que o desvio depende do momento angular e constante de escala  $K$ , ou seja, das excentricidades dos ACRs e das massas individuais dos corpos.

Podemos verificá-la calculando os planos representativos do problema, desta vez, em função da razão de movimentos médios e da excentricidade de um dos planetas. Este desvio sempre ocorre para valores maiores que o nominal das MMRs.

Este fenômeno pode ser um dos fatores que explicam porque existe um excesso de exoplanetas detectados com  $T_1/T_2$  maior que o valor nominal das ressonâncias (Lissauer et al., 2011), que seria associado, portanto, a uma maior estabilidade no interior de uma ressonância de movimentos médios, ou na proximidade exterior a uma.

O cálculo da lei das estruturas pode ser feito através dos períodos próprios de cada solução de equilíbrio. Na Figura 4.8 exibimos a razão de períodos de uma família da  $(\pi, \pi)$ -ACR em função da excentricidade do planeta externo, calculadas para razão de massas do sistema HD60532 b-c multiplicadas pelos fatores 0.01, 0.1, 1 e 10 e indicadas no gráfico. Vemos que o desvio é maior quanto menor a excentricidade e não depende da razão das massas dos planetas, e sim das massas individuais. Quanto mais massudos os planetas, maior será o desvio do valor nominal da ressonância. Deste modo, podemos

intuir que planetas do tipo Júpiter quente apresentarão um desvio da razão de movimentos médios nominal maior que o apresentado por um sistema com massas de Netuno. A curva cujas massas são multiplicadas pelo fator 1 corresponde às massas reais de HD60532 b-c.

A curva vermelha corresponde a integração numérica das equações exatas de movimento, utilizando como condições iniciais os elementos osculadores do sistema HD60532 b-c, com uma filtragem sobre as frequências ressonantes do problema. Vemos que o sistema oscila em torno da solução estacionária da  $(\pi, \pi)$ -ACR em  $n_1/n_2 \approx 3.03$ , enquanto a excentricidade do planeta externo oscila entre 0.05 – 0.15.

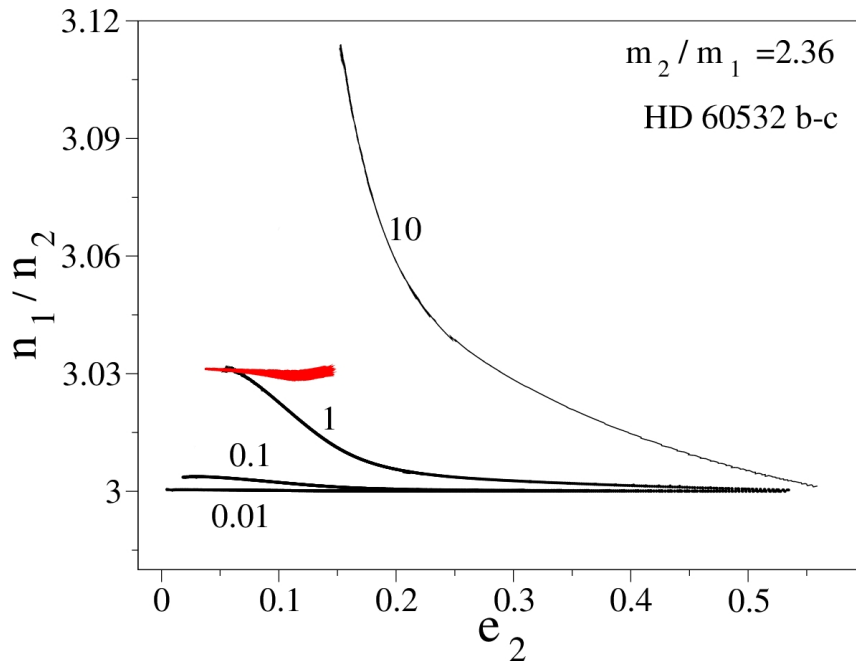


Figura 4.8: Representação da lei das estruturas para o sistema planetário HD60532 b-c em uma 3/1 MMR. As curvas foram calculadas utilizando a rotina de Powell (Press et al., 1992), tendo como condições iniciais os pontos estáveis da solução  $(\pi, \pi)$  de ACR simétrico para um sistema planetário com razão de massas  $m_2/m_1 = 2.36$ , a mesma do sistema HD60532 b-c multiplicadas pelos fatores 0.01, 0.1, 1 e 10 indicadas na figura. A curva vermelha corresponde à integração numérica usando os elementos orbitais do sistema HD60532 b-c. Observamos que o sistema oscila em torno da curva da lei das estruturas calculado para seu valor de massas reais.

## Dinâmica na vizinhança dos ACRs

No capítulo anterior estudamos a topologia da 3/1 MMR definida a partir do Hamiltoniano ressonante médio obtido através do método semi-analítico (Michtchenko et al., 2006). Encontramos as soluções de equilíbrio do problema e determinamos algumas de suas propriedades. O objetivo deste capítulo é estender o olhar além destas soluções, analisando quais os principais regimes de movimento que se encontram ao redor do ACR de uma 3/1 MMR, e como estes variam em função dos parâmetros globais do problema, em especial o momento angular.

Como visto nas seções anteriores, sistemas próximos a uma 3/1 MMR têm uma maior probabilidade de situarem-se ao redor da  $(\pi, \pi)$ -ACR, uma vez que, comparativamente aos outros pontos de equilíbrio estáveis, esta encontra-se em configuração de baixas excentricidades e longe das curvas de colisão.

Ao longo deste capítulo fazemos um uso exaustivo do método de análise espectral (SAM, do original, *Spectral Analysis Method*). Esta técnica foi desenvolvida por Michtchenko et al. (2002), e foi detalhado nesta tese na Seção 3.3.

Calculamos os mapas dinâmicos sobre o plano representativo de  $(n_1/n_2, e_2)$  através de uma grade de condições iniciais cujo espaçamento entre seus pontos é de:  $\Delta_{n_1/n_2} = 0.0012$  e  $\Delta_{e_2} = 0.002$ . Fixamos  $\theta_1$  em 0 ou  $\pi$  para cada mapa, e neles  $\Delta\varpi = 0(\pi)$  para  $e_2 > 0 (< 0)$ . Para altos valores de momento angular, as regiões em torno do ACR são mais estreitas que para momentos angulares mais baixos. Porém, para caracterizar o caos sob uma mesma escala, o espaçamento utilizado nos diferentes mapas é fixo e isto compromete a resolução dos mapas com menos pontos, neste caso, de altos valores de AM.

Como nos capítulos anteriores, o método é aplicado para os parâmetros físicos do sistema HD60532 b-c, descritos na Tabela 2.3 e o momento angular para cada mapa é

determinado pelo valor da excentricidade do planeta interno sobre a família  $(\pi, \pi)$ -ACR. É importante lembrar que a topologia dos espaços de fase é determinada pelos parâmetros globais  $AM$ ,  $K$  e  $m_2/m_1$ . Usamos neste capítulo,  $m_2/m_1 = 2.36$  do sistema HD60532 b-c real e  $K = 0.6345$  (em unidades de ano, massa solar e unidades astronômicas). Consideramos também, baseado na expansão em coeficientes de Laplace da função perturbadora (Seção 3.2),  $\theta_1 = 2\sigma_1$  como o ângulo crítico ressonante para o sistema HD60532 b-c.

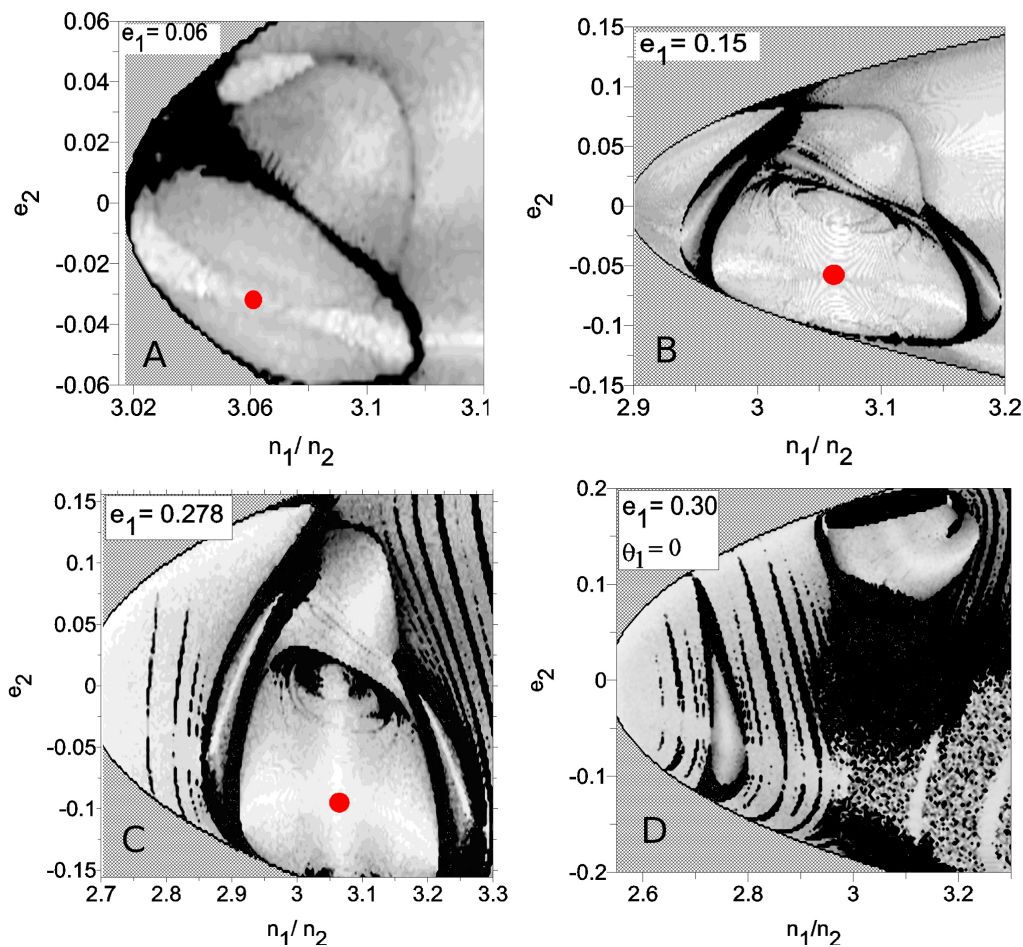


Figura 5.1: Mapas dinâmicos calculados para quatro diferentes momentos angulares: (A):  $e_1 = 0.06$ , (B):  $e_1 = 0.15$  e (C):  $e_1 = 0.278$  e (D):  $e_1 = 0.30$ . Os valores negativos de excentricidade correspondem a  $\Delta\varpi = \pi$ , enquanto que os valores positivos a  $\Delta\varpi = 0$ . Para os mapas (A), (B) e (C)  $\theta_1$  foi fixado em  $\pi$  e para (D)  $\theta_1 = 0$ . A estrutura ressonante aparece nos mapas (A), (B) e (C) e corresponde à região limitada pelas áreas negras na região em que  $e_2 < 0$ . Os círculos vermelhos são o ACR, as áreas hachuradas são as zonas de movimento proibido onde não há solução. A escala de cor marca os regimes mais regulares (tons claros) aos mais caóticos (tons escuros). O mapa (D) mostra os planos  $(\theta_1, \Delta\varpi) = (0, 0), (0, \pi)$ .

## 5.1 Características gerais

Para ilustrar como as estruturas dos mapas dinâmicos evoluem em função do momento angular, na Figura 5.1 plotamos quatro mapas, cada um para um valor diferente de AM calculado a partir de (A)  $e_1 = 0.06$ , (B)  $e_1 = 0.15$ , (C)  $e_1 = 0.278$  e (D)  $e_1 = 0.30$  dos ACRs. Nos planos (A), (B) e (C) fixamos  $\theta_1 = \pi$  e para o plano (D) fixamos  $\theta_1 = 0$ , em todos os planos  $\Delta\varpi = 0$  ( $\pi$ ) para  $e_2 > 0$  ( $< 0$ ). O motivo de (D) mostrar o plano  $\theta_1 = 0$  será explicado mais adiante.

Embora alguns aspectos dos mapas dinâmicos mudem em função de AM, existem algumas características gerais que são comuns para os diferentes conjuntos de parâmetros. Os mapas (A), (B) e (C) da Figura 5.1 possuem um centro marcado em vermelho que representa a  $(\pi, \pi)$ -ACR. Neste ponto, o ângulo ressonante e  $\Delta\varpi$  libram com amplitude nula. Em torno dele existe uma região de movimento quase-periódico destacada pela coloração acinzentada, que definimos como regime ressonante. A região hachurada corresponde às zonas proibidas de movimento, onde não há soluções das Equações 3.10 e 3.8.

A área de movimento quase-periódico no interior da 3/1 MMR corresponde à interação de dois modos de movimento, que estão relacionados às duas frequências principais do problema ressonante médio. Estes modos são chamados Modo Secular e Ressonante. O primeiro está relacionado à frequência  $f_{res}$  correspondente à evolução periódica dos semieixos e  $\theta_1$ , enquanto o segundo associado à componente de longo-período das excentricidades e ao ângulo  $\Delta\varpi$ . Ao longo deste capítulo nos referimos às frequências  $f_{res}$  e  $f_{sec}$  como as frequências ressonante associada a  $(f_{\theta_1})$  e secular relacionada a  $(f_{\Delta\varpi})$  respectivamente.

Todos os mapas dinâmicos tem seus domínios de movimento regular delimitados por regiões caóticas. Estas estão associadas às separatrizes entre a 3/1 MMR e os outros regimes de movimento presentes. Estas áreas de movimento caótico aparecem marcadas em tons escuros e são responsáveis por instabilidades que resultam na destruição de uma configuração estável do sistema.

Classificamos os mapas em três diferentes categorias, de acordo com suas estruturas dinâmicas. Nas seções seguintes entraremos em detalhes sobre os regimes dinâmicos observados e utilizamos os mapas da Figura 5.1 para representar cada uma das categorias. Cada uma delas será descrita por dois mapas, um com  $\theta_1 = \pi$  e outro com  $\theta_1 = 0$ . A

classificação utilizada é:

- **Baixas excentricidades de ACR ou alto momento angular:** exemplificamos com mapa de momento angular calculado com  $e_1 = 0.06$  (Figura 5.1 A). Observamos além da região ressonante, duas regiões limitadas por separatrizes. Ambas tem influência da ressonância, mas se encontram no exterior dela, no ramo em que  $e_2 > 0$  ( $\Delta\varpi = 0$ ).
- **Momento angular e excentricidades moderados de ACR:** usamos como exemplo o mapa de momento angular calculado com  $e_1 = 0.15$  (Figura 5.1 B). Para este valor observamos que outras regiões de movimento regular aparecem para  $e_2 < 0$  ( $\Delta\varpi = \pi$ ) no interior das separatrizes da ressonância. Para baixas excentricidades notamos também uma maior incidência de regiões de movimento caóticos.
- **Baixo momento angular ou altas excentricidades de ACR:** usamos como exemplo o mapa dinâmico com momento angular calculado para  $e_1 = 0.278$  ( Figura 5.1 C ) e  $e_1 = 0.30$  (Figura 5.1 D), o primeiro correspondendo ao AM do sistema HD60532 b-c. Percebemos as mesmas estruturas do caso de excentricidades moderadas, com a adição de ressonâncias de altas ordem ao redor do lado externo da 3/1 MMR. Notamos também uma maior concentração de regiões caóticas no interior da região ressonante. O mapa de momento angular calculado para  $e_1 = 0.30$  foi escolhido pois para essa classificação de momento angular, o mapa com  $e_1 = 0.30$  apresenta as estruturas mais nítidas e destacadas, facilitando nossa compreensão da dinâmica.

Esta classificação, embora genérica, leva em conta apenas as diferenças em relação às distintas zonas dinâmicas presentes. A descrição dos regimes dinâmicos presentes em cada uma delas encontram-se nas seções seguinte.

Cada mapa dinâmico vem acompanhado do espectro de potências dinâmico calculado ao longo de uma reta sobre o mapa fixando  $e_2$  ou  $n_1/n_2$  indicadas nos mapas por uma linha pontilhada. Uma suave variação das frequências indica uma região de movimento regular, enquanto o espalhamento irregular das frequências é uma característica de movimento caótico. Para complementar a análise da dinâmica e representar seu comportamento, incluímos gráficos com a evolução temporal dos ângulos do problema, obtidas através da

integração das equações exatas de movimento. Como temos 2 graus de liberdade e 4 ângulos, dois destes se escrevem como combinação dos outros. Por isso, apenas apresentamos as séries temporais dos ângulos que apresentam características distintas. O ângulo  $\theta_1$  por ser o librante, sempre é plotado. Assim como  $\Delta\varpi$ , por ser o único relacionado à dinâmica secular. Plotaremos  $\theta_2$  ou  $\theta_3$  quando for conveniente para explicar a dinâmica de cada área.

## 5.2 Mapa dinâmico de ACR com baixa excentricidade e $\theta_1 = \pi$ fixo

Para representar os altos valores de momento angular escolhemos o mapa dinâmico calculado com  $e_1 = 0.06$  sobre a família de soluções  $((\pi, \pi))$ -ACR simétrico.

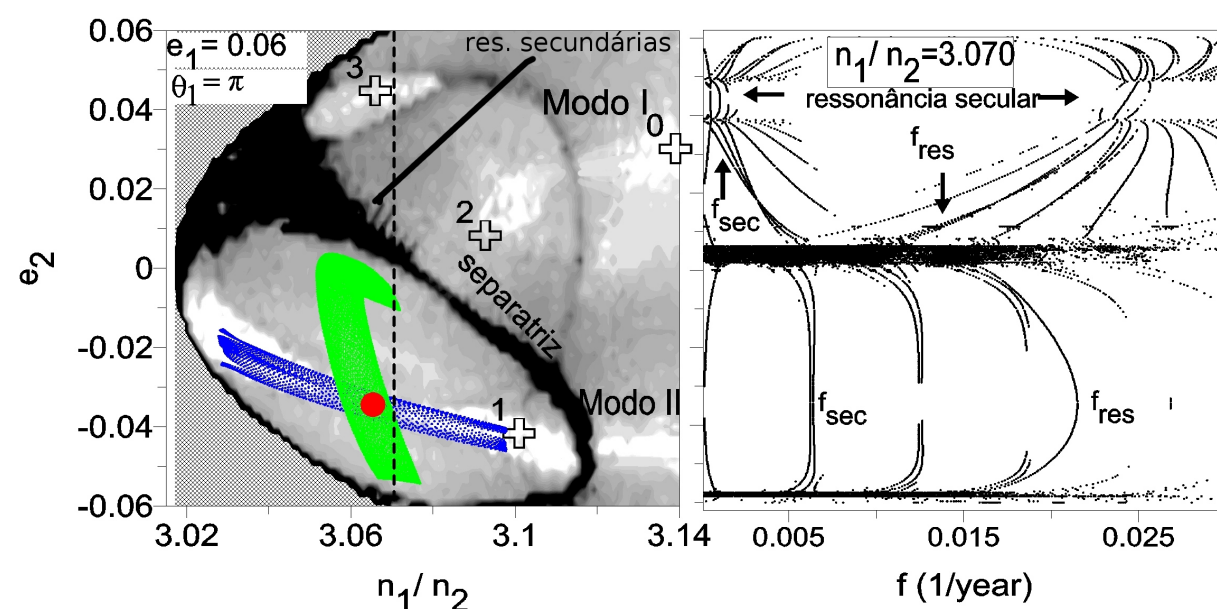


Figura 5.2: (Lado esquerdo) Mapa dinâmico calculado para  $e_1 = 0.06$  e  $\theta_1 = \pi$ . O círculo vermelho corresponde ao ACR. A linha negra pontilhada marca o valor de  $n_1/n_2$  ao longo do qual a análise do espectro dinâmico é realizada. Os pontos marcados encontram-se em diferentes regimes dinâmicos: 0- puramente secular, 1-regime ressonante, 2- quase-ressonância, 3- ressonância secular. As curvas azuis e verdes correspondem a evolução temporal de um sistema próximo à família  $\Delta\varpi$  e  $\theta_1$ , respectivamente. As regiões de tons claros na região puramente secular marcam os Modos I e II de movimento. (Lado direito): Espectro de potência dinâmico calculado para  $n_1/n_2 = 3.07$ . O espectro dinâmico está calculado ao longo da excentricidade do planeta externo sobre as séries temporais da razão de movimentos médios e excentricidade. As setas indicam as evoluções das frequências principais  $f_{res}$  e  $f_{sec}$  e o intervalo onde ocorre a ressonância secular. Ambos os gráficos possuem o mesmo intervalo em  $e_2$ .

Na Figura 5.2 plotamos o mapa dinâmico calculado para  $e_1 = 0.06$  com  $\theta_1 = \pi$  fixo (lado esquerdo) e o espectro de potência dinâmico calculado ao longo da linha  $n_1/n_2 = 3.07$

(lado direito). Ela ilustra a transição entre um regime puramente secular e o ressonante. De fato, a captura de um sistema planetário em uma 3/1 MMR é mais provável quando os planetas evoluem desde órbitas quase-circulares, conforme vimos na seção 2.3. Legendamos sobre o gráfico do espectro dinâmico as frequências  $f_{res}$  e  $f_{sec}$  do problema, sendo as não identificadas pelas legendas frequências harmônicas ou combinações lineares das frequências principais.

Os diferentes domínios presentes estão separados por separatrizes, as quais correspondem as áreas negras do mapa dinâmico. São regiões em que a frequência de algum dos ângulos decai a "zero", fazendo com que o período de suas oscilações tenda a um período infinito. Utilizamos estas regiões como delimitadores de cada um dos regimes presentes.

Na área marcada pelo ponto 0 (qualquer posição onde  $n_1/n_2 > 3.12$ ), o sistema evolui em um comportamento puramente secular definido pela composição dos dois modos de movimento secular, conhecidos como *Modo I* e *Modo II*. O primeiro corresponde a uma configuração alinhada das órbitas dos planetas ( $\Delta\varpi = 0$ ), que ocorre em um mínimo de energia para um dado valor de AM. Já o segundo relaciona-se com as soluções que descrevem órbitas antialinhadas ( $\Delta\varpi = \pi$ ) e corresponde a um máximo de energia (Michtchenko e Ferraz-Mello, 2001a). A transição entre estes modos é feita de modo suave, não havendo separatrizes entre os dois modos. Eles podem ser visualizados pelas regiões de tons mais claros abaixo das legendas "Modo I" e "Modo II" no mapa dinâmico da Figura 5.2.

A entrada do sistema, com  $m_2/m_1 > 1$  na 3/1 MMR parece ocorrer através do *Modo II* de máxima energia (Michtchenko e Rodríguez, 2011). Simulações numéricas de migração planetária confirmam que a captura dos planetas em órbitas quase-circulares em uma ressonância é geralmente precedida pela evolução do par sobre o Modo II quando  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $180^\circ$  (Ferraz-Mello et al., 2003; Kley, 2003; Beaugé et al., 2006; Michtchenko e Rodríguez, 2011). Nos mapas indicamos estes modos, que aparecem com tons claros no domínio de movimento secular.

No plano *A* da Figura 5.3 vemos as componentes do movimento utilizando as condições iniciais do ponto 0 do mapa dinâmico, com coordenadas  $(n_1/n_2, e_2) = (3.139, 0.028)$ . A curva em negro corresponde a composição do movimento secular e de curto-período, enquanto na vermelha apenas à componente secular, cujo ângulo associado,  $\Delta\varpi$  tem direção de oscilação/circulação de  $\Delta\varpi$  retrógrada.



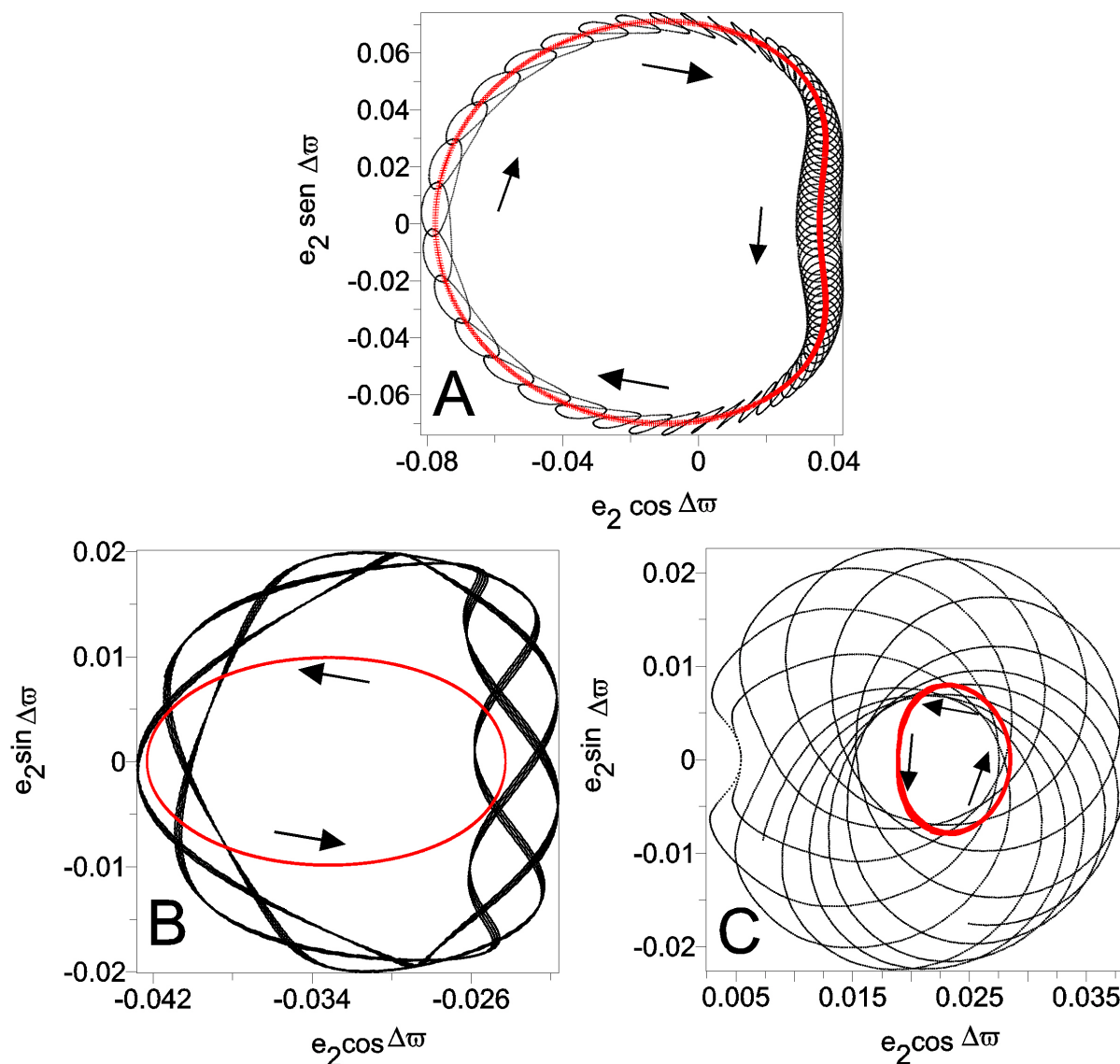


Figura 5.3: Evolução temporal da excentricidade do planeta externo e do ângulo  $\Delta\varpi$  no plano  $e_2 \cos(\Delta\varpi) \times e_2 \sin(\Delta\varpi)$ . Para todos os planos as curvas em negro correspondem às componentes secular e ressonante, enquanto a vermelha apenas à secular. As setas apontam a direção de circulação de  $\Delta\varpi$ . (A): Componentes de movimento para o ponto 0 da Figura 5.2, com condições iniciais:  $(n_1/n_2, e_2) = (3.139, 0.028)$ .  $\Delta\varpi$  tem movimento retrógrado. (B): Evolução temporal usando como condições iniciais as coordenadas do ponto 1 na Figura 5.2. Estas coordenadas são:  $(n_1/n_2, e_2) = (3.058, -0.023)$ . O ponto encontra-se no interior da região ressonante.  $\Delta\varpi$  tem movimento prógrado. (C): Evolução temporal usando como condição inicial as coordenadas do ponto 2 na Figura. As coordenadas são:  $(n_1/n_2, e_2) = (3.089, 0.006)$ . O ponto encontra-se na região de quase-ressonância. A direção de circulação do ângulo  $\Delta\varpi$  é a mesma, e portanto prógrada.

Nas subseções seguintes nos inclinamos sobre os regimes onde se encontram os pontos 1, 2 e 3 e descrevemos cada um deles.

### 5.2.1 Região do ponto 1: regime ressonante

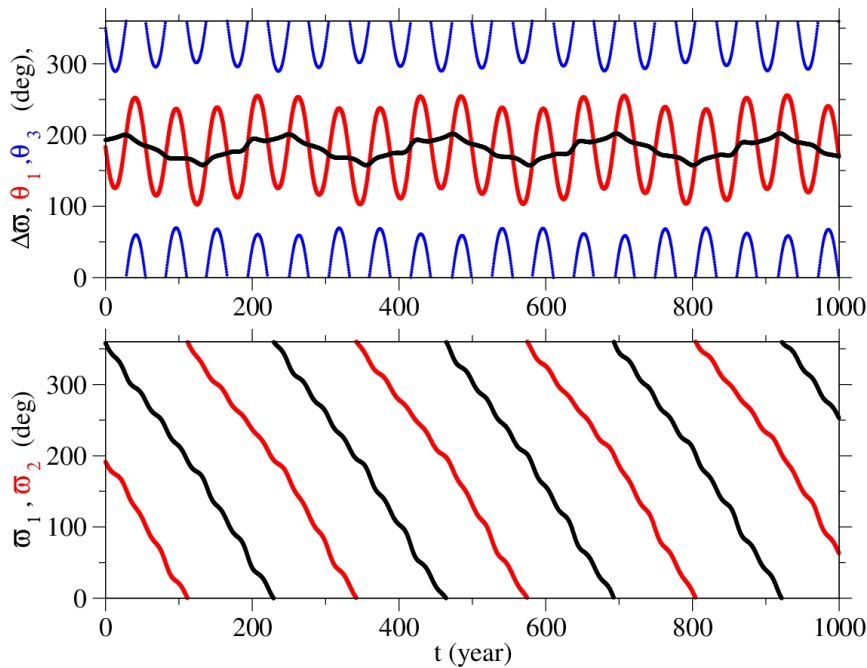
A região marcada pelo ponto 1 é a ressonante. Ela é limitada pela separatriz indicada no mapa que corresponde às regiões escuras de movimentos caóticos que a circundam. A separatriz é definida pela energia de um ponto fixo hiperbólico, similar às curvas pontilhadas roxas na Figura 4.1 no Capítulo 4.

Na Figura 5.4 mostramos o comportamento dos ângulos principais calculados para as coordenadas do ponto 1 como condições iniciais. No gráfico superior plotamos o comportamento de  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  e  $\Delta\varpi$  em função do tempo e no gráfico inferior os ângulos  $\varpi_{1,2}$  ao longo do tempo. Observamos que  $\theta_1$  libra em torno de  $180^\circ$  e  $\theta_3$  oscila em torno de  $0^\circ$ .  $\Delta\varpi$  também oscila em torno de  $180^\circ$  devido à circulação retrógrada defasada em fase de  $\varpi_2$  e  $\varpi_1$ . Além de  $\theta_3$ , o ângulo  $\theta_2$  também possui um movimento oscilatório, mas em torno de  $180^\circ$ . O comportamento deles difere de  $\theta_1$ , uma vez que neste caso, seus movimentos são semelhantes a uma família de curvas concêntricas em torno de um centro deslocado da origem. A separação entre oscilação e circulação não ocorre através de uma separatriz dinâmica, mas de uma curva passando pela origem. A distinção entre uma oscilação e circulação dos ângulos  $\theta_2$  e  $\theta_3$  é portanto, puramente cinemática.

A dinâmica nesta zona é determinada pela composição dos modos ressonante e secular de movimento e para ilustrar isso, mostramos sobre o mapa da Figura 5.2 a projeção de duas órbitas quase-periódica denotadas pelas curvas verde e azul. Elas foram calculadas a partir de condições iniciais próximas às famílias  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  respectivamente, de modo que possuem pequena amplitude de oscilação em torno destas famílias. Estas duas famílias cruzam-se sobre o ACR marcado pelo ponto vermelho na figura e a amplitude de  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  neste ponto é nula. Na curva verde, portanto, vemos principalmente a componente secular do movimento nas oscilações de seus elementos. A troca de momento angular entre os dois planetas, neste caso, afeta apenas as excentricidades, e os semieixos são praticamente constantes. De maneira oposta, para a curva azul, a projeção da órbita exhibe principalmente as oscilações de frequência ressonante e  $\theta_1$  libra com grande amplitude em torno do ACR. O gráfico *B* da Figura 5.3 mostra as duas componentes de movimento nesta região para um sistema com condições iniciais  $(n_1/n_2, e_2) = (3.054, -0.008)$ . A curva vermelha representa o modo secular e sua evolução mostra uma circulação prógrada em torno de  $180^\circ$ . A curva negra é uma combinação do modo ressonante e secular e exhibe

da mesma forma, uma oscilação prógrada em torno de  $180^\circ$ . As setas indicam a direção em que  $\Delta\varpi$  evolui. Os valores típicos das oscilações secular e ressonante são da ordem de centenas e dezenas de anos respectivamente.

O espectro dinâmico calculado sobre  $n_1/n_2 = 3.07$ , no lado direito da Figura 5.2 comprova estas propriedades. Nele, vemos que no interior da região ressonante ( $-0.058 < e_2 < 0$ ) a frequência do ângulo crítico  $\theta_1$  atinge seu máximo quando cruza a família  $\theta_1$ , em torno de  $e_2 \approx -0.031$ . As frequências neste ponto são  $f_{res} = 0.021 \text{ ano}^{-1}$  e  $f_{sec} = 0.0060 \text{ ano}^{-1}$ , ou seja, o período próprio do ângulo ressonante é de cerca de 47 anos, enquanto que o secular é de 167 anos. A forte interação gravitacional entre os dois planetas devido às grandes massas e pequena distância que eles mantêm entre si são o motivo pelo qual a frequência secular é tão alta se comparado a outros sistemas, que possuem interações seculares ordens de grandeza mais altas que as ressonantes.



*Figura 5.4:* Comportamento dinâmico dos ângulos obtido através de uma integração numérica. As condições iniciais utilizadas são as coordenadas do ponto 1 localizado sobre o mapa dinâmico da Figura 5.2. Neste ponto:  $(n_1/n_2, e_2) = (3.098, -0.043)$ . (Topo): O gráfico mostra que o ângulo  $\Delta\varpi$  exibe uma oscilação lenta em torno de  $180^\circ$  com um período de  $T_{\Delta\varpi} \approx 222$  anos. O ângulo  $\theta_1$  vibra com período de aproximadamente  $T_{\theta_1} \approx 55$  anos. O ângulo  $\theta_3$  por sua vez, oscila em torno de 0. O ângulo  $\theta_2$  tem aproximadamente o mesmo comportamento de  $\theta_1$  e por isso não mostramos no gráfico. (Inferior): Evolução temporal dos ângulos  $\varpi_i$ . Ambos ângulos circulam retrogradamente com a mesma frequência do ângulo  $\Delta\varpi$  e estão defasados em fase.

### 5.2.2 Região do ponto 2: região de quase-ressonância

A região onde o ponto 2 se encontra está separada da ressonância pela separatriz e por outra camada de caos que a isola do domínio puramente secular e do domínio onde se encontra o ponto 3 ( $0 < e_2 < 0.04$  no espectro dinâmico da Figura 5.2). Os ângulos críticos neste espaço circulam retrogradamente com frequência ressonante, de forma tal que  $\Delta\varpi$  (que pode ser escrito da forma  $\Delta\varpi = \sigma_1 - \sigma_2$ ) oscila em torno de zero. Este comportamento ocorre mesmo para locais dentro desta região em que  $e_2 < 0$ .

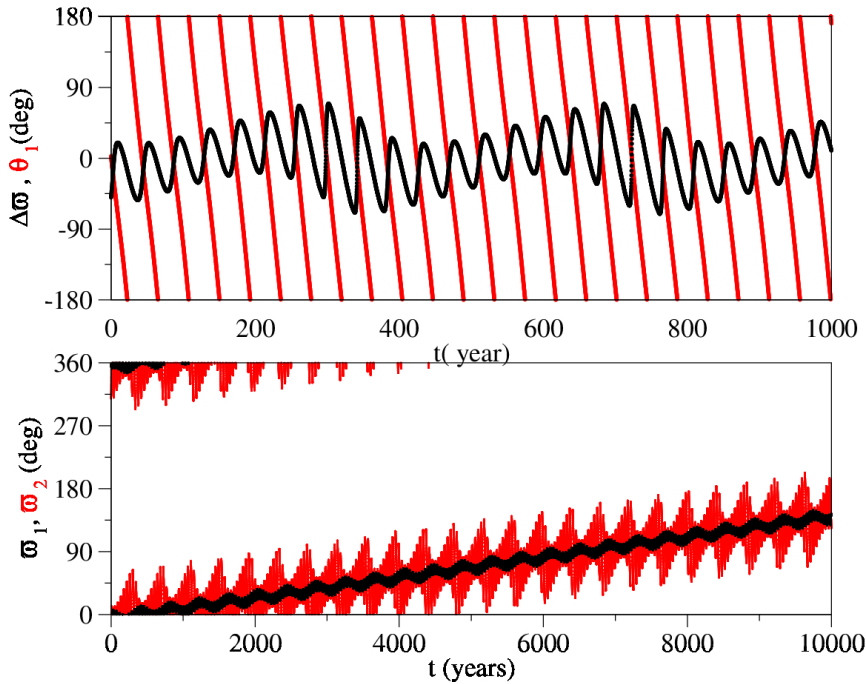


Figura 5.5: Evolução temporal dos ângulos obtida através de uma integração numérica das equações exatas. As condições iniciais utilizadas são as coordenadas do ponto 2 localizado sobre o mapa dinâmico na Figura 5.2. Neste ponto:  $(n_1/n_2, e_2) = (3.089, 0.006)$ . (Topo): O gráfico mostra que o ângulo  $\Delta\varpi$  realiza uma lenta oscilação em torno de  $0^\circ$  com um período de  $T_{\Delta\varpi} \approx 405$  anos (frequência forçada). E sobre o valor médio desta oscilação uma frequência rápida da ordem da ressonante  $f_{res}$ . O ângulo  $\theta_1$  circula com um período de  $T_{\theta_1} \approx 43$  anos (frequência própria). Os ângulos  $\theta_2$  e  $\theta_3$  possuem o mesmo comportamento, razão pela qual não plotamos sua evolução temporal. (Inferior): Ambos ângulos  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  circulam progressivamente com um período de circulação  $T_c$  de  $\approx 25000$  anos e também possuem uma frequência de oscilação em torno de 405 anos, como a oscilação do ângulo  $\Delta\varpi$ . O período de circulação lenta ocorre devido à proximidade ao ponto cuja condição inicial leva a  $\frac{\partial\varpi_i}{\partial t} = 0$ .

Na Figura 5.5 plotamos a evolução temporal para os principais ângulos do problema, incluindo  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$ , utilizando as coordenadas do ponto 2 como condições iniciais. Na parte inferior da figura vemos que para estas condições iniciais  $\varpi_{1,2}$  circulam progradamente e em fase, com  $\varpi_2$  com uma amplitude maior que  $\varpi_1$ , fazendo com que  $\Delta\varpi$  oscile em torno

de  $0^\circ$  com grande amplitude. A direção de circulação prógrada ou retrógrada de  $\varpi_{1,2}$  neste regime depende das condições iniciais. Na Figura 5.6 plotamos o espectro dinâmico sobre a evolução temporal do ângulo  $\varpi_1$  ao longo da curva com  $n_1/n_2 = 3.07$ . Notamos no gráfico superior que, para  $e_2$  crescente, a frequência de precessão decai a 0 em torno de  $e_2 = 0.17$  e volta a crescer em torno de  $e_2 = 0.02$ . O gráfico inferior apresenta a evolução temporal dos ângulos  $\varpi_{1,2}$ , para condições iniciais antes e depois da mudança de circulação de retrógrado para prógrado.

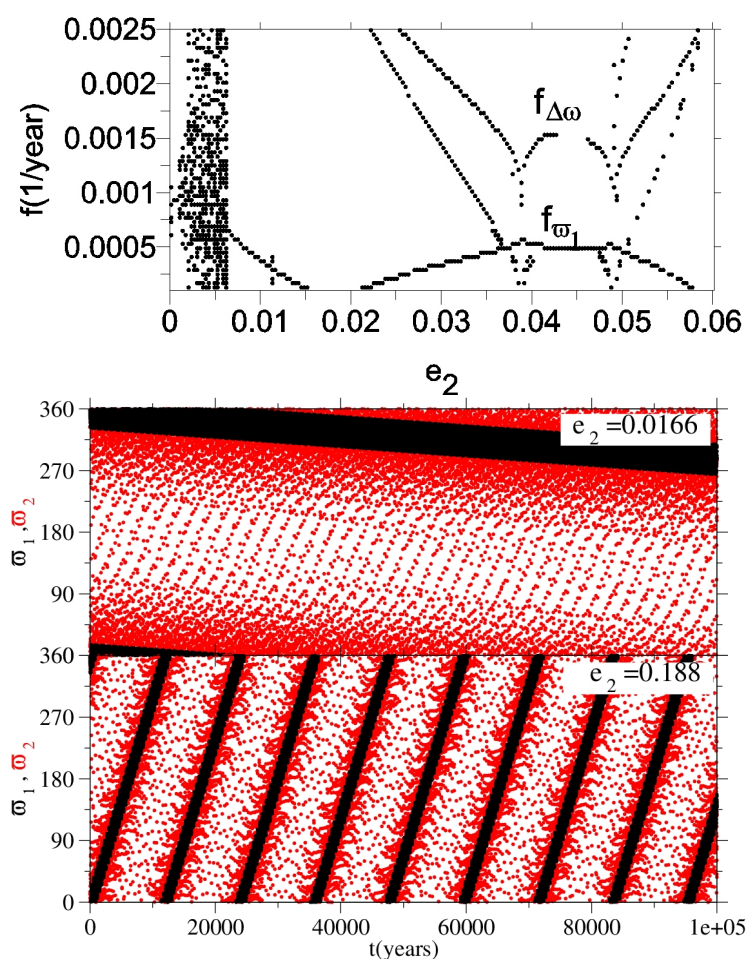


Figura 5.6: (Topo): Espectro dinâmico para  $n_1/n_2 = 3.07$  sobre a evolução temporal do ângulo  $\varpi_1$ . Observamos que a frequência de circulação deste ângulo tende a zero ao redor de  $e_2 \approx 0.17$  e volta a crescer para  $e_2 > 0.17$ . (Inferior): Comportamento dinâmico dos ângulos  $\varpi_i$  obtido através de uma integração numérica. As condições iniciais utilizadas são as  $(n_1/n_2, e_2) = (3.070, 0.0166)$  e  $(n_1/n_2, e_2) = (3.070, 0.0188)$ . A direção de circulação dos ângulos  $\varpi_i$  depende de suas condições iniciais.

Os diferentes comportamentos dinâmicos do sistema desta área podem ser analisados a partir da evolução das frequências no mapa do espectro de potência dinâmico no lado direito da Figura 5.2. Dentro deste regime, para baixas excentricidades principalmente,

ocorrem comensurabilidades entre as frequências  $f_{res}$  e  $f_{sec}$  conhecidas como ressonâncias secundárias. Podemos notá-las pelos batimentos entre as frequências em torno da separatriz no espectro dinâmico e pelas franjas negras ao redor da separatriz em torno de  $e_2 \approx 0$  no mapa dinâmico (lado esquerdo da Figura 5.2). Porém, para este valor de momento angular essas ressonâncias secundárias são pouco expressivas.

Notamos que para  $e_2$  crescente, a frequência secular  $f_{sec}$  decai e a frequência ressonante  $f_{res}$ , por sua vez, cresce.  $f_{sec}$  tende a zero próximo a  $e_2 \approx 0.04$ . Este comportamento ocorre devido à mudança de direção de circulação do ângulo  $\Delta\varpi$ , que passa de prógrado, nesta região, para retrógrado na zona de movimento puramente secular. Veremos que para condições iniciais específicas, esta transição ocorre através de um regime de movimento estável, a que nos referimos como "ressonância secular verdadeira". Esta região corresponde a do ponto 3 e será explicada na próxima subseção.

A região com tons mais claros na área mais central da quase-ressonância onde se encontra o ponto 2 corresponde à família  $\Delta\varpi$ , onde a amplitude de oscilação deste ângulo em torno de  $0^\circ$  atinge seu mínimo. Quanto mais longe desta área, maior é sua amplitude. Distante o suficiente este ângulo deixa de oscilar e passa a circular.

Fazendo uma análise das componentes do movimento para o ponto 2 utilizando um filtro passa-baixa, mostramos, no gráfico  $C$  da Figura 5.3 que neste regime,  $\Delta\varpi$  agora oscila em torno de 0. Seu movimento ainda é prógrado, similar ao visto na região do ponto 1, conforme o plano  $B$  do gráfico. A componente ressonante, por sua vez, agora é retrógrada, e esta mudança ocorre devido à transição entre a libração no regime ressonante e a circulação no quase-ressonante.

### 5.2.3 Região do ponto 3: regime de ressonância secular

Seguindo a curva do espectro dinâmico sobre o mapa da Figura 5.2, como mencionamos, a frequência secular decai ao longo de  $e_2$  crescente. Esse comportamento se mantém até  $f_{sec} \rightarrow 0$ , dando origem a uma nova separatriz de regime dinâmico. Além desta separatriz denotamos a região onde o ponto 3 no mapa dinâmico da Figura 5.2 está localizado. Ela está limitada ao intervalo  $0.04 < e_2 < 0.05$ , compreendida no interior da separatriz que a isola do domínio de quase-ressonância e puramente secular.

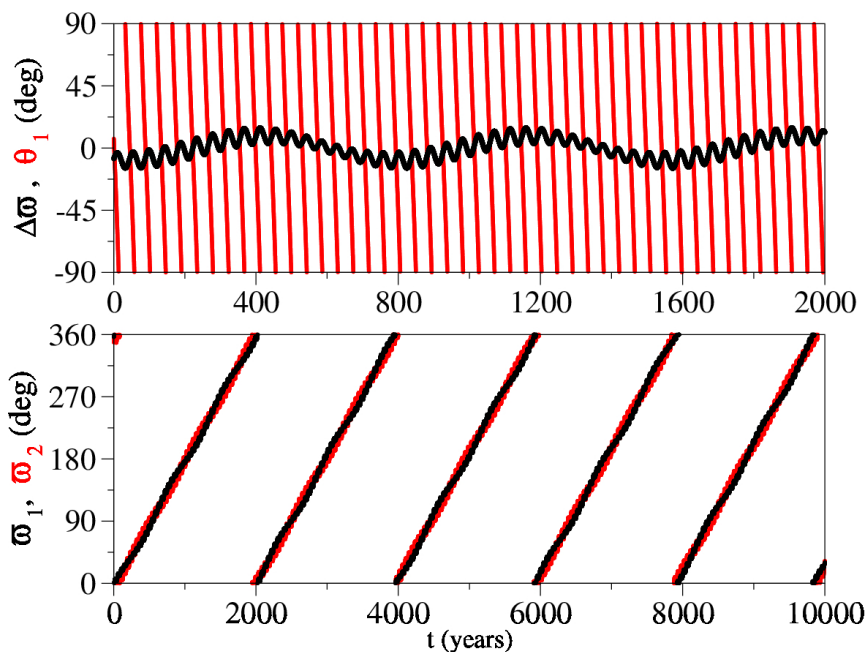


Figura 5.7: Evolução temporal dos ângulos obtida através de uma integração numérica. As condições iniciais utilizadas são calculadas a partir das coordenadas do ponto 3 localizado sobre o mapa dinâmico na Figura 5.2. Neste ponto:  $(n_1/n_2, e_2) = (3.063, 0.042)$ . (Topo): O gráfico mostra que o ângulo  $\Delta\varpi$  exibe uma oscilação lenta em torno de  $0^\circ$  com período de  $T_{\Delta\varpi} \approx 760$  anos e outra oscilação com período do ângulo  $\theta_1$  ao redor do valor da oscilação em torno de zero. O ângulo  $\theta_1$  circula retrogradamente com um período  $T_{\theta_1} \approx 44$  anos. (Inferior): Ambos ângulos  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  circulam progressivamente com um período de circulação  $T_c$  de  $T_c \approx 1950$  anos.

Na Figura 5.7, mostramos a evolução temporal dos ângulos utilizando as coordenadas do ponto 3 como condições iniciais. O comportamento dos ângulos nesta região parece similar ao da região onde o ponto 2 se localiza, com  $\theta_1$  exibindo uma circulação retrógrada e  $\Delta\varpi$  oscilando em torno de  $0^\circ$  com duas componentes, uma secular (frequência forçada), e uma ressonante (frequência própria). Esta oscilação de  $\Delta\varpi$ , na região 3 é na verdade uma libração ao redor de  $0^\circ$  que ocorre devido à circulação prógrada em fase de  $\varpi_{1,2}$ , ambas com similar baixa amplitude de frequência própria, diferentemente da região de quase-ressonância, onde vemos uma amplitude de  $\varpi_2$  maior e do movimento puramente secular em que  $\varpi_1$  tem maior amplitude.

A existência de uma separatriz entre a libração e oscilação/circulação de  $\Delta\varpi$  está relacionada com a ressonância secular. A transição entre estes dois comportamentos ocorre de modo a mudar a direção de circulação/oscilação de  $\Delta\varpi$ . Na Figura 5.3 comprovamos isto. Conforme mencionado anteriormente, os gráficos *B* e *C* correspondem às componentes do movimento na ressonância e quase-ressonância, enquanto em *A* vemos o plano para uma condição inicial no regime puramente secular. A direção de circulação da componente

secular (curva vermelha) neste último é retrógrada, enquanto na ressonância e quase-ressonância é prógrada.

É importante notar também que na região de quase-ressonância,  $\varpi_2$  tem maior amplitude de oscilação que  $\varpi_1$ , enquanto na circulação de  $\Delta\varpi$  no regime puramente secular,  $\varpi_1$  é o ângulo que oscila/circula com maior amplitude, forçando  $\Delta\varpi$  a circular retrogradamente. Além disso, notamos no interior do regime de ressonância secular que as frequências de precessão dos ângulos  $\varpi_{1,2}$  e a frequência secular  $f_{sec}$  também são comensuráveis, atingindo uma razão máxima  $\sim 3/1$  em torno de  $e_2 = 0.044$ , como podemos ver na Figura 5.6.

Na Figura 5.8 fazemos um resumo do comportamento dos ângulos em cada região de movimento regular do mapa dinâmico da Figura 5.2. Destacamos que o comportamento do ângulo  $\Delta\varpi$  possui uma circulação prógrada (CP) no interior da região ressonante e quase-ressonante, enquanto que na região de movimento puramente secular realiza uma circulação retrógrada (CR). O ângulo  $\theta_1$ , por sua vez, exibe no interior da ressonância uma libração, enquanto nos outros regimes apresenta uma circulação retrógrada.



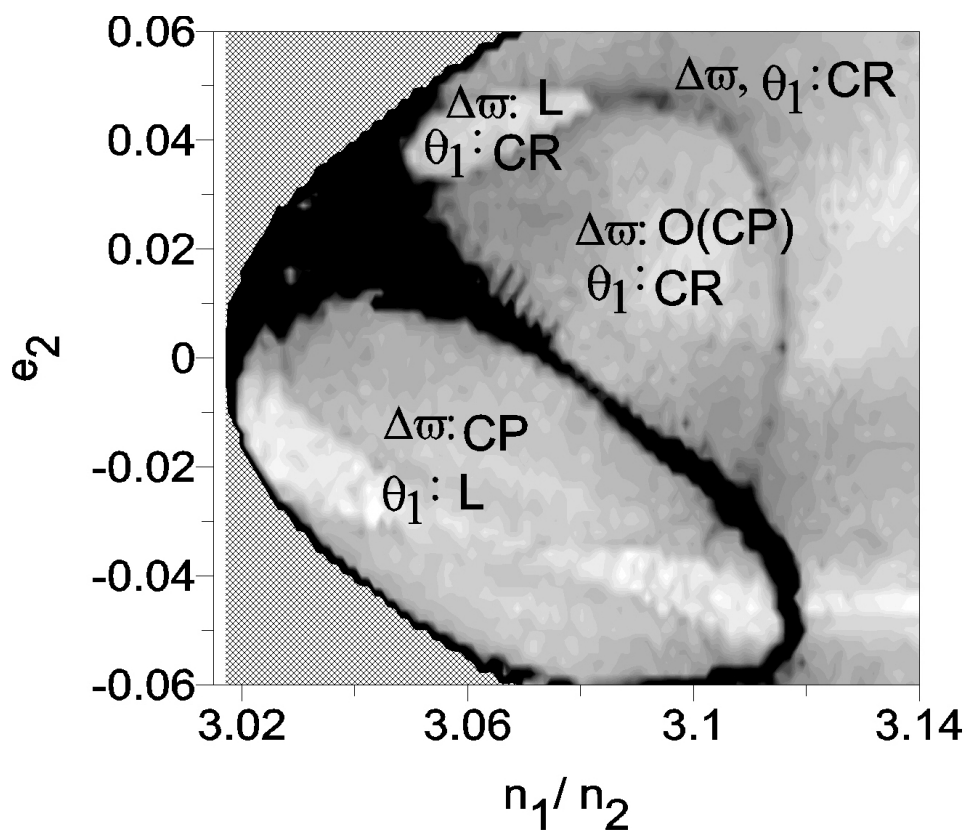


Figura 5.8: Comportamento dos ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  nos regimes do mapa dinâmico. Dentro da região ressonante o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila e circula progradamente (CP) e o ângulo  $\theta_1$  libra (L). Na região quase-ressonante, todos os ângulos críticos circulam retrogradamente e o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila/circula progradamente. Na região de ressonância secular, o comportamento dos ângulos  $\theta_i$  é o mesmo, e  $\Delta\varpi$  libra. Na região puramente secular, todos os ângulos descrevem uma circulação retrógrada.

### 5.3 Mapa dinâmico de ACR com baixa excentricidade de ACR e $\theta_1 = 0$ fixo

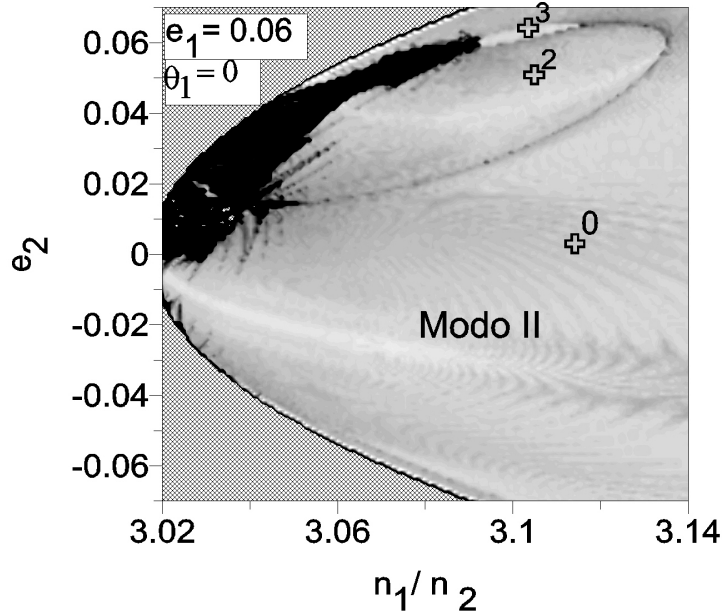


Figura 5.9: Mapa dinâmico calculado para momento angular com  $e_1 = 0.06$  e  $\theta_1 = 0$ . Observamos três regiões principais. A marcada pelo ponto 2 corresponde a região de quase-ressonância. A região onde se encontra o ponto 3 corresponde a região de ressonância secular. A região mais clara no ramo  $e_2 < 0$  corresponde ao Modo II de movimento, que se encontra no regime puramente secular marcado pelo 0.

Para complementar a análise para AM calculado com  $e_1 = 0.06$ , plotamos o mapa dinâmico calculado para o mesmo valor de AM, mas agora com  $\theta_1 = 0$ . Nele, vemos duas regiões contornadas por separatrizes:

- O ponto 0 marcado corresponde ao domínio puramente secular, o mesmo da Figura 5.2, mas neste caso, com  $\theta_1$  oscilando em torno de 0.
- A região em que se encontra o ponto 2: corresponde ao regime de quase-ressonância; o mesmo do ponto 2 visto no mapa da Figura 5.2 em que  $\theta_1 = \pi$ .
- A região em que se encontra o ponto 3: é a zona de ressonância secular, a mesma em que vê-se o ponto 3 da Figura 5.2 em que  $\theta_1 = \pi$ .

A separatriz que isola a quase-ressonância e ressonância secular do movimento puramente secular tem uma estrutura quadridimensional, e é a mesma vista no plano em que  $\theta_1 = \pi$  (Lado esquerdo da Figura 5.2). Como  $\theta_1$  circula dentro destes regimes, elas cruzam os planos em que  $\theta_1 = \pi$  (Figura 5.2) e  $\theta_1 = 0$  (Figura 5.9).

Comprovamos isto fazendo integrações numéricas com condições iniciais dentro da quase-ressonância ou ressonância secular (nos planos em que  $\theta_1 = 0$  ou  $\pi$ ) e verificamos em que locais dos planos  $\theta_1 = 0$  ( $\pi$ ) as órbitas cruzam-no. Confirmamos que um sistema na quase-ressonância cruza os planos apenas no interior deste regime (em ambos planos), o mesmo ocorrendo para a ressonância secular.

Na região 0 temos o regime puramente secular. A família do Modo II do movimento secular, em  $e_2 < 0$  encontra-se marcada sobre o mapa. Nesta região, o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $180^\circ$ . Notamos também que a região ressonante não é visível neste plano. Ou seja, uma evolução de um sistema planetário ao longo do Modo II quando  $\theta_1$  oscila em torno de 0, faria com que o sistema não fosse capturado no interior da 3/1 MMR.

#### 5.4 Mapa dinâmico com ACR de excentricidade moderada e $\theta_1 = \pi$ fixo

Tomamos o mapa dinâmico calculado para  $e_1 = 0.15$  para representar sistemas de excentricidade de ACR moderadas e repetimos a análise das seções anteriores, primeiramente para  $\theta_1 = \pi$ , que pode ser visto na Figura 5.10. Os espectros dinâmicos que acompanham o mapa foram calculados ao longo de  $e_2 = -0.026$  (gráfico B) e  $0.0359$  (gráfico C), representados no mapa pelas linhas pontilhadas horizontais. Estes valores foram escolhidos pois podemos analisar as como se comportam as frequências em todas as áreas de movimento regular presentes no mapa ao longo delas.

Notamos que há algumas estruturas similares entre o mapa dinâmico calculado para  $e_1 = 0.06$  (mapa na esquerda da Figura 5.2) e o calculado para  $e_1 = 0.15$  (mapa na esquerda da Figura 5.10), embora qualitativamente a dinâmica planetária não mude muito. A região ressonante e quase-ressonante mantém-se, assim como suas propriedades: dentro da ressonância,  $\theta_1$  continua librando, e o movimento neste local é determinado pelos modos secular e ressonante em torno do ACR. A quase-ressonância, por sua vez, tem os ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  circulando retrógrada e progradamente respectivamente. Em comparação com o mapa da Figura 5.2, o domínio da 3/1 MMR é mais largo como esperado, uma vez que o momento angular é menor. Ao seu redor, as áreas de movimentos caóticos se expandem e esse aumento gera algumas diferenças em relação ao mapa da  $e_1 = 0.06$ :

1. A distância do ACR ao valor nominal 3/1 diminui com o aumento do domínio ressonante.

2. A região de ressonância secular em  $\Delta\varpi = 0$  não mais é detectada, dado o crescimento da camada de caos entre o regime secular e quase-ressonante.
3. Surgem ressonâncias secundárias em áreas de baixa excentricidade mais desenvolvidas.
4. Aparecem no interior das separatrizes da 3/1 MMR (marcadas pelas cruces em negro no mapa) domínios de movimento regular com oscilações de altas amplitudes de  $\theta_1$  em torno de  $180^\circ$  e de baixas amplitudes de  $\Delta\varpi$  em torno deste mesmo valor.
5. À "esquerda" da ressonância aparece a região de quase-ressonância interna (marcada pelo triângulo no mapa).

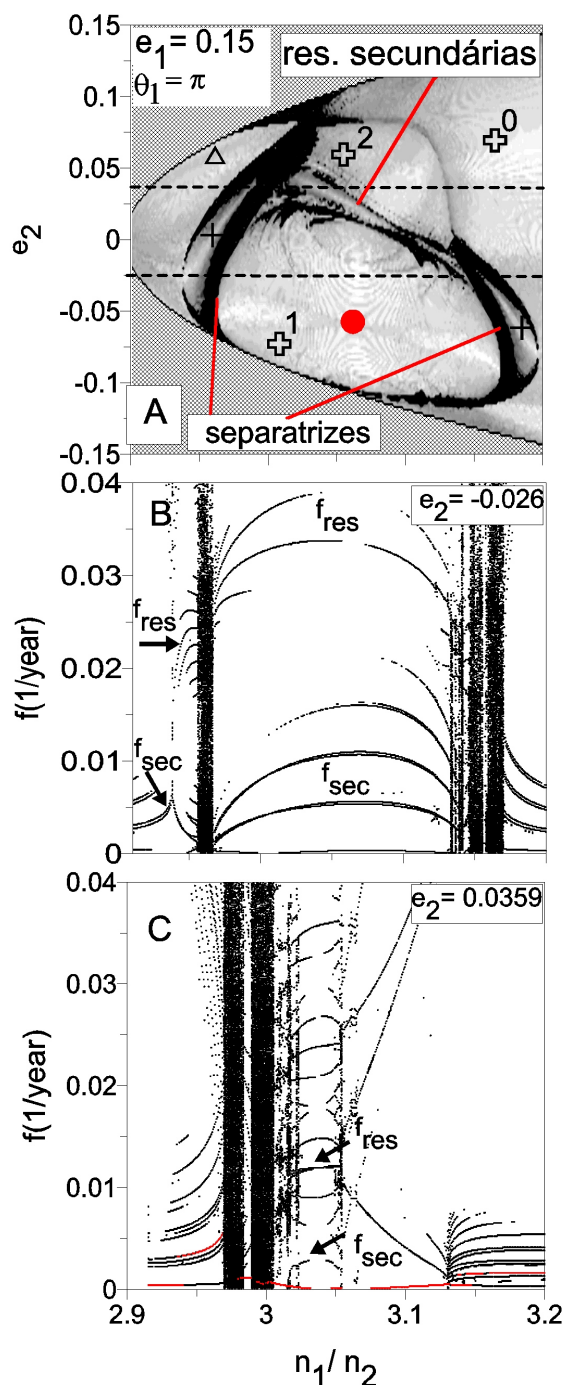


Figura 5.10: (A): Mapa dinâmico calculado para  $e_1 = 0.15$  e  $\theta_1 = \pi$ . O ponto vermelho marca a localização do ACR. O triângulo marca a região de quase-ressonância interna e as cruzes pretas os regimes de ressonância secular com  $\Delta\varpi = \pi$ . As regiões caóticas intercaladas por movimento regular para baixas excentricidades estão indicadas no mapa como ressonâncias secundárias. As linhas pontilhadas marcam as curvas sobre as quais aplicamos os espectros de potência dinâmico. As cruzes numeradas marcam os regimes 0 - secular 1 - ressonante e 2 - quase ressonante. (B): Espectro dinâmico calculado ao longo de  $e_2 = -0.026$  indicado sobre o mapa dinâmico pela reta horizontal pontilhada. O espectro dinâmico foi calculado sobre a evolução temporal das excentricidades e razão de movimentos médios. Identificamos por setas e legendas a posição das frequências principais  $f_{res}$  e  $f_{sec}$ . (C): Espectro dinâmico calculado ao longo de  $e_2 = 0.0359$  indicado sobre o mapa dinâmico pela reta horizontal pontilhada. O espectro cruza a região onde existem ressonâncias secundárias. As setas apontam a região onde existe uma comensurabilidade 4/1 entre as frequências secular e ressonante.

As ressonâncias secundárias (item 3) podem ser percebidas ao redor de  $e_2 \approx 0$ , em que ocorre a transição do regime ressonante para o quase-ressonante, marcada pelas intercalações de órbitas periódicas e caóticas. A mais forte destas comensurabilidades é uma razão 4/1 entre  $f_{res}$  e  $f_{sec}$ , que pode ser visualizada no espectro dinâmico indicada pelas setas na Figura 5.10 *C* e apontada no mapa dinâmico (lado esquerdo da Figura 5.10).

Já as áreas de movimento regular dentro da separatriz (marcadas pelas cruces em negro), mostram um movimento com altas amplitudes de oscilação de  $\theta_1$  (e conseqüentemente de  $n_1/n_2$ ), e de pequenas amplitudes de oscilação de  $\Delta\varpi$ . Esta região é similar a estrutura à encontrada para uma ressonância 3/2 e 2/1 da dinâmica asteroidal (Michtchenko e Ferraz-Mello, 1995) e foi associada a uma ressonância secular.  $\theta_1$  apresenta um máximo em sua amplitude de oscilação em torno de  $180^\circ$  na área mais central desta região (em tons mais claros), enquanto  $\Delta\varpi$ , em oposição, possui uma amplitude mínima em torno do mesmo valor. A alta amplitude de  $\theta_1$  mostra que estas regiões estão ligadas ao redor da separatriz quadridimensional da ressonância.  $n_1/n_2$  oscila entre  $\sim 2.95 - 3.17$ , cortando o plano nestes valores limites.

Na Figura 5.12 plotamos a evolução temporal dos ângulos para uma condição inicial no interior desta zona (marcada no mapa dinâmico pela cruz negra no interior da separatriz da esquerda).  $\Delta\varpi$  e  $\theta_1$  oscilam em torno de  $180^\circ$  e os ângulos  $\varpi_i$  circulam progradamente. Na Figura 5.11 mostramos como as regiões no interior da separatriz estão ligadas ao redor da ressonância. Fazemos uma integração numérica para um sistema com condições iniciais dentro da separatriz, e plotamos como variam  $n_1/n_2$  em função de  $\theta_1$ , e observamos que "circula" ao redor da ressonância com uma grande amplitude de oscilação em torno de  $\theta_1 = 180^\circ$ , cruzando o plano  $\theta_1 = 180^\circ$  apenas no interior das separatrizes.

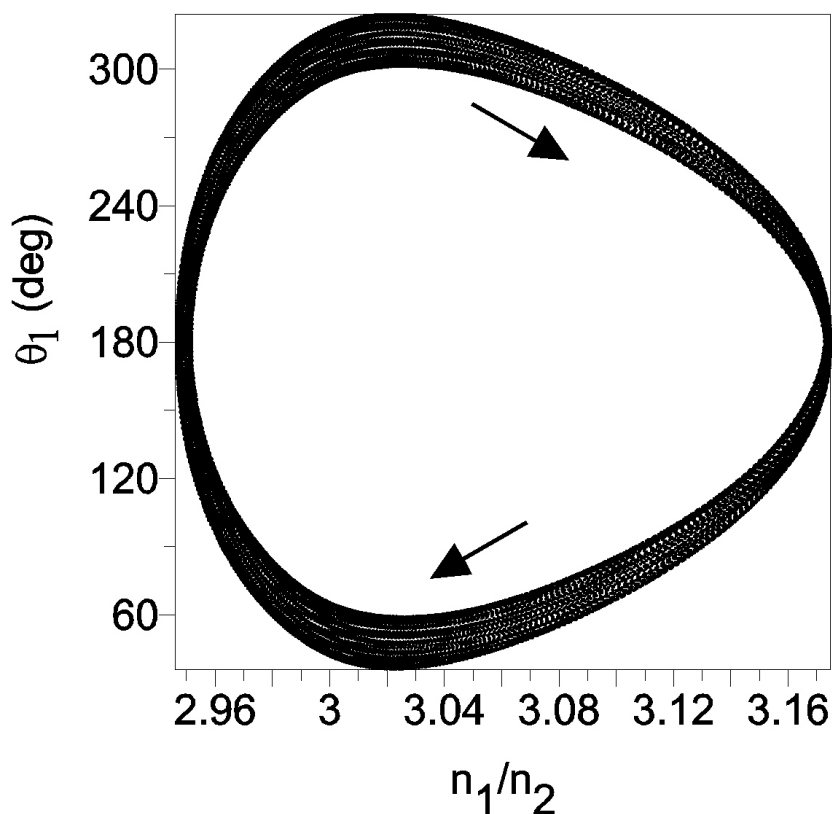


Figura 5.11: A figura mostra a evolução temporal de  $n_1/n_2$  no interior de separatriz da ressonância vista no mapa da Figura 5.10. Vemos que o sistema cruza o plano  $\theta_1 = 180^\circ$  apenas nos pontos correspondentes as regiões regulares no interior das separatrizes em  $n_1/n_2 = 2.95$  e  $n_1/n_2 = 3.17$ . As setas apontam a direção do movimento.

Além destas áreas, há o surgimento de um regime regular à esquerda da separatriz ressonante (item 5). Nesta região, próximo a separatriz, ocorre uma quase-ressonância interna, em que os ângulos  $\theta_i$  agora circulam progradamente com frequência ressonante.  $\Delta\varpi$  oscila ou circula retrogradamente de acordo com suas condições iniciais. Oscilando em torno de  $180(0)^\circ$  quando  $e_2 < 0(> 0)$ . Longe o suficiente da separatriz, o sistema passa a um movimento puramente secular.

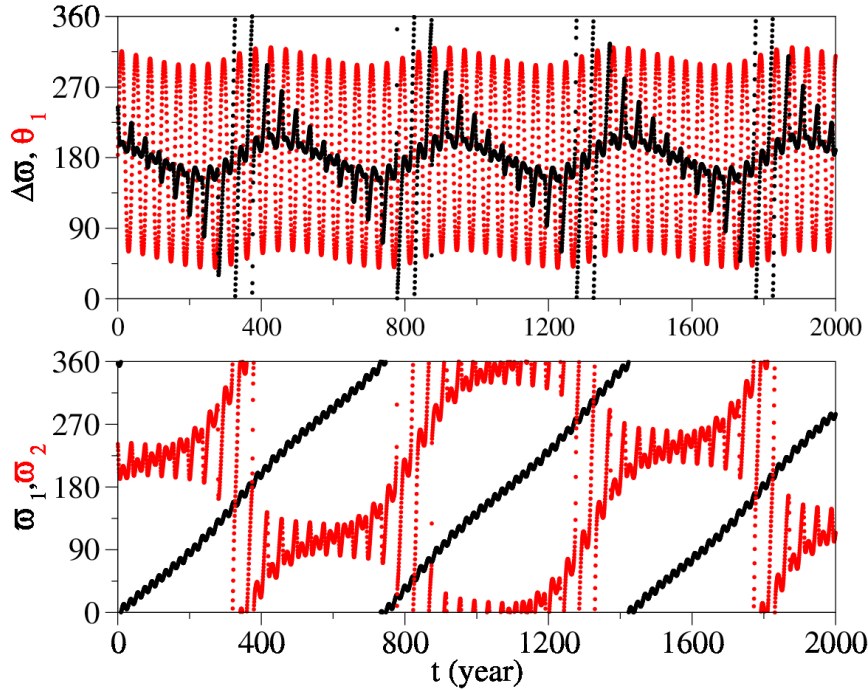


Figura 5.12: Evolução temporal dos ângulos obtida através de uma integração numérica. As condições iniciais utilizadas correspondem às coordenadas do ponto marcado pela cruz preta no interior da separatriz que se encontra em torno de  $n_1/n_2 \approx 2.95$  no mapa dinâmico na Figura 5.10. Neste ponto:  $(n_1/n_2, e_2) = (2.95, -0.0049)$ . (Topo): O gráfico mostra que o ângulo  $\Delta\varpi$  exhibe uma oscilação em torno de  $180^\circ$ . O ângulo  $\theta_1 = 2\sigma_1$  também oscila em torno deste valor com uma alta amplitude, enquanto  $\Delta\varpi$  apresenta uma oscilação de longo-período em torno de  $180^\circ$  com batimentos de grande amplitude de frequência ressonante. O sistema se encontra no interior de uma região de ressonância secular análoga às regiões de movimento regular que surgem no interior das separatrizes para o caso asteroidal Michtchenko e Ferraz-Mello (1995). (Inferior): Evolução temporal dos ângulos  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  em que ambos apresentam uma circulação progressiva.

Assim como no mapa da Figura 5.8, descrevemos como se comportam os ângulos principais do problema em todas as regiões de movimento regular. O resultado encontra-se na Figura 5.13. Vemos o aparecimento de um regime regular dentro da separatriz da ressonância. Sua estrutura circunda a ressonância, e por este motivo a direção em que  $\theta_1$  oscila/circula está associada às separatrizes da ressonância. Uma vez que ao redor de  $n_1/n_2 \approx 2.95$  a oscilação de  $\theta_1$  é crescente ao cruzar o plano e quando passa a intersectar o plano em  $n_1/n_2 \approx 3.17$ , seu valor é decrescente.

Vemos também o aparecimento do regime quase-ressonante interno onde os ângulos críticos circulam progradamente. Nas outras áreas, o comportamento dos ângulos é similar ao do mapa para baixas excentricidades de ACR, conforme visto na Figura 5.8.





encontram-se próximos a duas destas comensurabilidades.

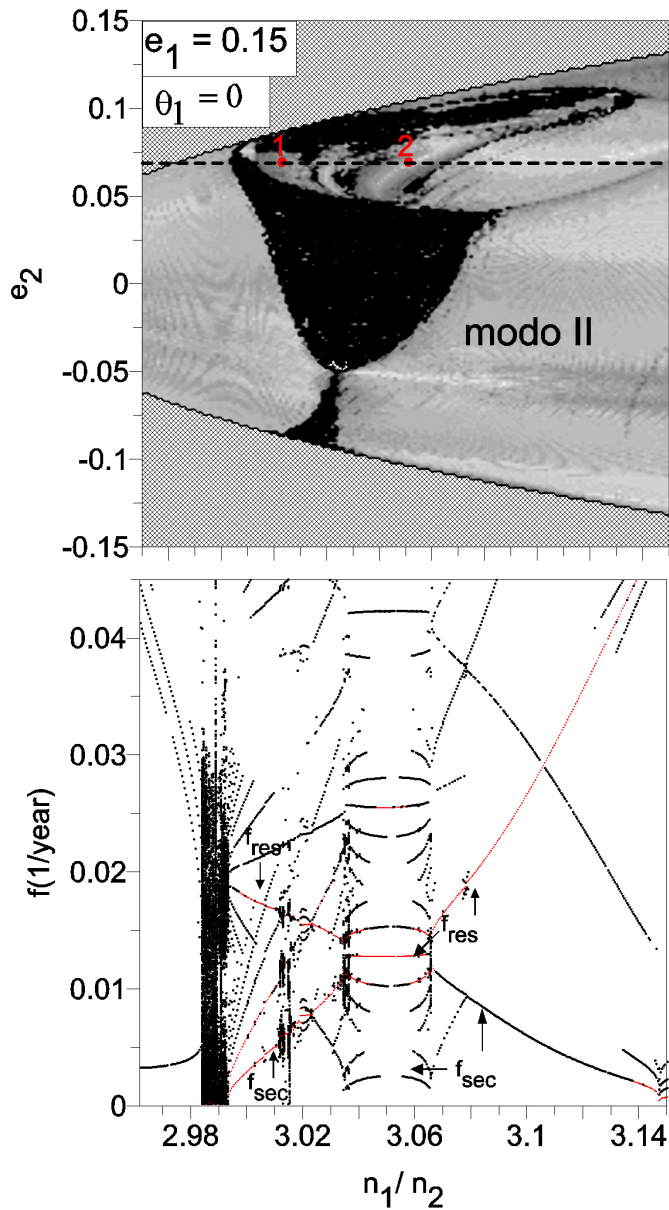


Figura 5.14: (Topo): Mapa dinâmico calculado para momento angular com  $e_1 = 0.15$  e  $\theta_1 = 0$ . As regiões dinâmicas para  $\theta_1 = 0$  mostram várias regiões de movimento regular entre as regiões de caos que estão relacionadas com as comensurabilidades entre as frequências secular e ressonante. A linha pontilhada negra marca a curva sobre a qual realizamos a análise espectral, feita sobre  $e_2 = 0.068$ . Os pontos 1 e 2 marcam duas regiões de comensurabilidades diferentes. (Inferior): Análise espectral dinâmica realizada ao longo de  $e_2 = 0.068$ . Calculamos o espectro dinâmico sobre a evolução temporal das excentricidades e razão de movimentos médios. A curva vermelha marca as frequências de maior amplitude, relacionadas com  $f_{res}$  e  $f_{sec}$ , que são indicadas sobre o gráfico. Observamos as várias comensurabilidades entre as frequências principalmente na região em  $3 < n_1/n_2 < 3.04$ .

Na Figura 5.15 plotamos as evoluções temporais dos ângulos  $\Delta\varpi$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  para condições iniciais calculadas a partir das coordenadas dos pontos 1 (Coluna A) e 2 (Coluna B) sobre

o mapa dinâmico da Figura 5.14. Observamos que os comportamentos dos ângulos são os mesmos da região de quase-ressonância, ocorrendo uma comensurabilidade entre  $f_{sec}$  e  $f_{res}$  nas áreas intercaladas por regimes de movimentos caóticos.

No painel A da Figura 5.15 plotamos as evoluções temporais dos ângulos para o ponto 1. Vemos que  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $0^\circ$  e  $\theta_1$  circula retrogradamente com período da interação secular. No tempo em que  $\Delta\varpi$  realiza uma oscilação em torno de  $0^\circ$ ,  $\theta_1$  completa uma circulação e  $\theta_2$  oscila cinco vezes em torno de  $0^\circ$ . Toda vez que isto ocorre,  $\theta_2$  circula por um período ressonante devido à alta amplitude de sua componente secular ( $f_{res} \approx 5f_{sec}$ ).

No painel B da Figura, mostramos as evoluções temporais dos ângulos agora para o ponto 2. O ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de zero com alta amplitude devido à sua componente ressonante e  $\theta_1$  circula retrogradamente com a mesma frequência. A circulação de  $\theta_1$  e  $\theta_2$  ocorre com um batimento com o dobro de sua própria frequência. A comensurabilidade entre  $f_{res}$  e  $f_{sec}$  ocorre com uma razão próxima a  $4/1$ .

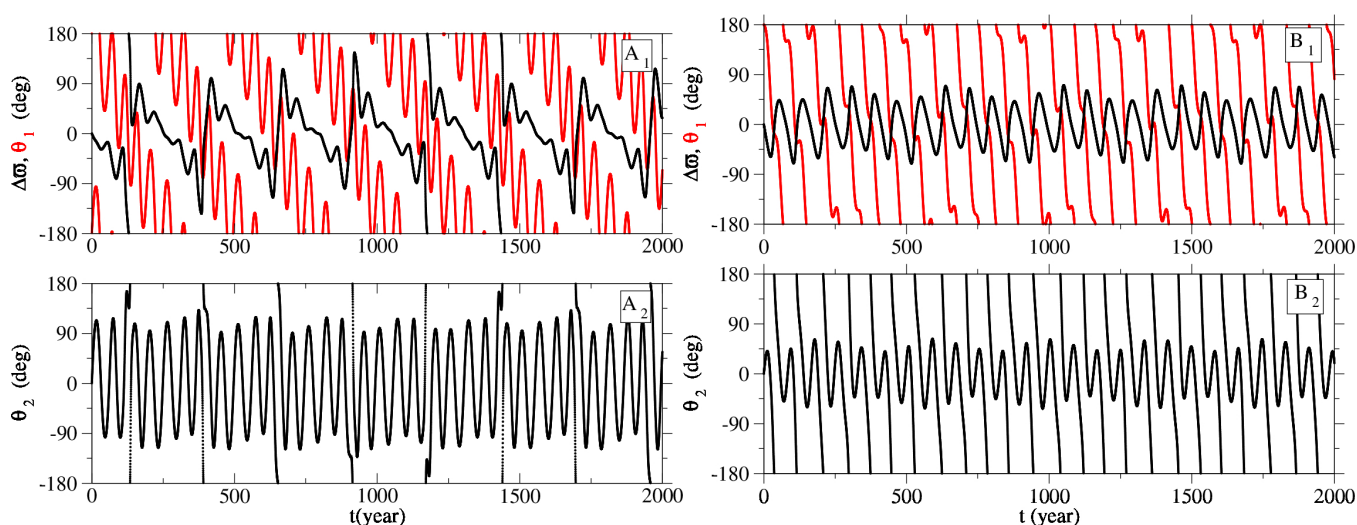


Figura 5.15: Evolução temporal dos ângulos obtida através de uma integração numérica. As condições iniciais utilizadas são calculadas a partir das coordenadas do ponto 1 e 2 localizados sobre o mapa dinâmico na Figura 5.14. (Coluna A): Ponto 1 ( $(n_1/n_2, e_2) = (3.002, 0.068)$ ). O gráfico mostra que o ângulo  $\Delta\varpi$  exibe uma oscilação em torno de  $0^\circ$  com período de  $T_{\Delta\varpi} \approx 272$  anos e uma comensurabilidade com relação a frequências ressonante em torno de  $f_{res} \approx 0.0179 \text{ ano}^{-1}$ , que dá um período de cerca de  $T_{res} \approx 55$  anos, uma comensurabilidade de razão 5. O ângulo  $\theta_1$  circula com frequência  $f_{\Delta\varpi}$ , mas com oscilações da ordem de  $f_{res}$ . O ângulo  $\theta_2$  oscila com frequência de  $f_{res}$  circulando a cada 5 períodos uma vez, devido à comensurabilidade. (Coluna B): Ponto 2 ( $(n_1/n_2, e_2) = (3.050, 0.068)$ ). O gráfico mostra que o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de zero com período  $T_{\Delta\varpi} = 83$  anos com alta amplitude devido à sua componente ressonante, uma vez que para estas condições iniciais a amplitude de  $\Delta\varpi$  é mínima. Os ângulos  $\theta_i$  circulam, ocorrendo um batimento com o dobro de sua frequência.

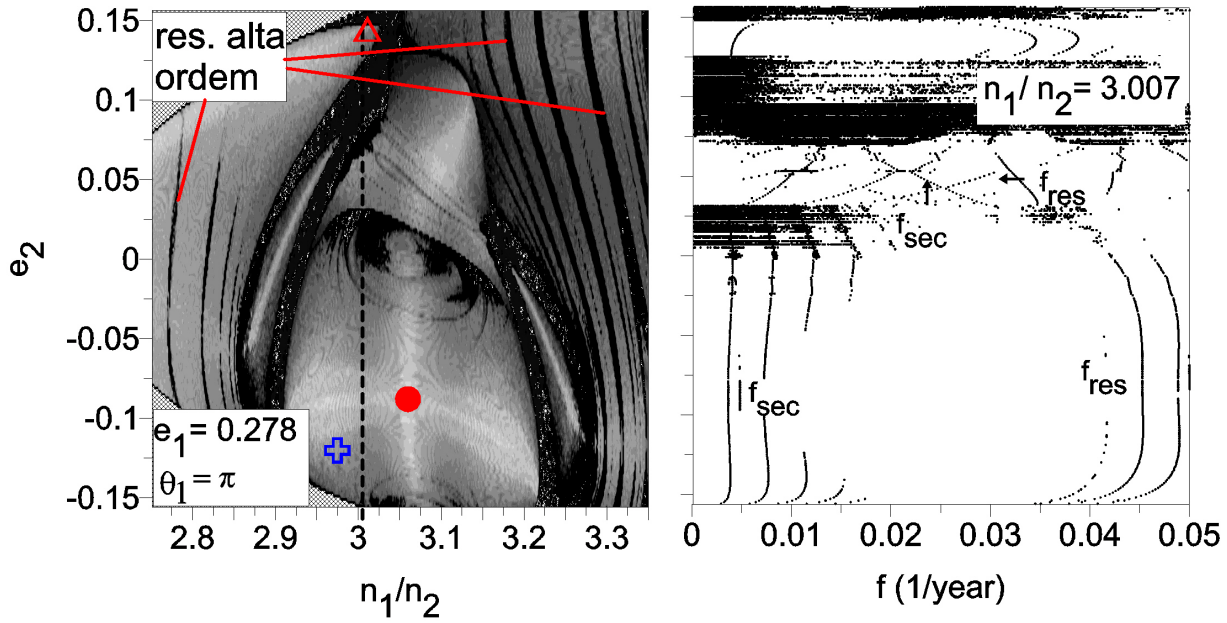


Figura 5.16: (Lado Esquerdo) Mapa dinâmico calculado para momento angular com  $e_1 = 0.278$  do sistema HD60532 b-c e com  $\theta_1 = \pi$ . O círculo vermelho marca a posição do ACR. A cruz vermelha marca a região de quase-ressonância interna onde  $\theta_i$  passam a circular progradamente. A cruz azul corresponde à posição dos elementos orbitais osculadores do sistema HD60532 b-c. (Lado direito): Espectro dinâmico calculado ao longo de  $n_1/n_2 = 3.007$  indicado sobre o mapa dinâmico na esquerda pela reta vertical pontilhada. A análise espectral foi calculada sobre a evolução temporal das excentricidades e razão de movimentos médios. As setas indicam quais são as frequências principais do problema.

### 5.6 Mapa dinâmico de ACR de alta excentricidade e $\theta_1 = \pi$ fixo

Finalmente, para representar os sistemas com altas excentricidades de ACR, escolhemos o momento angular do sistema HD60532 b-c ( $e_1 = 0.278$ ) com  $\theta_1 = \pi$  fixo.

Plotamos na Figura 5.16 o mapa e espectro de potência dinâmico calculado ao longo da reta  $n_1/n_2 = 3.007$ , que corresponde ao valor da razão de movimentos médios osculadora do sistema HD60532 b-c. No mapa dinâmico a reta negra pontilhada é a curva ao longo da qual o espectro é feito. O círculo vermelho marca posição do ACR no interior da ressonância, a cruz em azul corresponde à localização dos elementos osculadores do sistema HD60532 b-c e o triângulo em vermelho às coordenadas das condições iniciais da série temporal da Figura 5.17.

O espectro de potência dinâmico no lado direito da Figura 5.16 exhibe o mesmo comportamento das frequências que para excentricidades moderadas de ACR (Figura 5.10), com a região de ressonâncias secundárias localizadas no intervalo  $0 < e_2 < 0.075$ . Neste mesmo espectro, as setas indicam as frequências secular e ressonante nos regimes ressonante e

quase-ressonante externo. Domínios caóticos também são mais frequentes em torno desta região como podemos ver através do mapa e do espectro de potência dinâmico.

A região onde o triângulo vermelho localiza-se também é encontrada no mapa dinâmico para excentricidades moderadas e próximo o suficiente da separatriz corresponde a uma quase-ressonância interna. Na Figura 5.17 plotamos as evoluções temporais dos ângulos, tendo como condições iniciais as coordenadas da cruz vermelha. Constatamos que comportamento de  $\Delta\varpi$  e  $\varpi_i$  são os mesmos; Aquele oscila em torno de  $0^\circ$  enquanto estes circulam progradamente, devido à mudança de direção de  $\theta_1$  que a separatriz da ressonância provoca. Notamos também que nesta área  $\varpi_1$  tem uma maior amplitude do que  $\varpi_2$ .

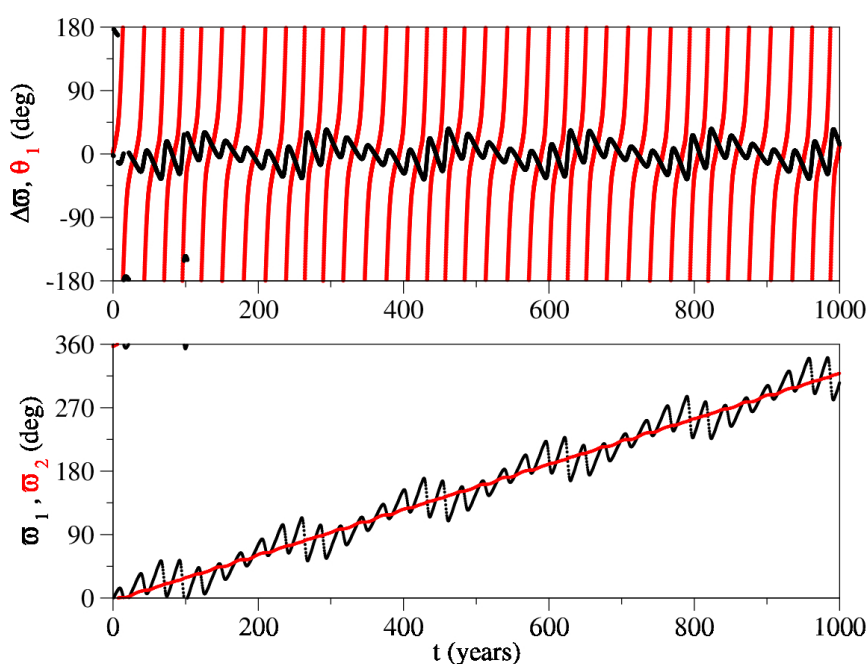


Figura 5.17: Evolução temporal dos ângulos obtida através de uma integração numérica. As condições iniciais utilizadas são calculadas a partir das coordenadas da cruz vermelha localizada sobre o mapa dinâmico na Figura 5.16. Neste ponto:  $(n_1/n_2, e_2) = (3.007, 0.14)$ . (Topo): O gráfico mostra que o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $0^\circ$  e  $\theta_1$  circula progradamente, que a classifica como uma quase-ressonância interna. (Inferior): Ambos ângulos  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  apresentam o mesmo comportamento de circulação prógrada com longo período.

Percebemos que surgem regiões de movimento caóticos associadas com altas ordens de MMR. Elas podem ser identificadas pelas curvas verticais negras em torno de determinados valores de razão de movimento médios do lado externo da  $3/1$  MMR.

As outras estruturas observadas no mapa dinâmico são praticamente as mesmas vistas para valores moderados de excentricidade. As regiões caóticas são mais espessas, a largura da ressonância é maior e o desvio do ACR da ressonância nominal é menor.

O crescente aumento dos regimes caóticos para momentos angulares menores é a razão pela qual os sistemas exoplanetários devem migrar a partir de órbitas quase-circulares. Numa configuração quase-circular, com alto momento angular, as separatrizes em torno da ressonância não existem e o espaço de fase das configurações é mais regular. À medida que diminui-se o momento angular e as excentricidades dos planetas crescem, as regiões caóticas crescem e as separatrizes em torno da ressonância se desenvolvem. Neste caso, o caos em torno da ressonância é espesso o suficiente para não permitir uma passagem através da mesma e uma consequente captura em seu interior. Além disso, as regiões regulares dentro da separatriz parecem sugerir um caminho natural ao redor da 3/1 MMR se consideramos um sistema evoluindo sobre o Modo II de movimento.

O par HD60532 b-c encontra-se no interior da 3/1 MMR como podemos perceber pela posição da cruz azul que representa seus elementos osculadores, o que confere com todas as outras análises realizadas ao longo deste trabalho. Se integramos as equações exatas de movimento utilizando esta configuração, notamos que o mesmo libra em torno do ACR para seu valor de momento angular. Na Figura 5.18 mostramos a evolução temporal dos ângulos  $\theta_1$  e  $\Delta\varpi$  utilizando os dados da tabela 2.3. Enquanto as excentricidades variam entre  $e_1 \sim 0.1 - 0.33$  e  $e_2 \sim 0.0 - 0.15$ ,  $\theta_1$  apresenta uma amplitude de oscilação em torno de  $150^\circ$  e  $\Delta\varpi$  de  $80^\circ$ . Dada a proximidade com a família  $\theta_1$ , a alta amplitude de oscilação está relacionada primariamente com a frequência secular.



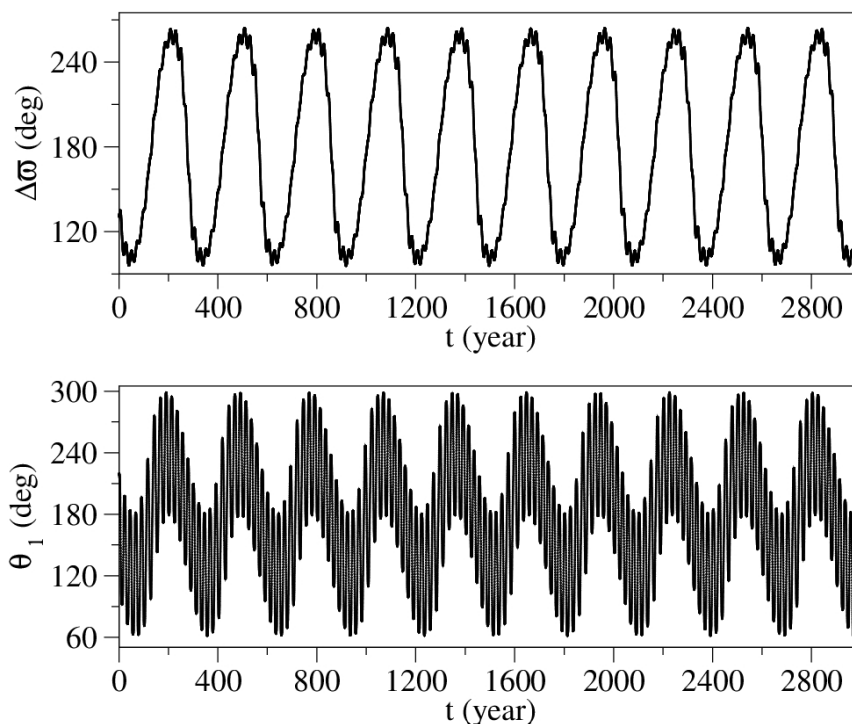


Figura 5.18: Evolução temporal dos ângulos obtida através de uma integração numérica. As condições iniciais utilizadas são calculadas a partir dos dados de Laskar e Correia (2009) na Tabela 2.3.(Topo): O gráfico mostra que o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $180^\circ$  com amplitude em torno de  $80^\circ$ . (Inferior):  $\theta_1$  oscila com grande amplitude em torno de  $180^\circ$ .

### 5.7 Mapa dinâmico com ACR de alta excentricidade e $\theta_1 = 0$ fixo

Para altos valores de excentricidade e  $\theta_1 = 0$ , utilizamos como exemplo o mapa dinâmico com momento angular calculado com  $e_1 = 0.30$ , que se encontra do lado esquerdo da Figura 5.19. Escolhemos este valor de momento angular ao invés do AM do HD60532 b-c, porque para  $e_1 = 0.30$  as ressonâncias de alta ordem aparecem mais desenvolvidas sobre o mapa. Do lado direito da mesma figura plotamos o espectro dinâmico calculado sobre a linha  $n_1/n_2 = 3.11$  identificada pela reta vertical pontilhada vermelha.

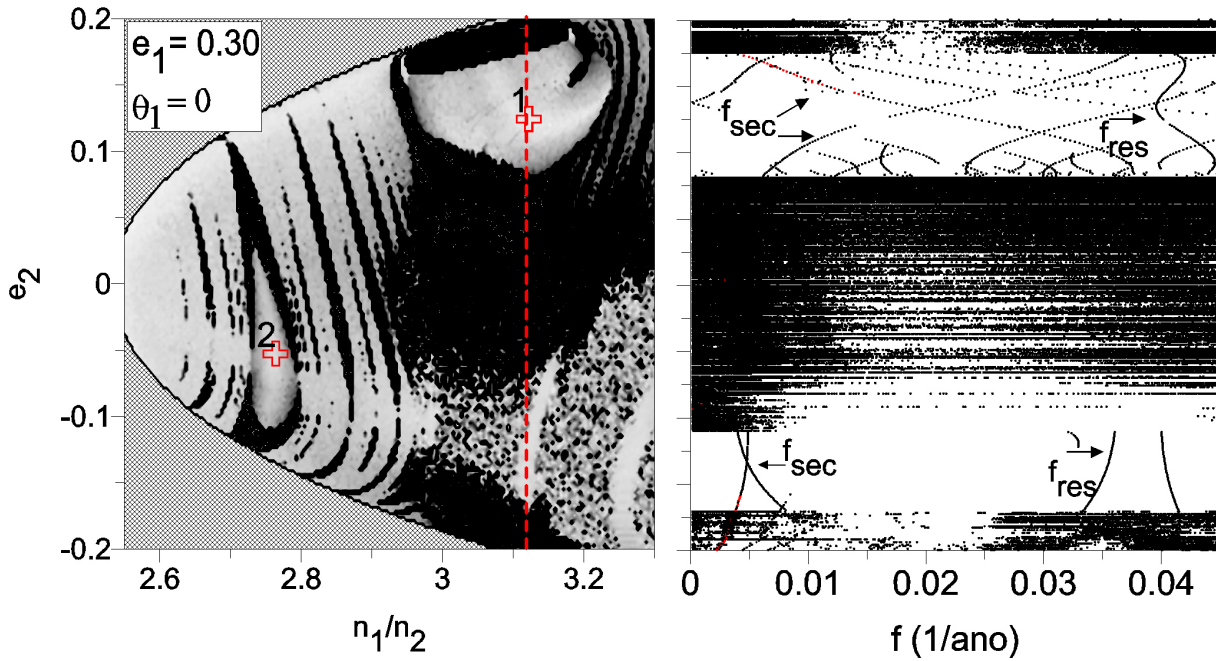


Figura 5.19: (Lado Esquerdo) Mapa dinâmico calculado para momento angular com  $e_1 = 0.30$  e com  $\theta_1 = \pi$ . O ponto 1 marca a região em que ocorre uma ressonância secundária 4/1 entre a frequência secular e ressonante, e onde  $\Delta\varpi$  tem amplitude mínima. O ponto 2 marca a posição da ressonância de movimentos médios 11/4 que aparece nos arredores da região ressonante 3/1. (Lado direito): Espectro dinâmico calculado ao longo de  $n_1/n_2 = 3.11$  indicado sobre o mapa dinâmico na esquerda pela reta vertical vermelha pontilhada. A análise espectral foi calculada sobre a evolução temporal das excentricidades e razão de movimentos médios. A frequência secular e ressonante, nas regiões de movimento regular, estão identificadas através de setas. No ramo positivo da excentricidade notamos que a frequência secular cresce até entrar em comensurabilidade 4/1 com a frequência ressonante. Quando esta comensurabilidade é alcançada a frequência secular cai e a frequência ressonante cresce para maiores valores de excentricidade.

O mapa dinâmico para  $\theta_1 = 0$  em comparação ao mapa para excentricidades moderadas mostra que as regiões regulares estão mais envoltas a caos. O grande número de ressonâncias secundárias que havia para excentricidades moderadas de ACR alternadas por zonas caóticas, agora se reduzem a comensurabilidade 2/1 entre  $f_{sec}$  e  $f_{res}$ , sem a presença de áreas de movimentos caóticos entre as diferentes razões de comensurabilidades. Na área onde localiza-se o ponto 1,  $\Delta\varpi$  oscila em torno de  $0^\circ$ , atingindo um mínimo de amplitude neste ponto, enquanto os ângulos críticos circulam com frequência  $f_{res}$ .

Notamos também que as zonas caóticas crescem em torno das ressonâncias de movimento médio de alta ordem, e podem ser identificadas sobre o mapa dinâmico pelas curvas negras em torno de determinados valores de razão de movimentos médios. Em especial, a de maior destaque e força nesta região é a 11/4 MMR, em que uma região de movimento regular aparece confinada entre duas separatrizes. O ponto 2 marcado encontra-se no inte-



rior desta região. Os ângulos ressonantes para a 11/4 MMR foram calculados e integramos as equações de movimento usando condições iniciais no interior desta ressonância e observamos que todos os ângulos críticos para esta comensurabilidade estão oscilando em torno de  $180^\circ$  ou  $0^\circ$ .

## 5.8 Discussão sobre o capítulo

Ao longo deste capítulo observamos a dinâmica em torno do ACR para uma 3/1 MMR. Destacamos três valores de momento angular representativos da evolução da dinâmica ao redor da  $(\pi, \pi)$ -ACR estável. Observamos as diferenças entre os diferentes regimes dinâmicos e como os ângulos se comportam, identificando as regiões de ressonância secundária, secular e os regimes quase-ressonantes observados ao redor da região ressonante. Todo o capítulo foi realizado considerando os parâmetros físicos do sistema HD60532 b-c, que tem razão de massas  $m_2/m_1 > 1$ . Notamos que para baixas excentricidades de ACR (Figuras 5.2 e 5.9) existem além da região ressonante, um regime quase-ressonante e outro de ressonância secular.

Para moderados valores de excentricidade de ACR (Figuras 5.10 e 5.14) vemos que há um aumento das áreas de movimento caótico. A área de quase-ressonância interna surge, e a ressonância secular no plano  $\Delta\varpi = 0$  não é mais detectada. Surgem, porém, no interior das separatrizes da ressonância, um regime de movimento regular que engloba a ressonância onde ocorrem altas amplitudes de oscilação de  $\theta_1$  e baixas de  $\Delta\varpi$ . Adicionalmente, vimos o desenvolvimento para baixas excentricidades de ressonâncias secundárias.

Em relação ao sistema HD60532 b-c e altas excentricidades de ACR (5.16 e 5.19), notamos que ao redor da 3/1 MMR surgem regimes caóticos relacionados a ressonâncias de altas ordens. Localizamos o local onde o sistema HD60532 b-c se encontra no plano, confirmando seu movimento no interior da ressonância.

No próximo capítulo faremos a comparação para um sistema com  $m_2/m_1 < 1$ . Dessa forma, teremos um panorama geral da dinâmica em torno do ACR tanto para razões de massas maior como menor do que um. O estudo foi focado em torno das soluções  $(\pi, \pi)$ -ACR estáveis. Em um futuro trabalho, pretendemos analisar os mapas dinâmicos para as  $(\pi, \pi)$ -ACR instáveis e as soluções estacionárias assimétricas. Deste modo, esperamos complementar o estudo em torno de todas as famílias de ACR.



## Considerações sobre a dependência das massas dos planetas

Nos capítulos anteriores aplicamos nossos métodos e análises usando os parâmetros físicos do sistema HD60532 b-c. Este par de planetas, além de possuir grande valor de massas individuais, tem  $m_2/m_1 = 2.36$  e portanto, maior do que 1. Verificamos neste capítulo se as estruturas observadas em torno da 3/1 MMR no capítulo anterior para o sistema HD60532 b-c ocorrem devido à sua razão de massas e grandes valores de massas individuais.

O objetivo deste capítulo, portanto, é fazer uma breve análise para casos em que temos razões de massa diferentes ( $m_2/m_1 = 1$  e  $0.2$ ), assim como para massas individuais pequenas ( $m_{1,2}/10$ ). Dessa forma, teremos uma visão mais abrangente da dinâmica em torno da 3/1 MMR em função de  $AM$  e  $m_2/m_1$ .

Utilizamos para exemplificar o mapa com  $m_2/m_1 < 1$ , os dados do sistema 55 Cnc b-c obtidos de Nelson et al. (2014) cujos dados podem ser retirados da Tabela 2.1.

### 6.1 Análise sobre a dependência das massas individuais

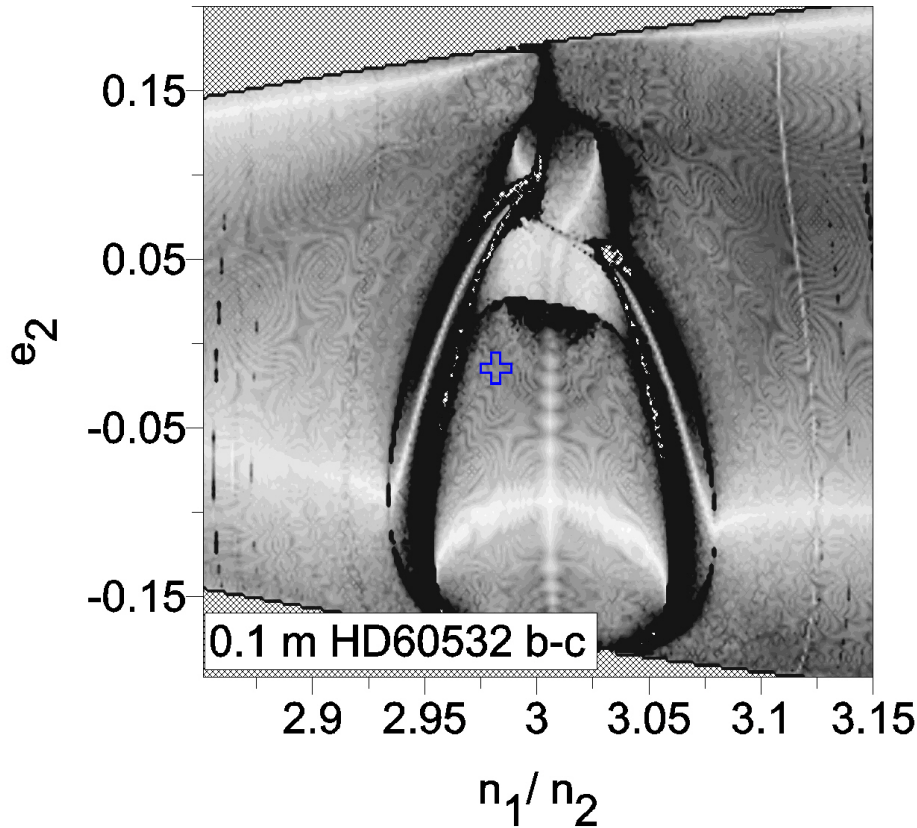


Figura 6.1: Mapa dinâmico calculado para o momento angular determinado pelos elementos orbitais do sistema HD60532 b-c, com massas  $m_1 = 0.3M_J$  e  $m_2 = 0.7M_J$ , possuindo valores 10 vezes menores que seus valores reais. A cruz azul representa a posição do sistema HD60532 b-c com sua configuração atual. Notamos que os regimes dinâmicos descritos para o sistema HD60532 b-c com seus parâmetros físicos verdadeiros (5.16) são também observados para esse caso com massas 10 vezes menores. O sistema HD60532 b-c com seus elementos orbitais verdadeiros e massas dez vezes menores, ainda estaria localizado no interior da zona ressonante.

Na Figura 6.1 mostramos o mapa dinâmico calculado para o sistema HD60532 b-c com massas  $m_1 = 0.3M_J$  e  $m_2 = 0.7M_J$  que correspondem a 1/10 do seu valor catalogado. Utilizamos, contudo, os mesmos valores das excentricidades ( $e_1 = 0.278$ ,  $e_2 = 0.038$ ) e semieixos dos planetas ( $a_1 = 0.7614$ ,  $a_2 = 1.5854$ ), de forma que mantemos sua posição ao longo da curva de soluções de ACR (círculo vermelho de maior valor de excentricidade na Figura 4.6).

Comparamos o mapa dinâmico na Figura 6.1 com o do sistema HD60532 b-c com suas massas catalogadas ( Figura 5.16) e notamos que ambos apresentam os mesmos regimes de movimento como analisado no capítulo anterior. A largura e tamanho da zona ressonante, assim como dos outros regimes dinâmicos que acompanham a ressonância 3/1 de movi-

mentos médios, são, como esperávamos, menores quanto menores as massas dos planetas e quanto maior o momento angular.

Concluimos também que os regimes de movimento regular que aparecem no interior das separatrizes da 3/1 MMR não são um produto das massas individuais do sistema, assim como as outras regiões, como a quase-ressonante externa e interna e a de ressonância secular. Esta última pode ser percebida no ramo em que  $\Delta\varpi = 0$  em torno de  $e_2 \approx 0.1$ .

## 6.2 Análise sobre a dependência da razão de massas dos planetas

Já para analisar a dependência da razão de massas dos planetas dos regimes dinâmicos ao redor da região ressonante, na Figura 6.2 mostramos dois mapas dinâmicos. No mapa (A) para  $m_2/m_1 = 1$ , utilizando os parâmetros físicos do sistema HD60532 b-c com a massa dos dois planetas iguais a do planeta HD60532-b. Em (B) para o sistema 55 Cnc b-c, utilizando os dados obtidos de Nelson et al. (2014). Neste último, o ponto marcado pela cruz azul corresponde a posição do sistema com seus elementos orbitais osculadores projetados sobre o mapa. Comparamos ambos mapas com o do sistema HD60532 b-c com  $m_2/m_1 = 2.36$  (Figura 5.16).

Notamos que as estruturas para o mapa dinâmico com  $m_2/m_1 = 1$  tem poucas diferenças em relação ao mapa com  $m_2/m_1 = 2.36$ . A separatriz que contorna a região de quase-ressonância externa no mapa da Figura 6.2 (A) tem um número espectral menor, e portanto, é menos caótica que para  $m_2/m_1 = 2.36$  da Figura 5.16.

Já para o mapa dinâmico do 55 Cnc b-c (Figura 6.2 B), a região de quase-ressonância e sua separatriz não aparecem claramente. Além disso, a família do Modo *I* de movimento ( $\Delta\varpi = 0$ ) do problema secular pode ser localizada no ramo em que  $e_2 > 0$  no mapa, caracterizado pela região mais clara, que segue desde os valores mais altos de razão de movimento até a separatriz da ressonância em torno de  $e_2 \approx 0$ .

Supomos que a separatriz no ramo positivo da excentricidade que circunda a região de quase-ressonância de sistemas com  $m_2/m_1 > 1$  (Figura 5.16, por exemplo) evita que o Modo *I* de movimento alcance a separatriz da ressonância a partir de uma evolução sobre o domínio secular. Isto indica que para um sistema com  $m_2/m_1 < 1$  devemos considerar a possibilidade captura de um sistema planetário no interior de uma 3/1 MMR através da evolução do mesmo sobre o Modo *I* de movimento ao haver o encontro com a família  $\theta_1$ .

Esta suposição concorda com a migração convergente de sistemas planetários através do Modo *I* ou *II* do problema secular explorado por Michtchenko e Rodríguez (2011) que diz que para sistemas planetários com  $m_2/m_1 < 1$  a migração sobre o Modo *I* do problema secular é convergente para uma ressonância de 2ª ordem. Mais estudos são necessários para verificar esta possibilidade. Uma das alternativas neste sentido pode ser o estudo de simulação de migração nos moldes realizados no Capítulo 2.

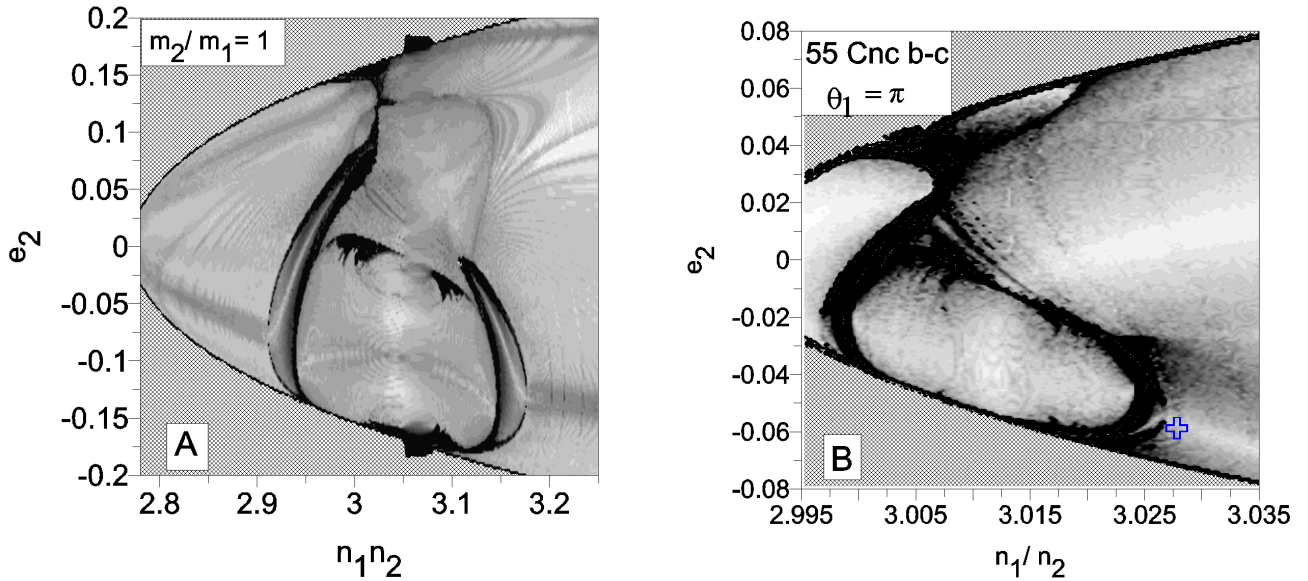


Figura 6.2: (A): Mapa dinâmico calculado para razão de massas  $m_2/m_1 = 1$ . Notamos que as estruturas ao redor da ressonância são as mesmas. A separatriz que envolvia a região de ressonâncias secundárias é menos caótica que para razões de massa maior que 1. (B): Mapa dinâmico para o sistema 55 Cnc b-c utilizando os elementos orbitais e parâmetros físicos retirados de Nelson et al. (2014). A posição do sistema real está identificado pela cruz azul. O sistema encontra-se fora da região ressonante e apresenta um movimento puramente secular. A diferença dos regimes dinâmicos para sistemas com  $m_2/m_1 > 1$  aparece com o deslocamento da região de ressonância secundária para altos valores de excentricidade, não havendo uma separatriz que impeça a captura de um sistema com razão de massas menor do que 1 através do modo *I* de movimento do problema secular.

### 6.3 Mapas dinâmicos para sistemas planetários detectados

Fizemos também os mapas dinâmicos para outros sistemas exoplanetários com razão de períodos orbitais próximos a 3. Os dados destes sistemas encontram-se na tabela 2.1, dentre os quais escolhemos HD20781 b-c, GJ 163 b-c e HD10180 d-e. A razão de massas de cada par desses sistemas é, respectivamente 1.31, 0.68 e 2.12 e consideramos seus elementos osculadores. Os mapas dinâmicos foram calculados para  $\theta_1 = \pi$  e para  $e_2 > 0$  ( $< 0$ ) temos  $\Delta\varpi = 0$  ( $\pi$ ), pois queremos analisar se um sistema encontra-se no interior da 3/1 MMR

que ocorre no plano  $(\pi, \pi)$ -ACR.

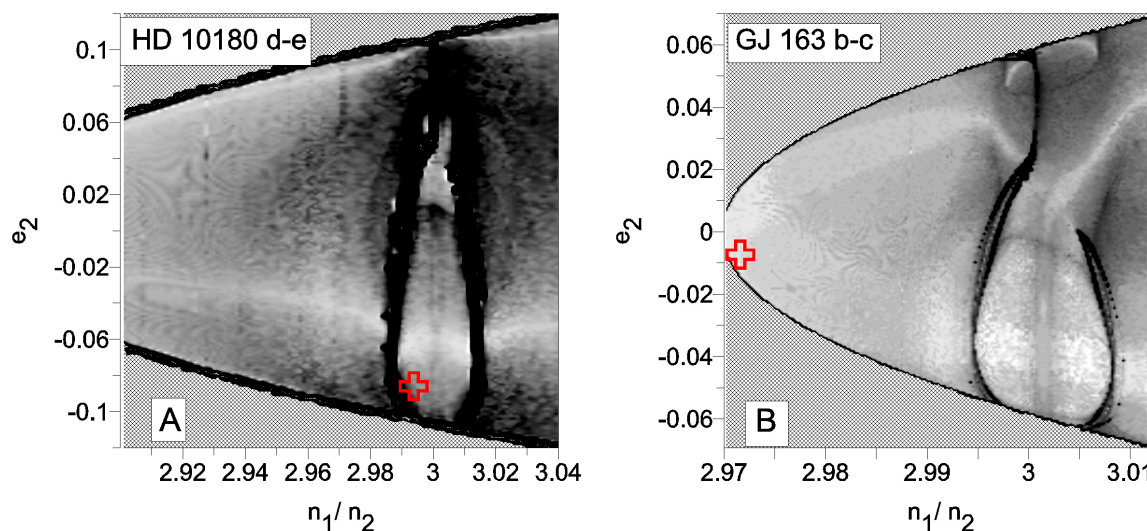


Figura 6.3: Mapas dinâmicos calculados para os dados dos sistemas exoplanetários HD10180 b-c e GJ 163 b-c. A cruz sobre os mapas dinâmicos corresponde a localização do sistema real ao cortar o plano. Os dados foram retirados dos artigos citados na Tabela 2.2.

O mapa realizado para o sistema HD 10180 d-e (Figura 6.3 (A)) coloca o mesmo no interior da ressonância. Porém, como discutido no Capítulo 2, o sistema possui outros planetas próximos e uma análise através do problema de três corpos não deve ser o mais adequado devido à forte perturbação dos outros corpos. Além disso, a análise dinâmica realizada por Lovis et al. (2011) indicou que estes planetas não estão em uma 3/1 MMR, o que acrescenta à importância da presença dos outros corpos em sua dinâmica. Deixamos-os portanto, para um trabalho futuro em que consideramos as suas condições.

Finalmente, o sistema GJ163 b-c (Figura 6.3 B) encontra-se em um movimento puramente secular, e sua posição no mapa dinâmico concorda com Bonfils et al. (2013). O sistema encontra-se distante da ressonância, oscilando em torno do Modo *II* de movimento com  $n_1/n_2 \approx 2.97$ .

Entre os sistemas exoplanetários, então, apenas o HD 60532 b-c encontra-se no interior de uma 3/1 MMR. Apesar disso, 55 Cnc b-c parece bastante próximo à ressonância, configurando-se em um regime de quase-ressonância, enquanto GJ 163 b-c permanece em um regime puramente secular, o único com  $n_1/n_2 < 3.0$  dentre os sistemas analisados. O uso do mapa dinâmico, portanto, nos permite ter uma ideia da dinâmica destes corpos de maneira geral, uma vez conhecendo os diferentes regimes de movimento e como se apresentam sobre o espaço de fase ou planos representativos.

Uma vez que estudamos principalmente o sistema HD60532 b-c e temos uma ideia dos regimes que ocorrem ao redor da 3/1 MMR para  $m_2/m_1 > 1$  e  $m_2/m_1 < 1$ , organizamos no capítulo seguinte os resultados obtidos neste trabalho e quais os próximos passos e perspectivas que este trabalho nos oferece.



## Conclusões

### 7.1 *Resumo dos Resultados*

Ao longo desta tese apresentamos uma análise detalhada da estrutura da dinâmica da 3/1 MMR. Através de uma pesquisa extensa dos sistemas de exoplanetas detectados, identificamos os que se encontram nesta configuração e escolhemos HD60532 b-c para aplicar os métodos desenvolvidos neste trabalho. O problema foi estudado em função dos três parâmetros globais  $K$ ,  $AM$  e  $m_2/m_1$ .

#### 7.1.1 *Sistemas de exoplanetas próximos a 3/1 MMR*

A pesquisa dos exoplanetas divulgados na literatura mostrou que entre os sistemas com seus elementos bem determinados e com razão de períodos orbitais próximas a 3 (conforme a Tabela 2.1), apenas o sistema HD60532 b-c encontra-se confirmado no interior de uma 3/1 MMR. Vimos que estudos anteriores não foram capazes de formar o sistema HD 60532 b-c em suas condições atuais através de simulações de migração, provavelmente por suposições errôneas ou incompletas. Conseguimos neste trabalho, através de um “toy model” de uma simulação de migração adiabática dos planetas sob uma força de Stokes aplicada ao planeta externo (representando a interação gravitacional entre o planeta externo e a nuvem de gás exterior à sua órbita) mostrar que o sistema HD60532 b-c pode ser capturado no interior da 3/1 MMR, oscilando em torno dos valores médios catalogados.

#### 7.1.2 *Determinação do ângulo crítico*

Vimos que o movimento ressonante para o sistema HD60532 b-c está associado ao ângulo  $\theta_1 = 3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_1$ . enquanto o ângulo  $\Delta\varpi$  oscila/circula. Para determinação do

ângulo ressonante comparamos os módulos dos coeficientes de Laplace de uma expansão da função perturbadora. Havendo desenvolvido o Hamiltoniano nesta expansão, este método nos deu indicações de que a razão de massas dos planetas é o principal fator para caracterizar um sistema em uma ressonância interna ou externa a partir da definição do seu ângulo crítico.

Mostramos que para uma 3/1 MMR, se  $m_2/m_1 < 1.5$ ,  $\theta_2 = 3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_2$  deve ser o ângulo crítico, e  $\theta_1 = 3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_1$  quando  $m_2/m_1 > 1.5$ . Quando  $m_2/m_1$  encontra-se em torno de 1.5, a determinação através do métodos é inconclusiva.

### 7.1.3 Topologia da 3/1 MMR

O método semi-analítico (Michtchenko et al., 2006) mostrou-se uma ferramenta bastante útil no estudo da topologia da 3/1 MMR. Além de ser um método simples e rápido com relação a outras ferramentas. Através dele fomos capazes de identificar as principais estruturas da 3/1 MMR, e em conjunto com o método geométrico (Michtchenko et al., 2006) obter as soluções estacionárias simétricas do problema sob a aproximação  $n_1/n_2 = 3$ . Refinamos os resultados do método geométrico adicionando um grau de liberdade no sistema através de um algoritmo de minimização de funções (Press et al., 1992), e determinamos suas estabilidades.

A partir da bifurcação das  $(\pi, \pi)$ -ACR instáveis detectamos as soluções estacionárias assimétricas em função das razões de massas e momento angular, reproduzindo os resultados obtidos por Michtchenko et al. (2006); Voyatzis e Hadjidemetriou (2006). Vimos que a posição da ACR depende unicamente das pelos parâmetros livres do problema.

Verificamos também a Lei das Estruturas (Ferraz-Mello, 1988), mostrando que o desvio das ressonâncias nominais é maior para massas individuais maiores e excentricidades menores.

### 7.1.4 Dinâmica em torno da ressonância

A partir das soluções estacionárias simétricas, concluímos que a família  $(\pi, \pi)$ -ACR corresponde às soluções de baixas e moderadas excentricidades do espaço de fase, enquanto as  $(0, \pi)$ -ACR localizam-se além da curva de colisão, e portanto a  $(\pi, \pi)$ -ACR é mais provável para abrigar exoplanetas, razão pela qual investigamos a dinâmica ao seu redor.

A topologia da ressonância mostrou uma forte influência do momento angular. Para

caracterizar as estruturas detectadas, classificamos os valores de momento angular em função da excentricidades do ACR em três categorias: baixa excentricidade, moderada excentricidade e alta excentricidade do ACR. Os seguintes regimes de movimento foram identificados:

- *Domínios de quase-ressonância:* onde o sistema possui influência da ressonância, mas o ângulo ressonante não libra e sim circula. Este regime acompanha a ressonância para todos os valores de momento angular possíveis. Para baixas excentricidades de ACR detectamos apenas os domínios de uma quase-ressonância externa, em que os ângulos críticos circulam retrogradamente, enquanto  $\Delta\varpi$  circula progradamente. Dentro desta região, vemos que a frequência secular do problema decresce quanto maior a excentricidade dos planetas, de modo oposto à frequência ressonante que tende a crescer.

Para moderadas e altas excentricidade de ACR (menor momento angular), vemos o aparecimento e crescimento de uma região de quase-ressonância interna, onde o ângulo ressonante circula progradamente. Neste domínio o sistema ainda possui forte influência da interação ressonante e a separatriz que a isola do movimento puramente secular é responsável pela mudança de direção de oscilação de  $\Delta\varpi$ .

- *Ressonâncias secundárias:* que ocorrem quando há uma comensurabilidade entre as frequências  $f_{res}$  e  $f_{sec}$  em torno das regiões de órbitas quase-circulares. Vimos que para baixas excentricidades de ACR, essas ressonâncias são bastante fracas, devido à distância no espaço de frequências entre  $f_{res}$  e  $f_{sec}$ . Para moderadas e altas excentricidades de ACR estas ressonâncias geram camadas caóticas que formam uma complexa estrutura entre a ACR e a borda do domínio ressonante.
- *Ressonâncias seculares:*

*Para baixas excentricidades de ACR,* um regime de ressonância secular surge entre as áreas de quase-ressonância e de movimento puramente secular no plano  $\Delta\varpi = 0$ , sendo responsável pela mudança de direção de circulação de  $\Delta\varpi$ . Nela vemos uma libração em torno de  $0^\circ$  do ângulo  $\Delta\varpi$ .

*Para moderadas e altas excentricidades de ACR* esta região não é detectada no plano  $\Delta\varpi = 0$  devido ao aumento das áreas de movimentos caóticos ao seu redor.

Contudo, esta expansão das áreas de movimentos caóticos gera regimes de movimento regular no interior das separatrizes da ressonância. Nesses domínios vemos  $\theta_1$  oscilar com grande amplitude em uma região que circunda a ressonância no interior da separatriz. Nesta região  $\Delta\varpi$  libra em torno de  $180^\circ$  com pequena amplitude. Esse domínio é semelhante ao visto para ressonância  $3/2$  e  $2/1$  asteroidal e foi associado a uma ressonância secular (Michtchenko e Ferraz-Mello, 1995).

Como todos esses regimes foram detectados para o sistema HD60532 b-c, que possui  $m_2/m_1 > 1.5$  e massas da ordem de grandeza de Super-Júpiteres, fizemos uma breve análise para sistemas com massas pequenas e  $m_2/m_1 < 1$ . Concluímos que quase todas as estruturas detectadas não dependem de AM e  $m_2/m_1$ . A exceção a esta afirmação é a separatriz que surge entre o regime de quase-ressonância e movimento secular (Que para os mapas desenvolvidos para 55 Cnc b-c não é visível). Também mostramos que mesmo para massas menores, o sistema HD60532 b-c ainda localizaria-se no interior da  $3/1$  MMR.

Em relação à  $3/1$  MMR, os resultados mostraram o esperado: Maiores massas e excentricidades são responsáveis pelo alargamento da ressonância, assim como uma expansão dos regimes caóticos ao redor das áreas de movimento regular. Este fator é o principal responsável pela captura dos sistemas ressonantes ocorrer a partir de migração dos planetas em órbitas quase-circulares.

Reafirmamos nesta tese a importância que uma análise dinâmica tem na compreensão e confirmação de sistemas de exoplanetas. O estudo da presença de caos e um exame das frequências e sua evolução através dos mapas dinâmicos e espectro de potência dinâmico nos oferece uma visão global do espaço de fase do momento angular de um sistema e como sua dinâmica muda em função de seus parâmetros globais. Estas técnicas acompanhadas de simulações de migração em seus estágios finais de formação nos ajudam a determinar se uma dada configuração de exoplanetas é possível e quais as possíveis rotas através das quais ele pode ter evoluído.

## 7.2 *Perspectivas Futuras*

Descrevemos a seguir, alguns dos caminhos naturais deste trabalho que podem servir para complementar ou estender o estudo da  $3/1$  MMR:

- **Estudo da dinâmica ao redor do ACR instável e assimétrico:** as soluções

estacionárias assimétricas surgem como bifurcação das ACR instáveis. Um estudo nos mesmos moldes dos realizados nesta tese complementaria a compreensão da evolução dos regimes dinâmicos em torno das soluções estacionárias.

- **Estudo da dinâmica para os outros exoplanetas próximos a 3/1 MMR:** neste trabalho aplicamos os métodos desenvolvidos ao sistema HD60532 b-c. Uma análise dinâmica nos mesmos moldes aplicados aos sistemas HD10180 d-e, HD20781 b-c e 55 Cnc b-c, nos daria um panorama geral dos sistemas próximos a essa MMR.
- **Comparação com outras ressonâncias de segunda ordem:** algumas das estruturas observadas ao redor do regime ressonante de 2ª ordem diferem das observadas para ressonâncias de 1ª ordem. Estender o trabalho para outras ressonâncias de 2ª ordem, como a 5/3 MMR por exemplo, pode nos ajudar a formar um arcabouço maior das ressonâncias de 2ª ordem, estabelecendo diferenças e semelhanças para diferentes sistemas.
- **Estudo do caso com inclinação entre as órbitas dos planetas:** a adição de graus de liberdade incluindo a inclinação, a partir das soluções de ACR obtidas por Antoniadou e Voyatzis (2014) é outro possível caminho a ser seguido. Podemos investigar a dinâmica ao redor das soluções estacionárias com inclinação, determinar quais configurações são mais prováveis e identificar se novos regimes dinâmicos ocorrem ao redor destas soluções.
- **Aplicação para sistemas de satélites próximos a uma MMR:** neste trabalho estudamos pares de planetas próximos a uma 3/1 MMR. Conforme mencionamos, satélites também se encontram próximos a MMRs. Nestes sistemas, outros fenômenos tornam-se importantes no estudo da ressonância, como interações de maré e achatamento dos satélites. Discutir a captura na ressonância de sistemas de satélites e analisar a dinâmica ao seu redor complementaria o estudo de sistemas próximos a MMRs de forma mais geral.
- **Investigação dos efeitos de maré:** a partir de trabalhos como Lithwick e Wu (2012) e Batygin e Morbidelli (2013), estudar como os sistemas que encontram-se próximos mas não no interior de uma MMR chegaram a tais configurações.

- **Perturbação de outros corpos, sobreposição de ressonâncias:** estudar como outros corpos afetam a órbita dos planetas próximos a uma MMR pode nos dar indícios de como os sistemas de exoplanetas se formaram. A inclusão de outros planetas ao par que compõe o sistema, e que esteja próximo a ressonância com um deles, é de grande interesse para descrever como as ressonâncias interagem entre si e como afetam a dinâmica dos corpos. O estudo da ressonância de Laplace e ressonância em cadeia podem dar ideias de como um sistema exoplanetário de vários planetas interage durante sua formação.
- **Determinação de elementos orbitais dos sistemas planetários:** vários sistemas de planetas detectados, principalmente do programa Kepler, não possuem as massas dos planetas nem excentricidades determinadas. Desenvolver um método que possa intuir quais os possíveis elementos orbitais e parâmetros físicos dos planetas a partir dos dados divulgados pode ajudar na refutação ou comprovação de sistemas de exoplanetas, além de dar indícios de suas possíveis características.

## Referências Bibliográficas

- Alves A. J., Dinamica Secular dos Sistemas de Planetas Multiplos, São Paulo: Universidade de São Paulo, 2010, Dissertação de Mestrado, 140 p.
- Antoniadou K. I., Voyatzis G., Resonant periodic orbits in the exoplanetary systems, *Ap&SS*, 2014, vol. 349, p. 657
- Batygin K., Morbidelli A., Dissipative Divergence of Resonant Orbits, *AJ*, 2013, vol. 145, p. 1
- Beauge C., Ferraz-Mello S., Resonance trapping in the primordial solar nebula - The case of a Stokes drag dissipation, *Icarus*, 1993, vol. 103, p. 301
- Beaugé C., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Extrasolar Planets in Mean-Motion Resonance: Apses Alignment and Asymmetric Stationary Solutions, *ApJ*, 2003, vol. 593, p. 1124
- Beaugé C., Michtchenko T. A., Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system, *MNRAS*, 2003, vol. 341, p. 760
- Beaugé C., Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance, *MNRAS*, 2006, vol. 365, p. 1160
- Bonfils X., Lo Curto G., Correia A. C. M., Laskar J., Udry S., Delfosse X., Forveille T., Astudillo-Defru N., Benz W., Bouchy F., Gillon M., Hébrard G., Lovis C., Mayor M., Moutou C., The HARPS search for southern extra-solar planets. XXXIV. A planetary system around the nearby M dwarf  $\mu$ ASTROBJ GJ 163/ASTROBJ, with a super-Earth possibly in the habitable zone, *A&A*, 2013, vol. 556, p. A110

- Brouwer D., Clemence G. M., *Methods of celestial mechanics*, New York: Academic Press,, 1961
- Callegari N., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Dynamics of Two Planets in the 3/2 Mean-motion Resonance: Application to the Planetary System of the Pulsar PSR B1257+12, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2006, vol. 94, p. 381
- Callegari Jr. N., Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Dynamics of Two Planets in the 2/1 Mean-Motion Resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2004, vol. 89, p. 201
- Chambers J. E., Wetherill G. W., Boss A. P., *The Stability of Multi-Planet Systems*, *Icarus*, 1996, vol. 119, p. 261
- Chiang E., Laughlin G., The minimum-mass extrasolar nebula: in situ formation of close-in super-Earths, *MNRAS*, 2013, vol. 431, p. 3444
- Correa-Otto J. A., Michtchenko T. A., Beaugé C., A new scenario for the origin of the 3/2 resonant system HD 45364, *A&A*, 2013, vol. 560, p. A65
- Curiel S., Cantó J., Georgiev L., Chávez C. E., Poveda A., A fourth planet orbiting  $\nu$  Andromedae, *A&A*, 2011, vol. 525, p. A78
- Dawson R. I., Fabrycky D. C., Radial Velocity Planets De-aliased: A New, Short Period for Super-Earth 55 Cnc e, *ApJ*, 2010, vol. 722, p. 937
- Deitrick R., Barnes R., McArthur B., Quinn T. R., Luger R., Antonsen A., Benedict G. F., The Three-dimensional Architecture of the  $\nu$  Andromedae Planetary System, *ApJ*, 2015, vol. 798, p. 46
- Delfosse X., Bonfils X., Forveille T., Udry S., Mayor M., Bouchy F., Gillon M., Lovis C., Neves V., Pepe F., Perrier C., Queloz D., Santos N. C., Ségransan D., The HARPS search for southern extra-solar planets. XXXIII. Super-Earths around the M-dwarf neighbors Gl 433 and Gl 667C, *A&A*, 2013, vol. 553, p. A8
- Dermott S. F., Malhotra R., Murray C. D., Dynamics of the Uranian and Saturnian satellite systems - A chaotic route to melting Miranda?, *Icarus*, 1988, vol. 76, p. 295



- Desort M., Lagrange A.-M., Galland F., Beust H., Udry S., Mayor M., Lo Curto G., Extrasolar planets and brown dwarfs around A-F type stars. V. A planetary system found with HARPS around the F6IV-V star HD 60532, *A&A*, 2008, vol. 491, p. 883
- Everhart E., An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, *Astrophysics and Space Science Library*. Volume 115, 1985, p.185 , 1985, p. 185
- Fabrycky D. C., Lissauer J. J., Ragozzine D., Architecture of Kepler's Multi-transiting Systems. II. New Investigations with Twice as Many Candidates, *ApJ*, 2014, vol. 790, p. 146
- Ferraz-Mello S., The high-eccentricity libration of the Hildas, *AJ*, 1988, vol. 96, p. 400
- Ferraz-Mello S., Beaugé C., Michtchenko T. A., Evolution of Migrating Planet Pairs in Resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2003, vol. 87, p. 99
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N., Extrasolar Planetary Systems. In *Chaos and Stability in Planetary Systems* , vol. 683 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 2005, p. 219
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Roig F., The Determinant Role of Jupiter's Great Inequality in the Depletion of the Hecuba Gap, *AJ*, 1998, vol. 116, p. 1491
- Fischer D. A., Marcy G. W., Butler R. P., Vogt S. S., Laughlin G., Henry G. W., Abouav D., Peek K. M. G., Wright J. T., Johnson J. A., McCarthy C., Isaacson H., Five Planets Orbiting 55 Cancri, *ApJ*, 2008, vol. 675, p. 790
- Gautier III e. a., Kepler-20: A Sun-like Star with Three Sub-Neptune Exoplanets and Two Earth-size Candidates, *ApJ*, 2012, vol. 749, p. 15
- Giuppone C. A., Morais M. H. M., Correia A. C. M., A semi-empirical stability criterion for real planetary systems with eccentric orbits, *MNRAS*, 2013, vol. 436, p. 3547
- Gladman B., Dynamics of systems of two close planets, *Icarus*, 1993, vol. 106, p. 247
- Goldreich P., Tremaine S., The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential, *ApJ*, 1979, vol. 233, p. 857

- Goldreich P., Tremaine S., Disk-satellite interactions, *ApJ*, 1980, vol. 241, p. 425
- Gomes R. S., Resonance Trapping and Evolution of Particles Subject to Poynting-Robertson Drag: Adiabatic and Non-Adiabatic Approaches, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1995a, vol. 61, p. 97
- Gomes R. S., The effect of nonconservative forces on resonance lock: Stability and instability, *Icarus*, 1995b, vol. 115, p. 47
- Goździewski K., Maciejewski A. J., The Taylor Series Method for the Problem of the Rotational Motion of a Rigid Satellite, *Ap&SS*, 1995, vol. 232, p. 167
- Hahn J. M., Malhotra R., Orbital Evolution of Planets Embedded in a Planetesimal Disk, *AJ*, 1999, vol. 117, p. 3041
- Han E., Wang S. X., Wright J. T., Feng Y. K., Zhao M., Fakhouri O., Brown J. I., Hancock C., Exoplanet Orbit Database. II. Updates to Exoplanets.org, *PASP*, 2014, vol. 126, p. 827
- Hansen B. M. S., Murray N., Migration Then Assembly: Formation of Neptune-mass Planets inside 1 AU, *ApJ*, 2012, vol. 751, p. 158
- Hawley S. L., Gizis J. E., Reid I. N., The Palomar/MSU Nearby Star Spectroscopic Survey. II. The Southern M Dwarfs and Investigation of Magnetic Activity, *AJ*, 1996, vol. 112, p. 2799
- Hayashi C., Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 1981, vol. 70, p. 35
- Henrard J., Sato M., The origin of chaotic behaviour in the Miranda-Umbriel 3:1 resonances, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1990, vol. 47, p. 391
- Kane S. R., Gelino D. M., On the Inclination and Habitability of the HD 10180 System, *ApJ*, 2014, vol. 792, p. 111
- Kley W., On the migration of a system of protoplanets, *MNRAS*, 2000, vol. 313, p. L47

- 
- Kley W., Dynamical Evolution of Planets in Disks, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2003, vol. 87, p. 85
- Laskar J., Analytical framework in Poincaré variables for the motion of the solar system..  
In *Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems* , 1991, p. 93
- Laskar J., Correia A. C. M., HD 60532, a planetary system in a 3:1 mean motion resonance,  
*A&A*, 2009, vol. 496, p. L5
- Laskar J., Correia A. C. M., Searching for stable orbits in the HD 10180 planetary system.  
In *European Physical Journal Web of Conferences* , vol. 11 of *European Physical Journal Web of Conferences*, 2011, p. 5001
- Laskar J., Robutel P., Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the  
Planetary Hamiltonian, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1995, vol. 62,  
p. 193
- Le Verrier U.-J., Recherches astronomiques: Chapitre IV. - Développement de la fonction  
qui sert de base au calcul des perturbations des mouvements des planètes., *Annales de  
l'Observatoire de Paris*, 1855, vol. 1, p. 258
- Lee M. H., Diversity and Origin of 2:1 Orbital Resonances in Extrasolar Planetary Systems,  
*ApJ*, 2004, vol. 611, p. 517
- Lee M. H., Fabrycky D., Lin D. N. C., Are the Kepler Near-resonance Planet Pairs due to  
Tidal Dissipation?, *ApJ*, 2013, vol. 774, p. 52
- Lee M. H., Peale S. J., Dynamics and Origin of the 2:1 Orbital Resonances of the GJ 876  
Planets, *ApJ*, 2002, vol. 567, p. 596
- Lemaitre A., High-order resonances in the restricted three-body problem, *Celestial Me-  
chanics*, 1984, vol. 32, p. 109
- Lin D. N. C., Papaloizou J., Tidal torques on accretion discs in binary systems with extreme  
mass ratios, *MNRAS*, 1979, vol. 186, p. 799
- Lissauer J. J., Ragozzine D., Fabrycky D. C., Steffen J. H., Ford E. B., Jenkins J. M.,  
Shporer A., Holman M. J., Rowe J. F., Quintana E. V., Batalha N. M., Architecture

- and Dynamics of Kepler's Candidate Multiple Transiting Planet Systems, *ApJS*, 2011, vol. 197, p. 8
- Lissauer J. J. e. a., A closely packed system of low-mass, low-density planets transiting Kepler-11, *Nature*, 2011, vol. 470, p. 53
- Lithwick Y., Wu Y., Resonant Repulsion of Kepler Planet Pairs, *ApJ*, 2012, vol. 756, p. L11
- Louis C., Ségransan D., Mayor M., Udry S., Benz W., Bertaux J.-L., Bouchy F., Correia A. C. M., Laskar J., Lo Curto G., Mordasini C., Pepe F., Queloz D., Santos N. C., The HARPS search for southern extra-solar planets. XXVIII. Up to seven planets orbiting HD 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems, *A&A*, 2011, vol. 528, p. A112
- Marchal C., Bozis G., Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem, *Celestial Mechanics*, 1982, vol. 26, p. 311
- Marzari F., Scholl H., Tricarico P., Frequency map analysis of the 3/1 resonance between planets b and c in the 55 Cancri system, *A&A*, 2005, vol. 442, p. 359
- Masset F., FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks, *A&AS*, 2000, vol. 141, p. 165
- Mayor M., Marmier M., Louis C., Udry S., Ségransan D., Pepe F., Benz W., Bertaux J. ., Bouchy F., Dumusque X., Lo Curto G., Mordasini C., Queloz D., Santos N. C., The HARPS search for southern extra-solar planets XXXIV. Occurrence, mass distribution and orbital properties of super-Earths and Neptune-mass planets, *ArXiv e-prints*, 2011
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2006, vol. 94, p. 411
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - I. Systems with a more massive outer planet, *MNRAS*, 2008a, vol. 387, p. 747

- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet, MNRAS, 2008b, vol. 391, p. 215
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Ferraz-Mello S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet, MNRAS, 2008c, vol. 391, p. 215
- Michtchenko T. A., Beaugé C., Roig F., Planetary Migration and the Effects of Mean Motion Resonances on Jupiter's Trojan Asteroids, AJ, 2001, vol. 122, p. 3485
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Comparative study of the asteroidal motion in the 3:2 and 2:1 resonances with Jupiter. I. Planar model., A&A, 1995, vol. 303, p. 945
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System, Icarus, 2001a, vol. 149, p. 357
- Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets, AJ, 2001b, vol. 122, p. 474
- Michtchenko T. A., Lazzaro D., Ferraz-Mello S., Roig F., Origin of the Basaltic Asteroid 1459 Magnya: A Dynamical and Mineralogical Study of the Outer Main Belt, Icarus, 2002, vol. 158, p. 343
- Michtchenko T. A., Malhotra R., Secular dynamics of the three-body problem: application to the  $\nu$  Andromedae planetary system, Icarus, 2004, vol. 168, p. 237
- Michtchenko T. A., Rodríguez A., Modelling the secular evolution of migrating planet pairs, MNRAS, 2011, vol. 415, p. 2275
- Murray C. D., A note on Le Verrier's expansion of the disturbing function, Celestial Mechanics, 1985, vol. 36, p. 163
- Murray C. D., Dermott S. F., Solar system dynamics, Cambridge University Press, 1999
- Nelson B. E., Ford E. B., Wright J. T., Fischer D. A., von Braun K., Howard A. W., Payne M. J., Dindar S., The 55 Cancri planetary system: fully self-consistent N-body constraints and a dynamical analysis, MNRAS, 2014, vol. 441, p. 442

- Nelson R. P., Papaloizou J. C. B., Possible commensurabilities among pairs of extrasolar planets, *MNRAS*, 2002, vol. 333, p. L26
- Papaloizou J. C. B., Disc-Planet Interactions: Migration and Resonances in Extrasolar Planetary Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2003, vol. 87, p. 53
- Pauwels T., Secular orbit-orbit resonance between two satellites with non-zero masses, *Celestial Mechanics*, 1983, vol. 30, p. 229
- Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B., *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press Cambridge, 1992
- Raymond S. N., Barnes R., Armitage P. J., Gorelick N., Mean Motion Resonances from Planet-Planet Scattering, *ApJ*, 2008, vol. 687, p. L107
- Raymond S. N., Barnes R., Veras D., Armitage P. J., Gorelick N., Greenberg R., Planet-Planet Scattering Leads to Tightly Packed Planetary Systems, *ApJ*, 2009, vol. 696, p. L98
- Rowe J. F., Bryson S. T., Marcy G. W., Lissauer J. J., Jontof-Hutter D., Mullally F., Gilliland R. L., Issacson H., Ford E., Howell S. B., Borucki W. J., Haas M., Huber D., Steffen J. H., Thompson S. E., Quintana E., Validation of Kepler's Multiple Planet Candidates. III. Light Curve Analysis and Announcement of Hundreds of New Multi-planet Systems, *ApJ*, 2014, vol. 784, p. 45
- Sándor Z., Kley W., Formation of the resonant system HD 60532, *A&A*, 2010, vol. 517, p. A31
- Snellgrove M. D., Papaloizou J. C. B., Nelson R. P., On disc driven inward migration of resonantly coupled planets with application to the system around GJ876, *A&A*, 2001, vol. 374, p. 1092
- Tuomi M., Evidence for nine planets in the HD 10180 system, *A&A*, 2012, vol. 543, p. A52
- Tuomi M., Anglada-Escudé G., Up to four planets around the M dwarf GJ 163. Sensitivity of Bayesian planet detection criteria to prior choice, *A&A*, 2013, vol. 556, p. A111

- Tuomi M., Jones H. R. A., Jenkins J. S., Tinney C. G., Butler R. P., Vogt S. S., Barnes J. R., Wittenmyer R. A., O'Toole S., Horner J., Bailey J., Carter B. D., Wright D. J., Salter G. S., Pinfield D., Signals embedded in the radial velocity noise. Periodic variations in the  $\tau$  Ceti velocities, *A&A*, 2013, vol. 551, p. A79
- Verheylewegen E., Lemaître A., The 3:1 mean motion resonance between Miranda and the inner Uranian satellites, Cressida and Desdemona, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2014, vol. 119, p. 283
- von Braun K., Boyajian T. S., ten Brummelaar T. A., Kane S. R., van Belle G. T., Ciardi D. R., Raymond S. N., López-Morales 55 Cancri: Stellar Astrophysical Parameters, a Planet in the Habitable Zone, and Implications for the Radius of a Transiting Super-Earth, *ApJ*, 2011, vol. 740, p. 49
- Voyatzis G., Chaos, Order, and Periodic Orbits in 3:1 Resonant Planetary Dynamics, *ApJ*, 2008, vol. 675, p. 802
- Voyatzis G., Hadjidemetriou J. D., Symmetric and asymmetric 3:1 resonant periodic orbits with an application to the 55Cnc extra-solar system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2006, vol. 95, p. 259
- Weidenschilling S. J., The distribution of mass in the planetary system and solar nebula, *Ap&SS*, 1977, vol. 51, p. 153
- Weiss L. M., Marcy G. W., The Mass-Radius Relation for 65 Exoplanets Smaller than 4 Earth Radii, *ApJ*, 2014, vol. 783, p. L6
- Wisdom J., The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem, *AJ*, 1980, vol. 85, p. 1122
- Zhou L.-Y., Lehto H. J., Sun Y.-S., Zheng J.-Q., Apsidal corotation in mean motion resonance: the 55 Cancri system as an example, *MNRAS*, 2004, vol. 350, p. 1495





## Apêndice

A seguir anexamos o artigo “Dynamics of the 3/1 planetary mean-motion resonance. An application to the HD60532 planetary system” submetido a revista *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* no dia 01/06/2015 baseado no trabalho durante a tese.

A. J. Alves · T. A. Michtchenko

# Dynamics of the 3/1 planetary mean-motion resonance.

An application to the HD60532 planetary system

Received: date / Accepted: date

**Abstract** In this paper, we use a semi-analytical approach to analyze the global structure of the phase space of the planar planetary 3/1 mean-motion resonance, in cases where the outer planet is more massive than its inner companion. We show that the resonant dynamics can be described using only two fundamental parameters, the total angular momentum and the scaling parameter. The topology of the Hamiltonian function describing the resonant behaviour is studied on the representative planes that allows us to investigate a large domain of the phase space of the three-body problem without time-expensive numerical integrations of the equations of motion, and without any restriction on the magnitude of the planetary eccentricities. The families of the well known Apsidal Corotation Resonances (ACR) parameterized by the planetary mass ratio are obtained and their stability is analysed. The main dynamical features in the domains around ACR are also investigated in detail by means of spectral analysis techniques, which allow us to detect the regions of different regimes of motion of resonant systems. The construction of dynamical maps for various values of the total angular momentum shows the evolution of domains of stable motion with the eccentricities, identifying possible configurations suitable for exoplanetary systems.

**Keywords** exoplanetary systems · resonant dynamics · periodic orbits

## 1 Introduction

The resonant configurations are frequent in the extra-solar planetary systems. In the studies on the formation and long-term stability of the resonant systems, a deep understanding of the behaviour of the planets becomes important. Indeed, long-term stable motion of close planets at high eccentricities is possible only if the planets are locked in (and protected by) a mean-motion resonance (hereafter just a resonance, or MMR). Second, resonance trapping appears to be a natural outcome of planetary migration processes due to planet-disk interactions, which are believed to take place in the latest stage of the planet formation (e.g. Kley 2000, Snellgrove et al. 2001, Kley et al. 2005).

This paper is a part of the series of papers devoted to the study of the resonant dynamics of the planets. In the previous works, we have addressed 3/2 (Callegari et al. 2006), 2/1 (Callegari et al. 2004, Michtchenko et al. 2008 a,b) and 5/2 MMRs (Michtchenko and Ferraz-Mello 2001a). This paper focus on the 3/1 resonance planetary configuration. Although this resonance is not densely populated as those mentioned above (Antoniadou & Voyatzis 2014) (only the HD60532 **b-c** system is confirmed to evolve inside it), there are still many candidates from the Kepler database waiting for confirmation (<http://exoplanets.org>; Han et al. 2014).

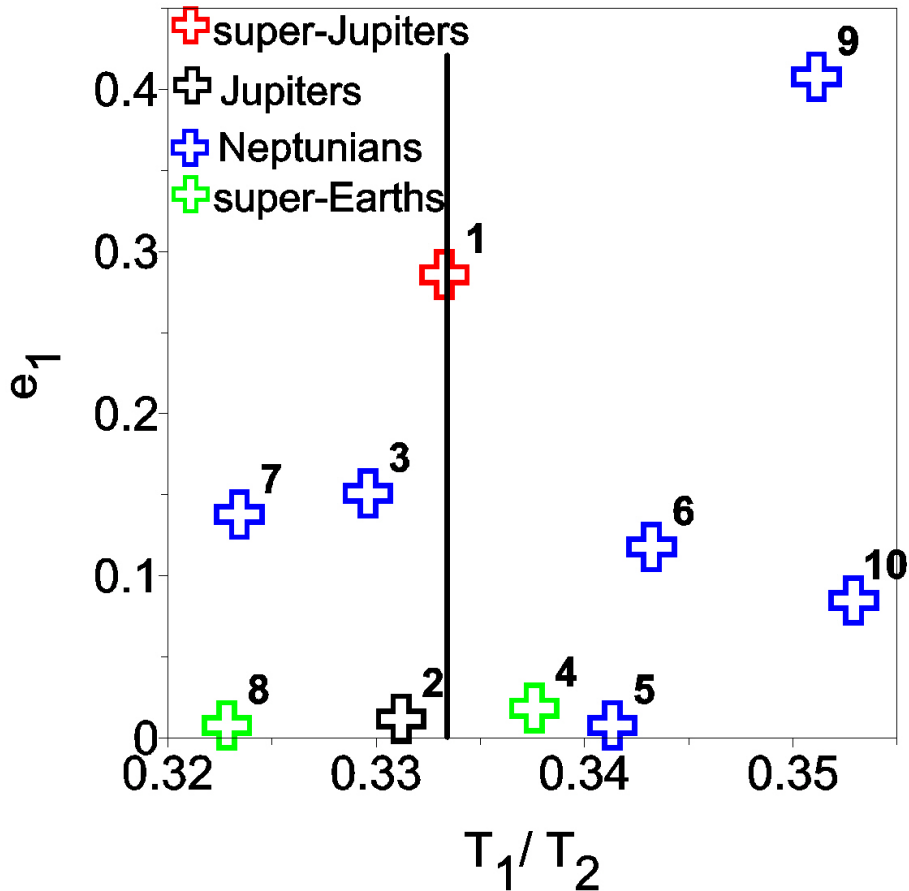


Fig. 1: The distribution of the extra-solar planetary systems near the nominal 3/1 MMR. The planetary systems are numbered as: 1 - HD60532 b-c; 2 - 55Cnc b-c; 3 - HD10180 d-e; 4 - GJ 163 b-c; 5 - Kepler 20 b-c; 6 - HD20781 b-c; 7 - HD31527 b-c; 8 - Kepler 11 b-e; 9 - HD20003 b-c; 10 - HD10180 c-d. Different colors are chosen to identify the averaged planetary masses of the systems (see text for details).

The resonant dynamics may be partially understood through the study of the special solutions often referred to as Apical Corotation Resonance (ACR). Several previous papers were devoted to the determination of these periodic solutions in the planar 3/1 MMR (Beaugé et al. 2003, Ferraz-Mello et al. 2003, Michtchenko et al. 2006, Voyatzis & Hadjidemetriou 2006). In more recent paper (Antoniadou & Voyatzis 2014), the study of the families of ACRs was extended to the nonplanar dynamics of the planets.

Notwithstanding the attention devoted to ACRs and periodic orbits, not much is known on the topology of the phase space of the 3/1 MMR. Moreover, since most of the detected exoplanets evolving in resonances are outside the immediate vicinity of the ACRs (this is the case of the HD60532 planets **b** and **c**), the dynamical exploration of the whole phase space of the resonant problem becomes important, from the point of view of stability of the planetary motion. That is the purpose of the present paper.

The paper is organized as follows. In the next section, we do a brief overview of the exoplanetary systems detected near the 3/1 commensurability. The hypothesis on the origin of this configuration through the capture of planetary pairs during migration stages is also discussed in this section. In Section 3, we introduce the basic semi-analytical Hamiltonian model which describes the planar 3/1 resonant problem. The topology of the resonant Hamiltonian is studied in Section 4, where we plot energy levels on the representative planes, calculate the symmetric and asymmetric ACRs of the 3/1

Param.	[units]	HD60532 b	HD60532 c
$\sqrt{X^2}$			4.369
rms	[m/s]		4.342
Date	[JD-2400000]	54000.000(fixed)	
$V$	[km s <sup>-1</sup> ]	-0.0055 ± 0.0003	
$P$	[day]	201.83 ± 0.14	607.06 ± 2.07
$\lambda$	[deg]	14.78 ± 0.66	317.02 ± 0.93
$e$	[m/s]	0.278 ± 0.006	0.038 ± 0.008
$\omega$	[deg]	352.83 ± 1.05	119.49 ± 9.14
$K$	[m/s]	30.34 ± 0.32	47.84 ± 0.44
$i$	[deg]	20(fixed)	20(fixed)
$M$	[ $M_{Jup}$ ]	3.1548	7.4634
$a$	[AU]	0.7606	1.5854

Table 1: Orbital parameters of the HD60532 b-c system. The mass of the central star is  $M_\star = 1.44M_\odot$ . The data are taken from Laskar & Correia 2009

MMR and discuss the Law of Structure. The dynamics around the ACRs is investigated in Section 5, in form of dynamical maps and dynamical power spectra, and the main regimes of motion of the planets in the 3/1 MMR are described. Finally, the conclusions are done in Section 6.

## 2 Exoplanets near the 3/1 MMR

Analyzing the orbital configurations of the planetary systems from the Exoplanet Orbit Database (Han et al. 2014), we have identified 10 pairs, which are close to the 3/1 MMR. They are shown in Figure 1 by cross symbols on the  $(T_1/T_2, e_1)$ -plane, where  $T_1$  and  $T_2$  are the orbital periods of the inner and outer planets, respectively, and  $e_1$  is the eccentricity of the inner planet's orbit. The nominal location of the 3/1 MMR on this plane is shown by the vertical line. The systems are classified according their averaged masses defined as  $M = 0.5(m_1 + m_2)$ , where  $m_1$  and  $m_2$  are the masses of the inner and outer planets, respectively. The systems with averaged masses ten times less than the mass of the Earth are referred to as super-Earth and are shown by green symbols, the systems from the range  $0.02M_J < M < 0.2M_J$  ( $M_J$  is the mass of Jupiter) as Neptunians (blue symbols), from  $0.2M_J < M < 2M_J$  as Jupiters (black symbols) and those with the masses  $M > 2M_J$  as super-Jupiters (red symbols).

The closest to the nominal 3/1 MMR is the HD60532 system (# 1 in Figure 1), which consists of the F-type star of mass  $M_\star = 1.44M_\odot$  and two super-Jupiters, with masses  $m_1 = 3.1548M_J$  and  $m_2 = 7.4634M_J$  (Laskar & Correia, 2009). Previous investigations of the dynamics of this system have shown that it evolves deeply inside the 3/1 MMR (Laskar & Correia 2009). Its configuration is characterized by anti-aligned pericenter lines of the planetary orbits and the specific location of the planets on their orbits which avoid mutual close approaches. The HD60532 planetary pair b-c is the only system evolving *inside* the 3/1 MMR. For this reason, its physical and orbital parameters obtained in Laskar & Correia (2009) have been chosen in applications of the developed in this paper model (see Table 1).

The planetary pairs that are close, but not inside the 3/1 MMR, are 55 Cnc b-c (# 2 in Figure 1; Nelson et al. 2014), HD10180 d-e (# 3; Lovis et al. 2011), GJ 163 b-c (# 4; Bonfils et al. 2013) and Kepler 20 b-c (# 5; Gautier et al. 2012). Initially, the pair b-c of the 55 Cnc system was supposed to evolve inside a 3/1 MMR (Zhou et al. 2004, Marzari et al. 2005). However, since the orbital elements of the planets were modified substantially by further observations, their dynamics was recalculated and the planetary system was found to evolve in a so-called near-resonant regime of motion (Dawson & Fabrycky 2010).

HD10180 is a solar type star, with  $M_\star = 1.06M_\odot$ . It hosts multi-planetary system (Mayor et al. 2011, Tuomi 2012, Kane & Gelino 2014). Although not all components of this system are still confirmed, it would be interesting to compare the dynamics of the planets 'd' and 'e', evolving near the 3/1 MMR, to the near-resonant structure of our solar system, particularly, with the dynamics of the Saturn-Uranus pair, also close to the 3/1 MMR (Michtchenko & Ferraz-Mello 2001b).

Several recently detected exoplanetary pairs from the Kepler database also present orbital periods close the 3/1 commensurability, e.g. Kepler-180 b-c, Kepler-326 b-d, Kepler-359 b-d, Kepler-107 b-e,

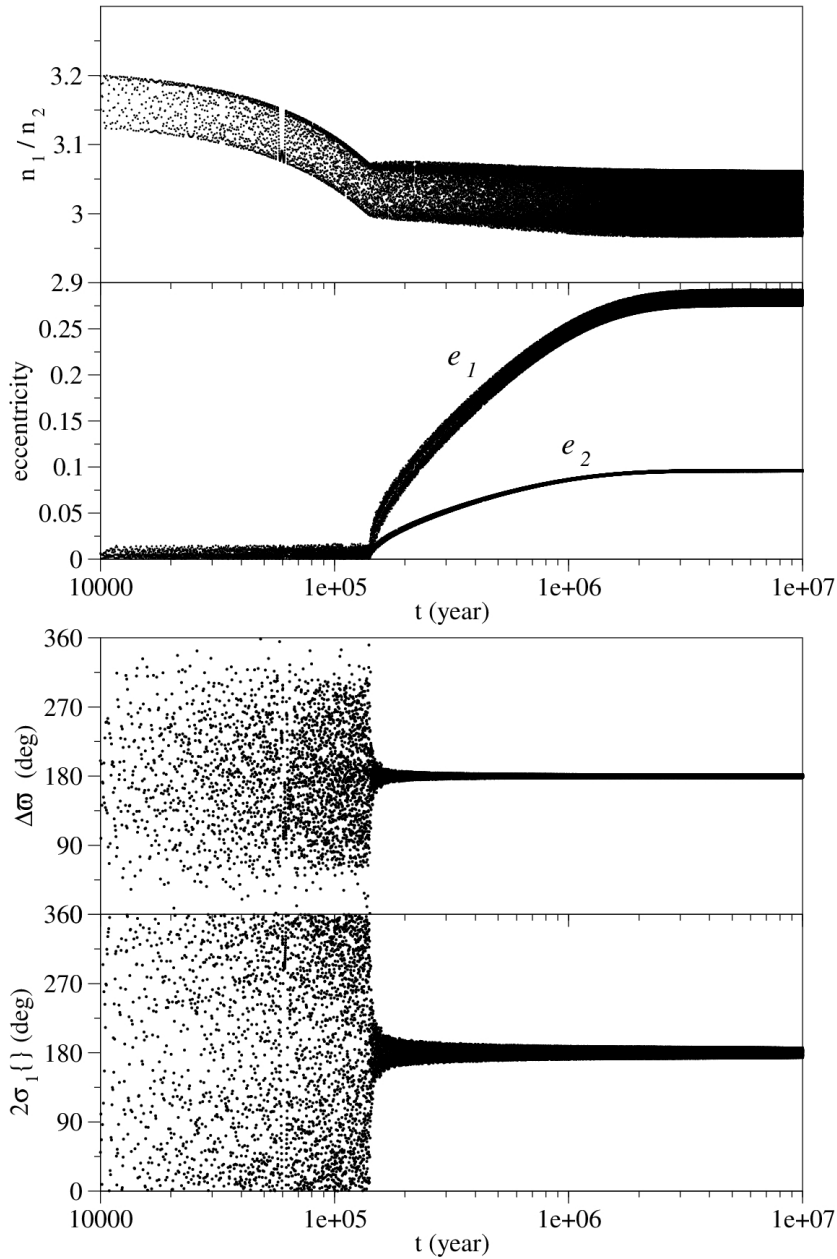


Fig. 2: The resonance capture of the HD60532 planets **b** and **c** evolving under the dissipative Stokes-like force (1). Starting at  $n_1/n_2 \sim 3.15$ , the planets are ultimately trapped in the 3/1 MMR after  $2 \times 10^5$  years of the evolution. Top panel: Time evolution of the ratio of the mean motions (top) and the eccentricities (bottom). Bottom panel: Time evolution of the secular angle  $\Delta\varpi$  (top) and the resonant angle  $2\sigma_1$  (bottom), both oscillating around  $180^\circ$  in the resonance.

Kepler-102 b-c, Kepler-373 b-c, Kepler-84 c-d, among others. However, the lack of information on the physical and orbital parameters of the Kepler exoplanets makes a deep analysis of their dynamics unfeasible.

## 2.1 On the origin of the 3/1 resonant configuration in the HD60532 system

The main mechanism to forming a resonant planetary system is thought to be by convergent migration of planets during the final stage of their formation and consequent capture inside the resonance. Migration is the result of dissipative gravitational interactions of a protoplanetary disk and the growing planets (Lin & Papaloizou 1979, Goldreich & Tremaine 1979, Goldreich & Tremaine 1980). This scenario of the origin of the HD60532 pair has been investigated in Sándor & Kley (2010), where the locally isothermal version of FARGO software was applied to simulate disk-planet interactions. However, the attempts to simulate the formation of two giant planets in the anti-symmetric 3/1 mean-motion resonance have failed, probably, due to incorrectly done assumption on the final configuration of the planetary orbits.

To verify the possibility of the capture of the migrating planetary pair in the 3/1 MMR, in this work, we perform a simple experiment, modeling gravitational disk-planet interactions with a Stokes-type non-conservative force (Ferraz-Mello et al. 2003, Beauge et al. 2006, Michtchenko & Rodríguez 2011). The dissipative force component can be added to the Newton exact equations of motion of a planet as

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -C(\mathbf{v} - \alpha \mathbf{v}_c), \quad (1)$$

where  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{v}$  are the position and velocity vectors of the planet,  $\mathbf{v}_c$  is the circular velocity vector at the same position, while  $C$  and  $\alpha$  are parameters characterizing the disk in which the planet is migrating. As shown in Beaugé & Ferraz-Mello (1993) and Gomes (1995a,b), up to first order in eccentricities, the effect of the force (1) on the planetary semimajor axis and eccentricity behaviour is given by

$$a(t) = a_0 e^{-At}, \quad e(t) = e_0 e^{-Bt}, \quad (2)$$

where  $a_0$  e  $e_0$  are the initial values of the semimajor axis and eccentricity, respectively, and  $|A|$  and  $|B|$  are inverse of the e-folding times in each orbital element,  $\tau_a$  and  $\tau_e$ , respectively. These quantities are associated with the parameters of the Stokes force (1) through:

$$A = 2C(1 - \alpha), \quad B = C\alpha. \quad (3)$$

Using this 'toy' model for the driving mechanism, we performed a series of numerical simulations of the resonance capture of the HD60532 planets. Several initial configurations were tested and the results have shown that the capture inside the 3/1 MMR is very robust. One of the simulations is shown in Figure 2. The HD60532 pair of planets was initially placed on nearly circular orbits beyond the 3/1 MMR, at  $n_1/n_2 \sim 3.20$ . The adopted values of the e-folding times,  $\tau_a$  and  $\tau_e$ , were  $5 \times 10^6$  and  $2.5 \times 10^5$  years, respectively. The dissipative force (1) was applied only on the outer planet.

Figure 2 shows that, after the approximately  $2 \times 10^5$  years of the decay of the outer planet, the pair of planets is captured in the resonance, when the ratio of the mean motions is trapped around 3/1 (top panel). The eccentricities of the planetary orbits then increase rapidly and reach their current values soon after 2 millions of years. The behavior of the characteristic angular variables, the secular angle  $\Delta\varpi$  and the resonant angle  $2\sigma_1$  (bottom panel), confirms that the system has reached the state of the minimal energy characterized by anti-aligned pericenter lines and the oscillating around  $180^\circ$  critical angle of the 3/1 MMR (the definition of the angular variables is done in the next section).

## 3 Modeling the 3/1 MMR

Our model consists of a system with two planets, with the masses  $m_1$  and  $m_2$ , orbiting a central star with the mass  $m_0$ . The index "1" will always refer to the inner planet, while the index "2" to the outer one. We assume that both orbits lie in the same plane. We apply the model to the HD60532 planets b-c, whose physical and orbital parameters are shown in Table 1. We use the Poincaré canonical angle-action variables in the astrometric reference (Laskar 1991):

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \text{mean longitude}, & L_i &= m'_i \sqrt{\mu_i a_i}, \\ -\varpi_i &= \text{longitude of pericenter}, & L_i - G_i &= L_i \left( 1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

where  $a_i$  e  $e_i$  are the semimajor axes and eccentricities of the planets, respectively,  $m'_i = \frac{m_i m_0}{m_i + m_0}$  are the reduced masses and  $\mu_i = G(m_0 + m_i)$ , where  $G$  is the gravitational constant.

The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  of the problem can be expressed as the sum of the Keplerian part

$$\mathcal{H}_0 = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i^2 m_i^3}{2L_i^2} \quad (5)$$

and the perturbation

$$\mathcal{H}_1 = - \frac{Gm_1 m_2}{\Delta} + \mathcal{T}_1. \quad (6)$$

The first term in Eq.(6) is the direct part of the perturbation function,  $\Delta$  is the instant distance between the planets, and the second term  $\mathcal{T}_1$  is the indirect part of the perturbation function. The reader is referred to Laskar & Robutel (1995) and Ferraz-Mello et al. (2005), for further details.

To study the vicinity of the 3/1 MMR resonance, we transform the angular variables (4) to the critical angles of the resonance  $(p+q)/p$  as

$$\begin{aligned} \lambda_1, & & J_1 = L_1 + s(I_1 + I_2), \\ \lambda_2, & & J_2 = L_2 - (1+s)(I_1 + I_2), \\ \sigma_1 = (1+s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \varpi_1, & & I_1 = L_1 - G_1, \\ \sigma_2 = (1+s)\lambda_2 - s\lambda_1 - \varpi_2, & & I_2 = L_2 - G_2, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $s = p/q$  (for the 3/1 MMR,  $p = 1$  and  $q = 2$ ). In the next, the averaging of the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is done with respect to the synodic angle  $Q = \lambda_2 - \lambda_1$ . In the proximity of a mean-motion resonance, the variation of  $Q$  is much faster than those of the resonant and secular angles, and does not influence significantly the long-term evolution of the system. Thus, all periodic terms dependent on  $Q$  can be eliminated (i.e. averaged out) from the Hamiltonian function, and only secular and resonant terms need to be retained (for details, see Beaugé & Michtchenko 2003).

The averaged resonant problem has two invariant quantities (or integrals of motion): one is *the spacing parameter*, written as

$$\mathcal{K} = (1+s)L_1 + sL_2. \quad (8)$$

This integral describes the coupling behaviour of the planetary semimajor axes, which oscillate with opposite phases and with amplitudes which are inversely proportional to the planetary masses. This behaviour is shown on the top graph in Figure 3, which shows that the timescale of the resonant oscillations is of order of tens of years. Note that this behaviour of the semimajor axes is exclusively due to resonant interactions and there is no secular component in the variation of the semimajor axes (Michtchenko et al. 2011), at least, up to first order in masses.

The second integral of motion of the problem is *the total angular momentum*, written as

$$\mathcal{AM} = J_1 + J_2 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2} + L_2 \sqrt{1 - e_2^2}. \quad (9)$$

The invariance of the total angular momentum implies the coupling oscillations in the planetary eccentricity, in such a way that when the eccentricity of one planet increases, the other has to decrease. Figure 3 *bottom* shows the resonant evolution of the planetary eccentricities, which is composed of two components: resonant (with small amplitudes) and secular (with large amplitudes) ones. The timescale of the secular variation associated to the variation of the secular angle  $\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1$  is of order of hundreds of years. Note that, despite the very large planetary masses, it is still one order longer than the timescale of the resonant oscillations.

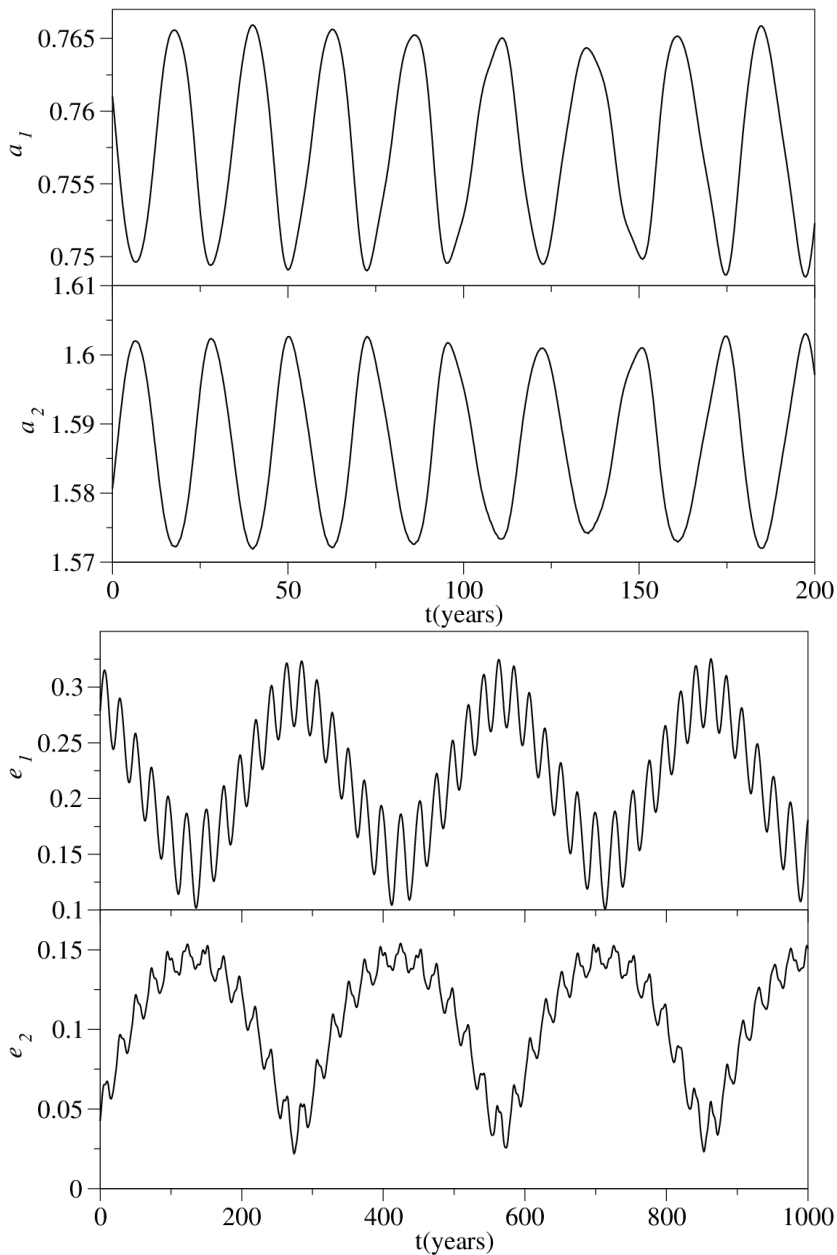


Fig. 3: Numerical simulation of the HD60532 planets **b** and **c**, with masses and initial conditions from Table 1. The top panel shows the resonant oscillations of the semimajor axes, while the bottom panel shows the oscillations of the eccentricities, all averaged over short-term oscillations (of order of orbital periods).

### 3.1 The choice of the truly resonant angle

The invariance of  $\mathcal{AM}$  and  $\mathcal{K}$  has important consequences for the orbital evolution of the system. It indicates that, after the averaging process, from the set of the variables  $(L_1, L_2, G_1, G_2)$  (or,  $a_1, a_2, e_1, e_2$ ), only two are independent, and the planar resonant problem has two degrees of freedom, with two proper modes of motion. One mode is defined as a *secular mode* of motion of the system and is associated with the secular angle  $\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1$ . The typical behaviour of this angle inside the resonance domain is a circulation/oscillation (Michtchenko et al. 2011).



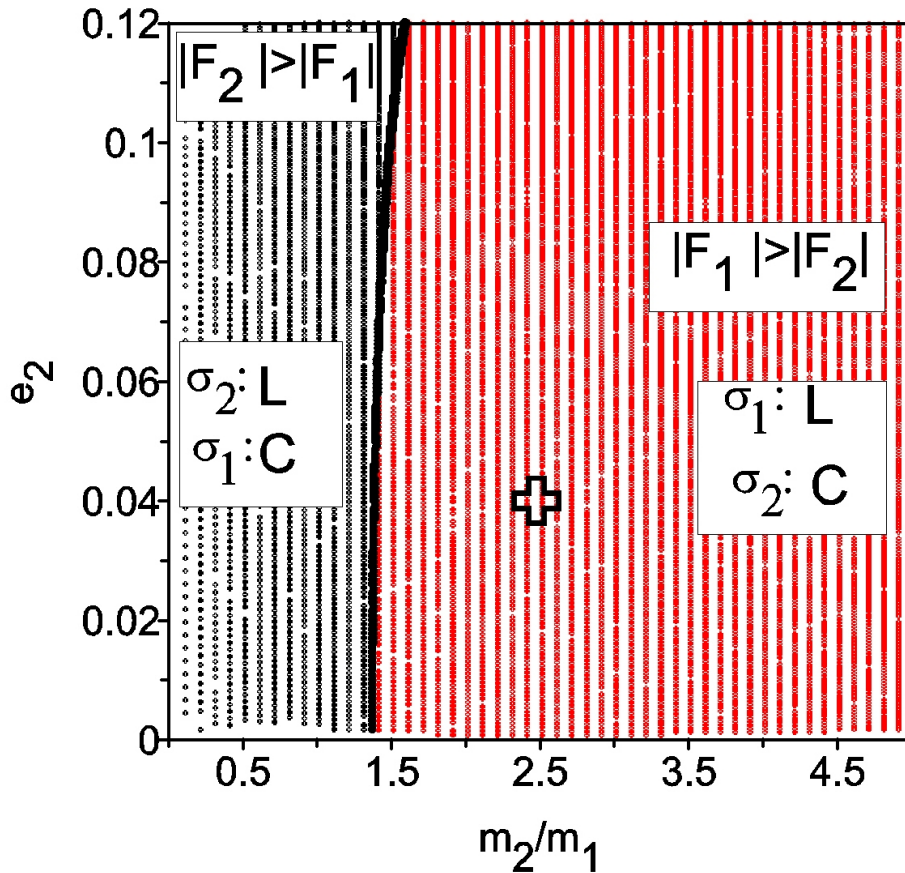


Fig. 4: Parametric plane  $(m_2/m_1, e_2)$  of the planetary mass ratio and the outer planet's eccentricity. The black color is used to indicate the domain where  $|F_2| > |F_1|$  and  $\sigma_2$  is a truly resonant angle, while the red color shows the domain where  $|F_1| > |F_2|$  and  $\sigma_1$  is a truly resonant angle.  $|F_1|$  and  $|F_2|$  are amplitudes of the resonant terms in the analytical first-order expansion of the Hamiltonian (10). Cross symbol shows the location of the HD60532 system.

The other mode is *a resonant mode* defined by the libration of the resonant angle. By the definition of the critical angles (Eq. (7)),  $\Delta\varpi = \sigma_1 - \sigma_2$ , that means that only one of two critical angles is independent and is a *truly* resonant angular variable of the problem (the other independent angular variable is  $\Delta\varpi$ ). The question which rises now is which one of two critical angles can be chosen as a resonant variable.

The choice can be defined invoking the limit-case of the resonant restricted three-body problem. Indeed, the theories of the dynamics of the asteroids from the Main Belt and of the trans-Neptunian objects provide the opposite resonant angles. In the former case, when the mass of the inner body is much smaller than the mass of the outer planet, the resonant angle is  $\sigma_1$ . In the last case, the librating angle is related to the outer body,  $\sigma_2$ . We refer to these resonances as the *interior* and *exterior* resonances, respectively.

Adapting this idea for the general three-body problem, we analyze the Laplacian approximation of the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  (5-6), in order to compare the magnitudes of the terms related to the resonant angles  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$ . The first-order analytical expansion of the Hamiltonian near the 3/1 MMR can be written as

$$\begin{aligned}
 H = & A(I_1 + I_2) + 2B(I_1 + I_2)^2 + CI_1 + DI_2 + E\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varpi \\
 & + F_1 I_1 \cos 2\sigma_1 + F_2 \cos 2\sigma_2 + F_3 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\sigma_1 + \sigma_2),
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

where the terms with the coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  and  $E$  are associated to the secular mode of motion, while the terms with the coefficients  $F_1$ ,  $F_2$  and  $F_3$  are associated to the resonant mode. The explicit expressions for the coefficients are given in Appendix.

Analysing the resonant part of the Hamiltonian (10), we can observe that the term with  $F_3$  is symmetric with respect to the angles  $\sigma_1$  and  $\sigma_2$  and thus does not constrain the choice between them. The comparison must be done between two other resonant terms, with coefficients  $F_1$  and  $F_2$ , and the term with higher amplitude will define a resonant angle.

We apply the described above criterium to the systems in the nominal 3/1 MMR, with different values of the mass ratio  $m_2/m_1$  and the initial eccentricity  $e_2$  and show the results in Figure 4, where the condition  $|F_2| - |F_1| > 0$  is plotted by black symbols, while the condition  $|F_2| - |F_1| < 0$  is plotted by red symbols. Figure 4 shows that the choice of the resonant angle is determined essentially by the value of the ratio of the planetary masses: for  $m_2/m_1$  larger than approximately 1.5, the 3/1 MMR is an interior resonance characterized by the libration of the critical angle  $\sigma_1$  and oscillation/circulation of the secular angle  $\Delta\varpi$  (and  $\sigma_2$ ). For  $m_2/m_1$  lesser than 1.5, the 3/1 MMR is exterior, with the librating  $\sigma_2$  and circulating  $\Delta\varpi$  (and  $\sigma_1$ ). The influence of the planetary eccentricities on the choice of the critical angle seems to be negligible, at least, at first-order approximation.

Finally, the location of the HD60532 planets indicated by a cross symbol on the  $(m_2/m_1, e_2)$ -plane in Figure 4 shows that the system evolves in the internal 3/1 MMR and the critical angle  $\sigma_1$  is a resonant angle.

#### 4 Topology of the semi-analytical Hamiltonian

The analysis of the topology of the two-degrees-of-freedom Hamiltonian  $\mathcal{H}$  (5-6) consists of several steps, such as the choice of the representative planes, mapping the energy levels of  $\mathcal{H}$  (5-6), the determination of the stationary solutions of the Hamiltonian function and the analysis of the stability of these solutions.

##### 4.1 Energy levels maps on the representative planes

Although the phase space of the two-degrees-of-freedom resonant system is four dimensional, the problem can be reduced to the systematic study of initial conditions on a plane. For instance, if we fix the initial values of the angular variables  $2\sigma_1$  and  $\Delta\varpi$ , the phase space can be visualized on the  $(e_1, e_2)$ -plane of initial conditions. In this case, the semimajor axes of the planets (needed to calculate energy levels) may be obtained using Eqs. (8-9), for a fixed set of the free parameters  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{AM}$ . The representative plane  $(e_1, e_2)$ , corresponding to the physical and orbital parameters of the HD60532 planets (Table 1), is shown in Figure 5 *left*, where the positive (negative) values on the  $e_1$ -axis correspond to  $2\sigma_1$  fixed at  $0$  ( $180^\circ$ ), while the positive (negative) values on the  $e_2$ -axis correspond to  $\Delta\varpi$  fixed at  $0$  ( $180^\circ$ ).

Energy levels of the Hamiltonian  $\mathcal{H}$  plotted on the  $(e_1, e_2)$ -plane show a complex structure of the 3/1 MMR, with several fixed points marked by symbols: the elliptic points by dots, while the saddle-type points by crosses. Each fixed point corresponds to a stationary solution of the averaged resonant problem, frequently referred to as *Apsidal Corotation Resonance* or ACR. The global maximum of  $\mathcal{H}$  shown by a red dot in Figure 5 *left*, is located in the quadrant corresponding to  $2\sigma_1 = \Delta\varpi = 180^\circ$ , and is usually known as a  $(\pi, \pi)$ -ACR. A second maximum (blue dot) is found in the quadrant with  $2\sigma_1 = \Delta\varpi = 0$  and characterizes the  $(0, 0)$ -ACR solution; the corresponding energy level around the global maximum is shown by blue color. Finally, there are two additional saddle-type fixed points shown by cross symbols in Figure 5 *left*.

It is expected that each elliptic stationary solution should be surrounded by a robust domain of stable resonant motion. This is shown in Figure 5 *right*; the figure shows the energy levels in the neighborhood of the global maximum (red dot) on the representative plane  $(n_1/n_2, e_2)$ , where  $n_1$  and  $n_2$  are the mean motions of the inner and outer planets, respectively. Since the location of the global maximum is already known from the previous plane, we can fix the angle  $2\sigma_1$  at  $180^\circ$  and set  $\Delta\varpi$  at  $0$  (positive values on the  $e_2$ -axis) or  $180^\circ$  (negative values on the  $e_2$ -axis). The initial values of  $a_1$ ,  $a_2$  and  $e_1$  are then obtained from Eqs. (8-9), using the same set of the free parameters  $\mathcal{K}$  and

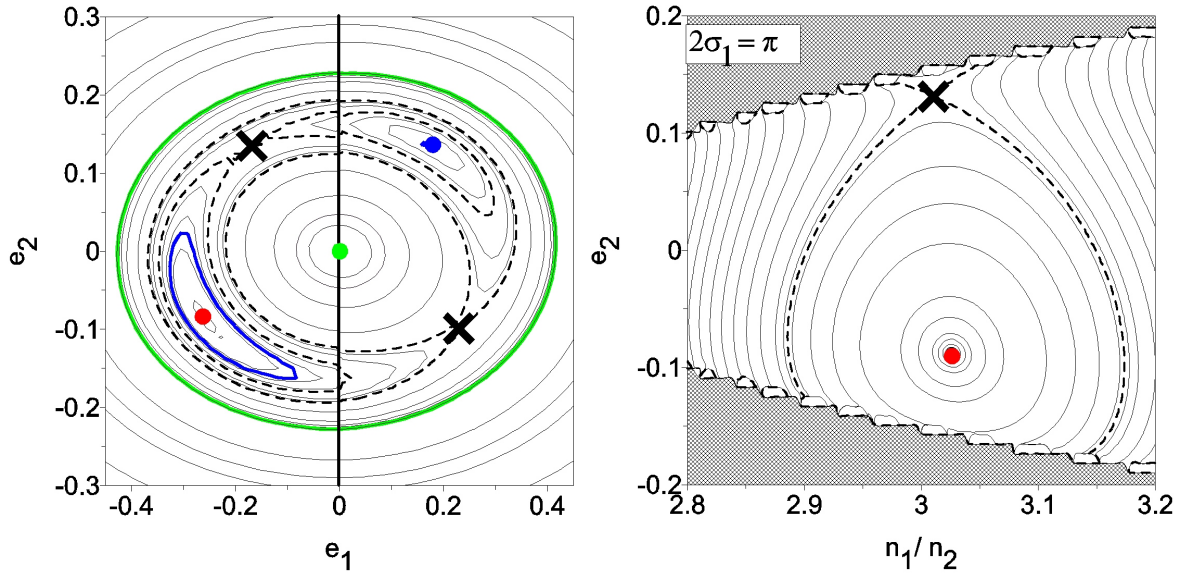


Fig. 5: Energy levels of the 3/1 resonant Hamiltonian (5-6) on the  $(e_1, e_2)$  representative plane (left) and on the  $(n_1/n_2, e_2)$ -plane obtained at  $2\sigma_1 = \pi$  (right). The positive (negative) values of  $e_1$  indicate that  $2\sigma_1 = 0(\pi)$ , while the positive (negative) values of  $e_2$  indicate that  $\Delta\varpi = 0(\pi)$ . Both maps are constructed with the parameters  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{AM}$  corresponding to the HD60532 system. The symbols show locations of the stationary solutions of the Hamiltonian (see text for details).

$\mathcal{AM}$ . The separatrix-like energy level surrounding the global maximum (red dot) is shown by dashed curve in Figure 5 *right*. Finally, the regions of the  $(n_1/n_2, e_2)$ -plane, where there are no solutions of Eqs. (8-9) for the given constants, are shown by gray color. This representative plane will be widely used in the next sections to portray the main features of the 3/1 resonant dynamics.

The previous test of stability has shown that the second elliptic point associated to the  $(0, 0)$ -ACR and marked by a blue dot in Figure 5 *left*, is unstable; therefore, we will not discuss the dynamics around this points.

#### 4.2 Stationary orbits of the averaged 3/1 resonance problem (ACR)

As shown in the previous section, ACRs appear as fixed points, of elliptic or saddle types, in the energy levels maps constructed for given values of the parameters  $\mathcal{AM}$  and  $\mathcal{K}$ . To obtain these special solutions over a large range of the parameters, we employ the geometrical method presented in Michtchenko et al. (2006). As shown in that paper, the position and stability of the ACR solutions are only marginally dependent on the spacing parameter  $\mathcal{K}$ , thus, in this section, we fix  $\mathcal{K}$  and vary the other two parameters,  $m_2/m_1$  and  $\mathcal{AM}$ . Choosing the values of the semimajor axes  $a_1$  and  $a_2$  from Table 1, the value of the spacing parameter  $\mathcal{K}$  is then obtained using Eq. (8), for a given mass ratio.

Usually, ACRs are classified in two types: symmetric and asymmetric solutions (e.g. Beaugé et al. 2003, Lee 2004, Voyatzis and Hadjidemetriou 2005). The symmetric solutions are characterized by stationary values of both resonant and secular angles at zero or  $180^\circ$ , while for asymmetric solutions the values of the angles are different from zero or  $180^\circ$ .

##### 4.2.1 Symmetric ACRs

Figure 6 shows the families of the symmetric 3/1 ACRs parameterized by the values of the mass ratio  $m_2/m_1$ , from 0.1 to 20, on the representative  $(e_1, e_2)$ -plane. Once again, the positive (negative) values on the  $e_1$ -axis correspond to  $2\sigma_1$  fixed at  $0$  ( $180^\circ$ ), while the positive (negative) values on the

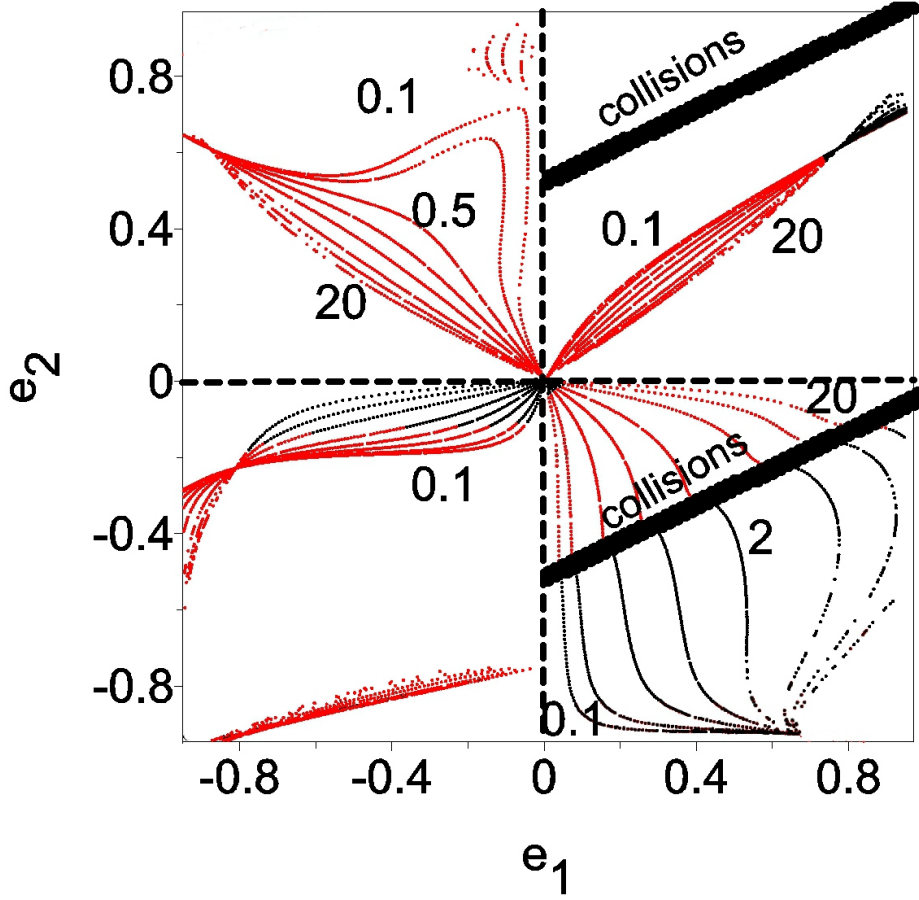


Fig. 6: Families of symmetric ACRs of the 3/1 MMR, parameterized by the mass ratio  $m_2/m_1 \in [0.1, 20]$ . The positive (negative) values of  $e_1$  correspond to  $2\sigma_1$  equal to 0 ( $\pi$ ), while the positive (negative) values of  $e_2$  correspond to  $\Delta\varpi$  equal to 0 ( $\pi$ ). *Black curves* correspond to stable solutions. *Red curves* show unstable symmetric ACRs and *broad lines* show locations of the initial conditions for which the planetary orbits become crossing, allowing collisions to occur.

$e_2$ -axis correspond to  $\Delta\varpi$  fixed at 0 ( $180^\circ$ ). The thick lines are the locus of configurations leading to possible collisions between the planets and given by the condition

$$a_1 [1 + e_1 \cos 2\sigma_1] = a_2 [1 + e_2 \cos \Delta\varpi]. \quad (11)$$

The symmetric ACRs exist for all possible combinations of the angular variables, such as  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$ ,  $(0, \pi)$  and  $(\pi, \pi)$ , where the numbers inside the brackets indicate the stationary values of  $2\sigma_1$  and  $\Delta\varpi$ . However, not all of these solutions are stable. The stability of ACRs can be determined analyzing the structure of the Hamiltonian (5-6) in the vicinity of ACRs on the plane of the angular variables  $(2\sigma_1, \Delta\varpi)$ .

An example is shown in Figure 7, where the energy levels are plotted by solid curves, while the background gray scale varies from dark tones to light ones, for increasing values of  $\mathcal{H}$ . The left graph shows a stable symmetric  $(\pi, \pi)$ -ACR (black dot) as an elliptic point of the maximal energy, while the right graph shows a saddle-type structure of the phase space, with an unstable symmetric  $(\pi, \pi)$ -ACR and two asymmetric elliptic points of the maximal energy (black dots).

Performing this analysis for all solutions shown in Figure 6, we separate them in the stable (black dots) and unstable (red dots) ones. We find that the families of the stable symmetric ACRs corresponding to the global maximum of the Hamiltonian (5-6) are located in the  $(\pi, \pi)$ -quadrant in Figure 6. The stable solutions can be found also in the  $(0, \pi)$ -quadrant: they have very high

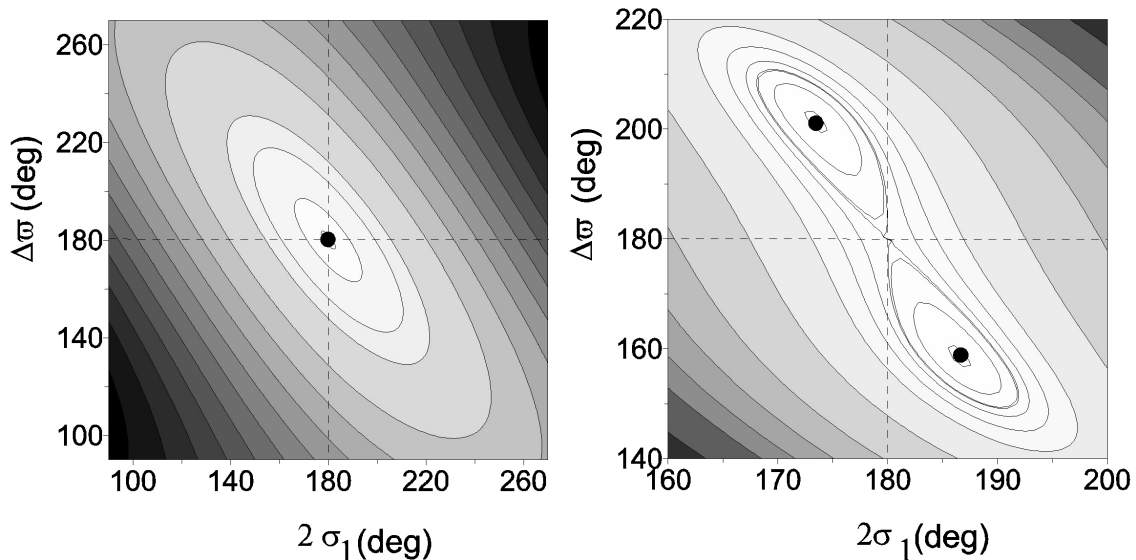


Fig. 7: Level curves of the Hamiltonian (5-6) as functions of the resonant angle  $2\sigma_1$  and the secular angle  $\Delta\varpi$ , around two symmetric ACRs with  $m_2/m_1 = 2.36$ . Left: Stable symmetric solution for  $e_1 = 0.093$  and  $e_2 = 0.035$ . Right: Unstable symmetric solution for  $e_1 = 0.45$  and  $e_2 = 0.13$ .

eccentricities and located beyond the collision curve. Considering that the probability of finding exoplanets on such eccentric orbits is low, in this paper, we focus on the study of the dynamics only around  $(\pi, \pi)$ -ACR solutions.

#### 4.2.2 Asymmetric ACRs

The stable asymmetric ACRs of the 3/1 MMR appear at bifurcations of symmetric solutions along the  $(\pi, \pi)$ -families, when these pass from stable to unstable. This case is illustrated in Figure 7, right panel, where the hyperbolic  $(\pi, \pi)$ -point gives the origin to an asymmetric solution presented by two points. The calculation of the asymmetric ACRs adopts the geometrical approach presented in Michtchenko et al. (2006).

Figure 8 summarizes the information on the stable symmetric and asymmetric ACRs of the 3/1 MMR showing their families parameterized by the mass ratio  $m_2/m_1$  on the  $(e_1, e_2)$ -plane. At small eccentricities, all solutions are symmetric and of  $(\pi, \pi)$ -type; they are continuously increasing with the increasing planetary eccentricities (gray curves). This smooth evolution along symmetric families is interrupted by a sudden increase of the outer planet's eccentricity. The corresponding symmetric solutions become unstable and the stationary system evolves now along an asymmetric segment of the corresponding family (black curves).

For higher eccentricities, the families of asymmetric ACRs can bifurcate into two branches (identified as A and B in Figure 8). To the left, we note a funneling of all solutions toward a narrow diagonal region (branch B). To the right, we see a convergence point located approximately at  $(e_1, e_2) = (0.5, 0.5)$ , after which the solutions for all mass ratios practically coincide (branch A). Shortly following this convergence, the asymmetric solutions return to symmetric ACRs, this time of the  $(0, 0)$ -type. A similar two-branch structure was also noted for the 2/1 MMR and was explained by effects of the true secular resonance *inside* the mean-motion resonance (see Michtchenko et al. 2008b). The asymmetric solutions exhibit a very complex dynamics, which is out of the scope of this paper. Finally, the stable  $(0, \pi)$ -ACRs located beyond the collision curve are shown by dot symbols in Figure 8.

By definition, asymmetric ACR are characterized by stationary values of both resonant and secular angles different from zero or  $180^\circ$ . The appearance and the evolution of the asymmetric solutions with the increasing outer planet's eccentricity is illustrated in Figure 9, for two different values of the mass ratio, 0.2 (red curves) and 2.36 of the HD60532 system (black curves). The angles

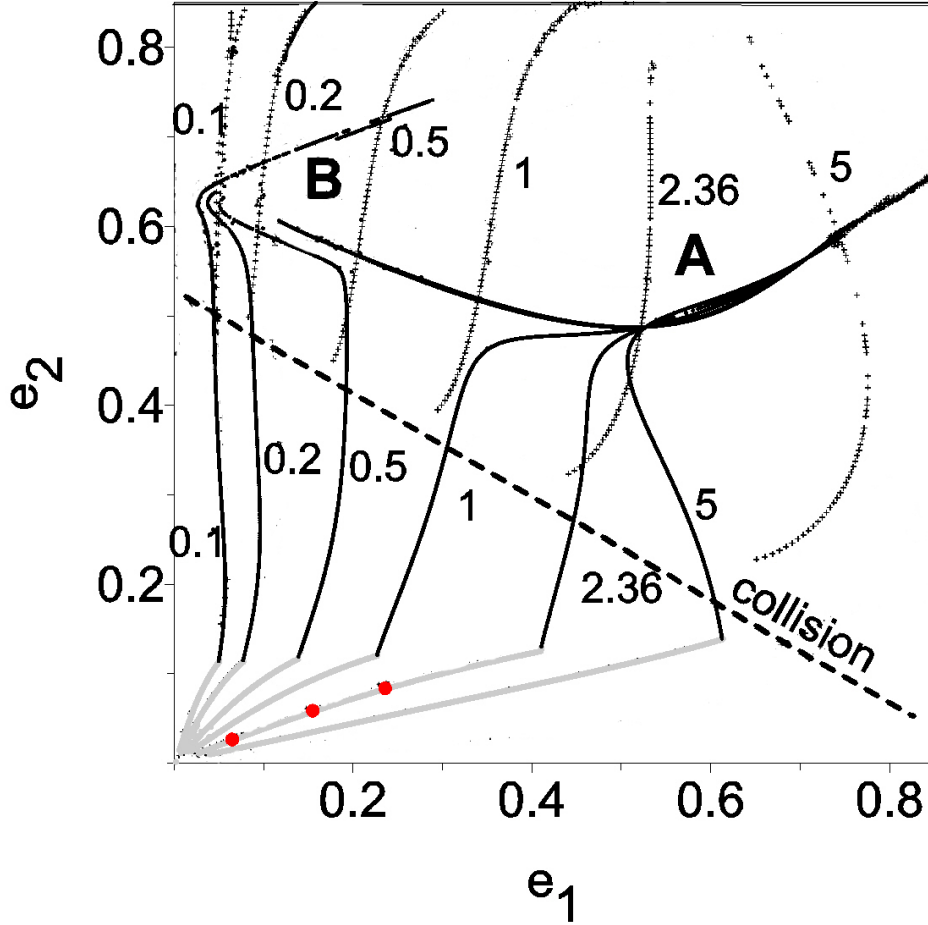


Fig. 8: Families of the stable ACRs for the 3/1 MMR, parameterized by the mass ratio  $m_2/m_1$ . *Gray solid lines* correspond to symmetric  $(\pi, \pi)$ -type ACRs, *black solid lines* to stable asymmetric solutions, and *black dots* to symmetric  $(0, \pi)$ -type ACRs. Dashed line shows the collision curve. Three red dots indicate positions of ACRs, whose domains will be mapped in Sect. 5.

$2\sigma_1$  and  $\Delta\varpi$  are trapped at  $180^\circ$  at small eccentricities that indicates symmetric character of the ACRs. The bifurcations to the asymmetric solutions occur around  $e_2 \sim 0.1$ , for both values of the mass ratio. The systems evolve in the asymmetric configurations up to  $e_2 = 0.6$ , when they return to symmetric configurations of the  $(0, 0)$ -type.

#### 4.3 The Law of Structure

It is important to emphasize that the ratios of the mean motions of the resonant stationary configurations of the planets generally deviate from the nominal value 3/1 and are functions of the free parameters,  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{AM}$  (i.e. of the eccentricities of the ACRs). This feature is known as the 'Law of Structure' and was first observed in the studies of the asteroidal resonant dynamics (Ferraz-Mello 1988).

Figure 10 shows the evolution of the mean-motion ratio of two planets in the stationary configuration as a function of the eccentricity of the outer planet. In all cases, the masses of the planets were fixed at values of the masses of the HD60532 system, with  $m_2/m_1 = 2.36$ , but we adopted several values of the individual planetary mass factor, which are indicated beside each curve in Figure 10. The variation of  $n_1/n_2$  with the eccentricity shows that, for stationary solutions, the ratio of orbital periods deviates from 3/1, in such a way that its value is always above the nominal resonance value.



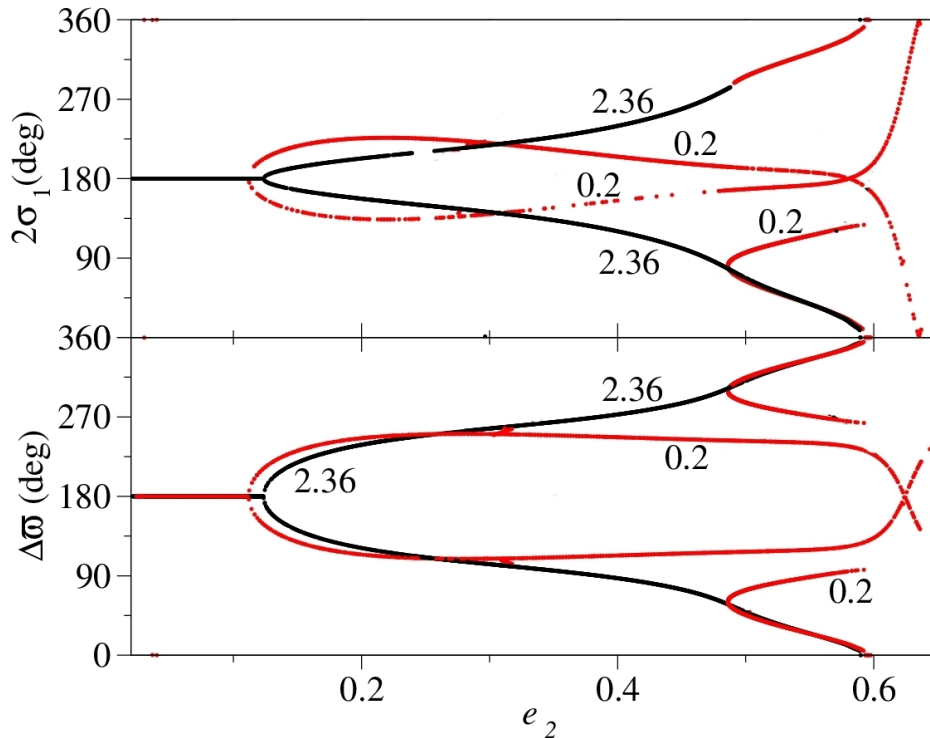


Fig. 9: Stationary values of the resonant angle  $2\sigma_1$  (top) and the secular angle  $\Delta\varpi$  (bottom) for the two families of the ACRs, one parameterized by  $m_2/m_1 = 2.36$  (black) and other by  $m_2/m_1 = 0.2$  (red). Angles are shown as functions of the outer planet's eccentricity.

Therefore, resonance pairs evolving in nearly-stationary configuration (that is, with small oscillations) will be always concentrated at one side of the nominal value  $3/1$ , for instance, at the left side in Figure 1. Moreover, the deviation will increase for the decreasing values of eccentricities. The projection of the oscillation of the HD60532 planetary pair around the corresponding stationary solution (ACR) is shown by red dots in Figure 10. The resonant oscillations of the semimajor axes of the planets shown in Figure 3 appear now as a small oscillation of the mean-motion ratio around  $n_1/n_2 \sim 3.03$ , while the outer planet's eccentricity varies in the range between 0.05 and 0.15.

Figure 10 also shows that the mean-motion ratio is sensible to values of the individual planetary masses. Indeed, the deviation from the nominal value  $3/1$  is an increasing function of the increasing individual planetary masses, even if the mass ratio is kept fixed. This feature contrasts with the behaviour of the stationary values of eccentricities and angular variables, which are only marginally dependent on the individual planetary masses (Beaugé & Michtchenko 2003).

## 5 Dynamics around the ACRs

To analyze the dynamics of the  $3/1$  resonance in the region of the phase space beyond each symmetric ACR, we apply Spectral Analysis Method (SAM) developed in Michtchenko et al. (2002) and described in details in Ferraz-Mello et al. (2005). The method allows us to study the structure of the phase space around ACRs in form of dynamical maps on the  $(n_1/n_2, e_2)$  representative planes of initial conditions.

Figures 11, 13 and 15 show the dynamical maps constructed around three different values of ACR chosen along the family parameterized by  $m_2/m_1 = 2.36$  (see Figure 8). It is worth emphasizing that the topology of the maps is uniquely defined by two free parameters of the problem,  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{AM}$ .  $\mathcal{K}$  is same for all maps; its value is fixed at 0.6345 (in units of the solar mass, astronomical unit and year), and corresponds to the physical and orbital parameters of the HD60532 system in Table 1.

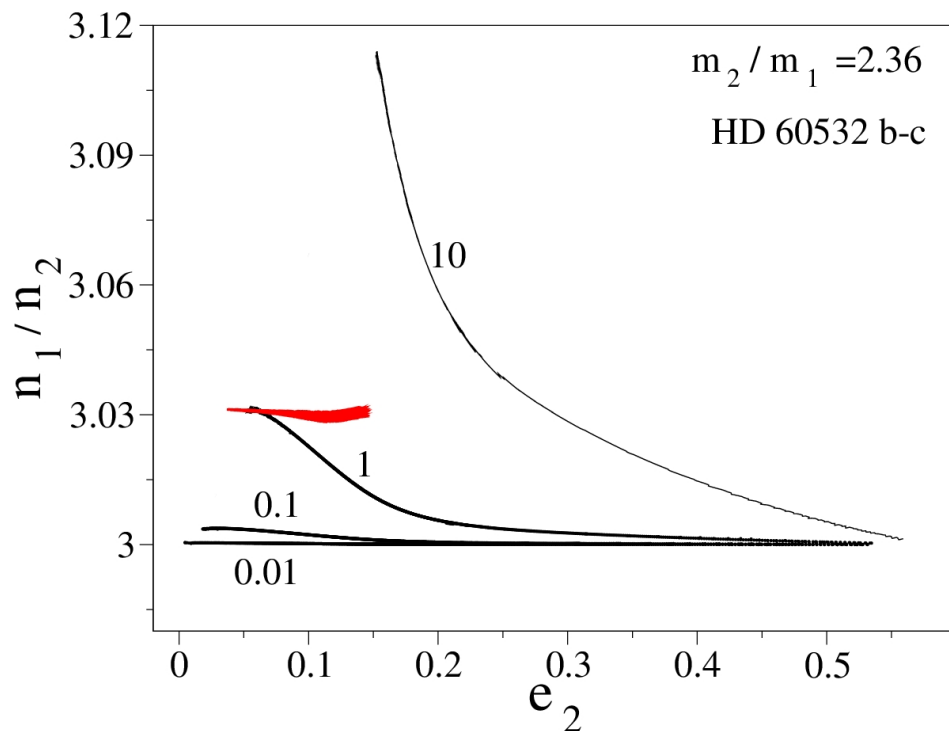


Fig. 10: Variation of the ratio of planetary mean motions  $n_1/n_2$  for symmetric  $(\pi, \pi)$ -type ACRs, as a function of the outer planet's eccentricity (Law of Structure). All curves are calculated for the fixed value of  $m_2/m_1 = 2.36$  corresponding to the HD60532 planets, but the values of the individual planetary masses are simultaneously decreased by the factor whose values are shown beside each curve. *Red curve* is a projection of the HD60532 resonant oscillation on the  $(e_2, n_1/n_2)$ -plane.

The value of the angular momentum  $\mathcal{AM}$  varies from one map to other. In this paper, instead of giving this value, we match each solution with the value of the eccentricity of the inner planet. In this way, it is easy to identify the location of the studied ACRs shown by three red dots on the corresponding family in Figure 8. The ACRs under study characterize three different ranges of the planetary eccentricities: low ( $e_1 = 0.06$ ), moderate ( $e_1 = 0.15$ ) and high ( $e_1 = 0.278$ ), the last value corresponding to the current value of the inner planet of the HD60532 system.

### 5.1 General characteristics of dynamical maps

Although many aspects of the dynamical maps change as functions of  $\mathcal{AM}$ , there are also some general features, which are common for different sets of the constants.

Each map in Figures 11, 13 and 15 contains a center, which represents the  $(\pi, \pi)$ -ACR solution; its position is shown by a red dot on the map. Around each center we find a region of quasi-periodic motion coded in gray scale. Light gray tones indicate regular motion, while darker tones correspond to increasingly chaotic orbits. The hatched areas are the region of forbidden motion where there are no solutions of Eqs. (8-9) for a given set of the constants  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{AM}$ .

The quasi-periodic behavior inside the 3/1 MMR is an interaction of two modes of motion, associated with the two independent frequencies of the averaged resonant system. These modes are the resonant (with the frequency  $f_{\text{res}}$ ) and the secular (with the frequency  $f_{\text{sec}}$ ) modes of motion. The first is associated to the oscillation of the semimajor axes (see Figure 3 *top*) and resonant angle  $2\sigma_1$ . The second mode of motion is associated to the secular oscillation of the eccentricities (see Figure 3 *bottom*) and the difference in longitudes of pericenter,  $\Delta\varpi$ .

Any regular solution will be given by a linear combination of two periodic terms, each with a given amplitude and phase angle. Generally, both modes are well separated in the frequency



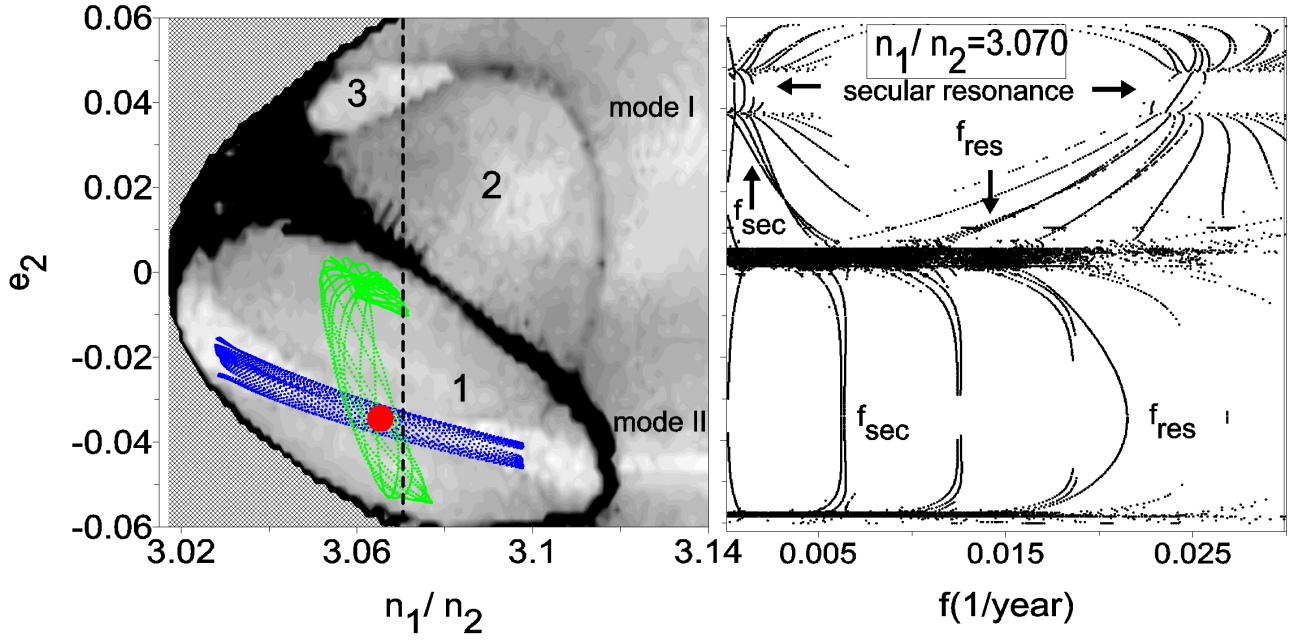


Fig. 11: Left: Dynamical map of the domain around the stable symmetric  $(\pi, \pi)$ -ACR with  $e_1 = 0.06$  and  $m_2/m_1 = 2.36$ . The initial value of  $2\sigma_1$  is fixed at  $180^\circ$  and the initial value of  $\Delta\varpi$  is fixed at  $0$  (positive values on the  $e_2$ -axis) or  $180^\circ$  (negative values on the  $e_2$ -axis). *Red circle* shows location of ACR. Number **1**, **2** and **3** indicate domains of distinct regimes of motion. *Green* and *blue dots* are projections of two planetary paths (see text for details). Right: Dynamical power spectrum obtained along the horizontal dashed line in dynamical map, showing the proper frequencies of the system as functions of  $e_2$ . The smooth evolution of the proper frequencies  $f_{\text{res}}$  and  $f_{\text{sec}}$  is characteristic of the regular motion, while the erratic scattering of the points is characteristic of the chaotic motion.

space, with  $f_{\text{res}}$  much higher than the secular frequency  $f_{\text{sec}}$ . However, at small eccentricities, both frequencies may have a same order, and it is possible to find initial conditions corresponding to low-order commensurabilities between them. These commensurabilities give origin to so-called *secondary resonances* inside the primary 3/1 resonance, which are also observed in the asteroidal dynamics (e.g. Moons and Morbidelli 1993).

The domains of chaotic motion are always present on dynamical maps of the 3/1 mean-motion resonance. The chaos is associated with the existence of separatrices between the 3/1 resonance region and the regions of quasi-resonant and purely secular motion, and between the secondary resonances inside the primary 3/1 resonance. The domains of strongly chaotic motion appear in dark tones on the dynamical maps and are regions of large-scale instabilities followed by disruption of the system within the lifetime of the central star.

Finally, the dynamical maps in Figures 11, 13 and 15 are always accompanied by dynamical power spectra, whose construction is described in detail in Michtchenko et al. (2002). Briefly, the spectra show the evolution of the main frequencies of the systems,  $f_{\text{res}}$ ,  $f_{\text{sec}}$  and their linear combinations, as functions of either the mean-motion ratio  $n_1/n_2$  or the eccentricity of the outer planet  $e_2$ . The smooth evolution of the frequencies is characteristic of regular motion, while the erratic scattering of the frequency values is characteristic of the chaotic motion. In addition, the domains where one of the frequencies tends to zero accurately indicate the location of the separatrices between distinct regimes of motion.

## 5.2 Low-eccentricity symmetric ACR dynamical maps

The first map (Figure 11 *left*) was calculated for a small initial eccentricity of the inner planet ( $e_1 = 0.06$ ) and illustrates the transition from the purely secular regime of motion towards the resonant one. Indeed, the capture of the migrating planetary pair into the 3/1 MMR is more likely when the planets evolve on the nearly circular orbits (see Figure 2).

For initial conditions far from the center of the resonance (for instance, any point with  $n_1/n_2 > 3.12$ ), the system is evolving in the purely secular regime. Its motion is defined by the composition of two normal secular modes, which are usually referred to as *Mode I* and *Mode II* of motion. Mode I corresponds to the aligned configuration of the planets ( $\Delta\varpi = 0$ ), with the minimal possible energy of the system for a given  $\mathcal{AM}$ . Mode II describes an anti-aligned configuration ( $\Delta\varpi = 180^\circ$ ) and corresponds to the maximal values of the energy. On the dynamical map, these modes appear as light-colored strips in the domain of the secular motion. The entrance of the pair of planets, with  $m_2/m_1 > 1$ , into the 3/1 mean-motion resonance seems to occur through the Mode II of motion of the maximal energy. Numerical simulations of planetary migration confirm that the capture of planets on nearly circular orbits into a resonance is generally preceded by the evolution of the pair in the Mode II of secular motion, when the secular angle  $\Delta\varpi$  oscillates around  $180^\circ$  (Ferraz-Mello et al. 2003, Kley et al. 2005, Beaugé et al. 2006, Michtchenko & Rodriguez 2011).

Figure 11 (left panel) shows that the domain of the 3/1 MMR is separated into three distinct regions surrounded by layers of chaotic motion. These regions are associated with different regimes of motion of the system and we denote them by the numbers **1**, **2** and **3** in Figure 11. The dynamical power spectrum (right panel) constructed along the vertical line with  $n_1/n_2 = 3.07$  shows that, during transitions between the different regimes, one of the independent frequencies,  $f_{\text{res}}$  and  $f_{\text{sec}}$ , tends to zero. This feature is associated to the dynamics close to separatrix.

The dynamics in the regime **1** is a proper 3/1 MMR, with the resonant angle  $\sigma_1$  librating and the secular angle  $\Delta\varpi$  oscillating/circulating around  $180^\circ$ . The resonant motion is a composition of two independent modes, resonant and secular. To illustrate that, we show in Figure 11 *left* the projections on the  $(n_1/n_2, e_2)$ -plane of the two nearly periodic orbits. The green curve represents the low-amplitude oscillations in the resonant mode; therefore, in this case, we observe mainly the slow secular component in the orbital oscillations. The exchange of  $\mathcal{AM}$  between the two planets affects only the eccentricities, while the semimajor axes are almost constant in this case. On contrary, the blue curve in Figure 11 *left* is a projection of the orbit which exhibits mainly the fast resonant oscillations, in such a way that  $\Delta\varpi$  is almost constant and  $2\sigma_1$  librates with large amplitude around the ACR.

Figure 12 *left* shows separately the two components, resonant e secular, of a typical orbit in the regime **1** of motion. The red curve represents the secular mode and the sets show prograde direction of the oscillation around  $180^\circ$ . The black curve is a superposition of the resonant mode on the secular one. The typical values of the resonant and secular periods of oscillations can be assessed from the dynamical power spectrum in Figure 11 *right*; they are of order of several tens and some hundreds years, respectively.

The domain of the regime **2** of motion is a quasi-resonant region characterized by the simultaneous circulation of both  $2\sigma_1$  and  $2\sigma_2$ , in such way that the secular angle (which by definition is  $\Delta\varpi = \sigma_1 - \sigma_2$ ) oscillates around zero. A typical orbit from this region is shown in the  $(e_2 \cos \Delta\varpi, e_2 \sin \Delta\varpi)$ -plane by the black curve in Figure 12 *right*. Once again, we separate the secular component of the oscillation applying low-pass filtering; it is shown by the red curve in Figure 12 *right*. Note that, although the secular oscillation occurs now around zero, it is still prograde, similar to one shown on the top graph of the same figure.

The distinct behaviour of the system in the regime **2** can be understood analyzing the evolution of the main frequencies on the dynamical power spectrum in Figure 11 *right*. The domain of this regime is located above the layer of strongly chaotic motion at  $e_2 \sim 0$ , which separates the libration of the resonant angle  $2\sigma_1$  from its circulation. The main feature of the dynamics in the regime **2** is a decay of the secular frequency  $f_{\text{sec}}$  with increasing eccentricity of the outer planet, approaching zero at  $e_2 \sim 0.04$ . This is due to fact that, at this condition, the secular angle  $\Delta\varpi$  changes the direction of its oscillation/circulation from prograde, in the quasi-resonant regime, to retrograde, in the purely secular regime of motion of the system. For some initial conditions, this transition raises

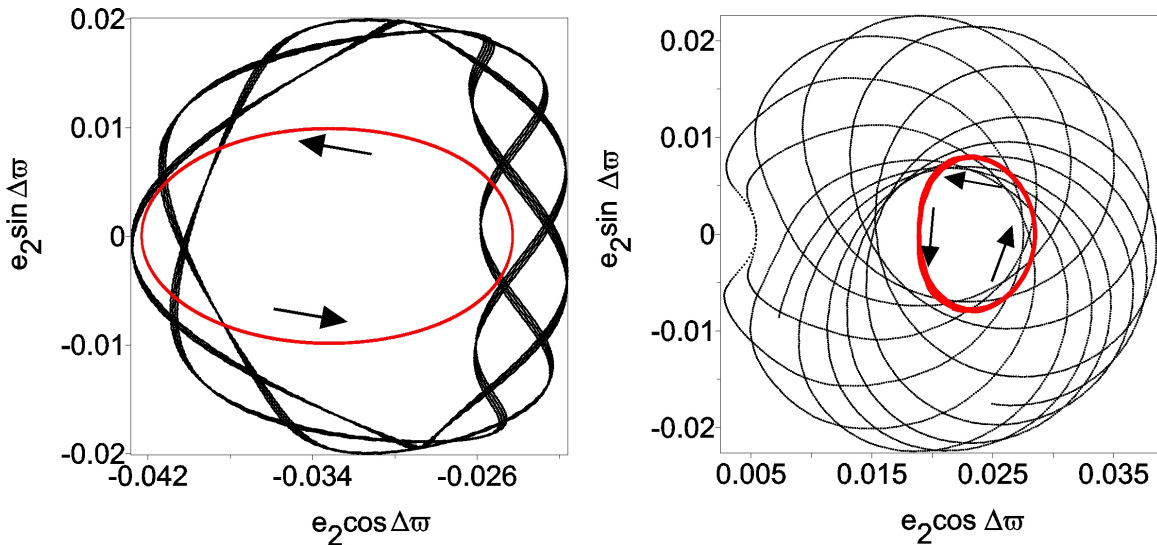


Fig. 12: Left: *Black line* shows one orbit from the domain **1** on the dynamical map in Figure 11 left. *Red line* is a secular component of this orbit. Right: Same as on the left panel, except for the domain **2**, except constructed along the vertical dashed line on the left panel.

a very specific regime of the stable motion, which we refer to as 'true secular resonance'. On the dynamical map in 11 *left* the domain of this regime is marked by the number **3**.

The domain of the secular resonance is small; it is extended in the range  $0.04 - 0.05$  along the eccentricity of the outer planet and is delimited by the narrow layers of chaotic motion associated with this resonance. The dynamics inside the secular resonance characterized by the libration of the secular angle  $\Delta\varpi$  around zero, while the resonant angle  $2\sigma_1$  is in retrograde circulation.

### 5.3 Moderate-eccentricity symmetric ACR dynamical maps

We present the dynamics of the system at moderate eccentricities of the planets in Figure 13. On the top panel of the figure, we plot the dynamical map constructed for  $e_1 = 0.15$ , while, on the bottom graph, we present the dynamical power spectrum calculated along the  $n_1/n_2$ -axis, with  $e_2$  fixed at  $-0.026$ . On the dynamical map, this  $e_2$ -value is represented by the dashed horizontal line.

Comparing to the low-eccentricity dynamics shown in Figure 11, we can note that the planetary dynamics shows no qualitative changes at increasing eccentricities. Both main regimes of motion, resonant and quasi-resonant, are present on dynamical map in Figure 13 *top*. As expected, the domain of the 3/1 MMR increases, while the layers of chaotic motion are expanded. The resonant regime of motion **1** is a combination of two oscillation modes, resonant and secular, around the corresponding ACR solution (red dot), located at  $2\sigma_1 = \Delta\varpi = 180^\circ$ . The evolution of the two independent frequencies,  $f_{\text{res}}$  and  $f_{\text{sec}}$  can be observed on the dynamical power spectra in Figure 13 *bottom*.

The quasi-resonant regime of motion **2** also preserves its main properties, when both critical angles  $2\sigma_1$  and  $2\sigma_2$ , circulate retrogradely, while the secular angle oscillate/circulates in the prograde direction. The broad chaotic layer separating the domain of the quasi-resonant motion from that of the purely secular motion does not allow us to detect the presence of the secular resonance in the regime **3**.

On the other hand, some new features appear in the dynamics at the moderate eccentricities in Figure 13. One of these features are secondary resonances located at small eccentricities and forming the web of the periodic and chaotic orbits in the transition from the resonant **1** to the quasi-resonant **2** regimes of motion. The most strong of these is a 4/1 commensurability between the frequencies  $f_{\text{res}}$  and  $f_{\text{sec}}$  represented by the family of periodic solutions inside the chaotic layer in this region (light tones).

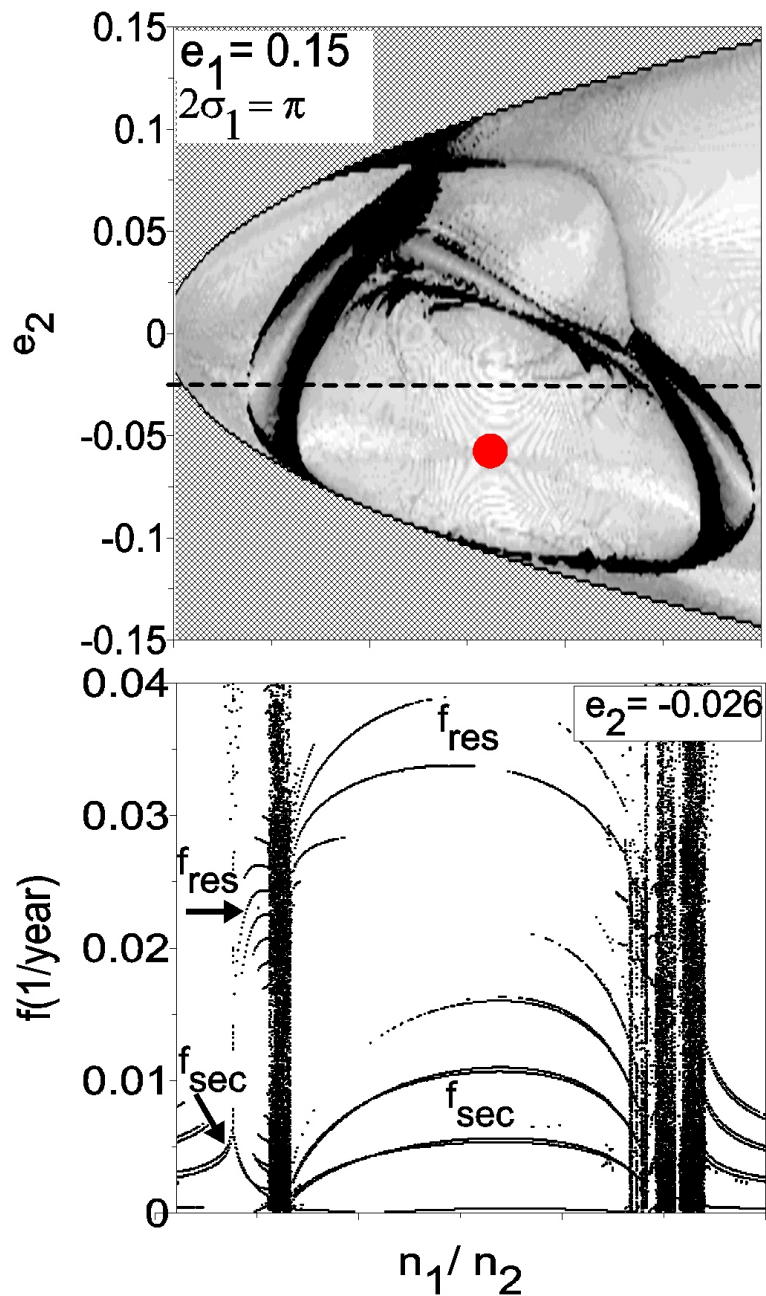


Fig. 13: Top: Same as in Figure 11 *left*, except for  $e_1 = 0.15$ . Bottom: Same as in Figure 11 *right*, except calculated along the horizontal dashed line.

The other feature is a complex structure of the chaotic layers which separate the 3/1 MMR domain from the secular one. We can observe the existence of stable periodic solutions just inside the separatrices. Figure 14 shows a typical behaviour of the resonant and secular angles inside these narrow regions of stable motion. We note that, while the resonant angle  $2\sigma_1$  librates around  $180^\circ$  with very large amplitudes ( $\sim 120^\circ$ ), the secular angle  $\Delta\varpi$  oscillates around the same value, but with small amplitude. The similar property was also observed in the case of the 3/2 and 2/1 asteroidal resonance dynamics (Michtchenko & Ferraz-Mello 1995) and was associated to the true secular

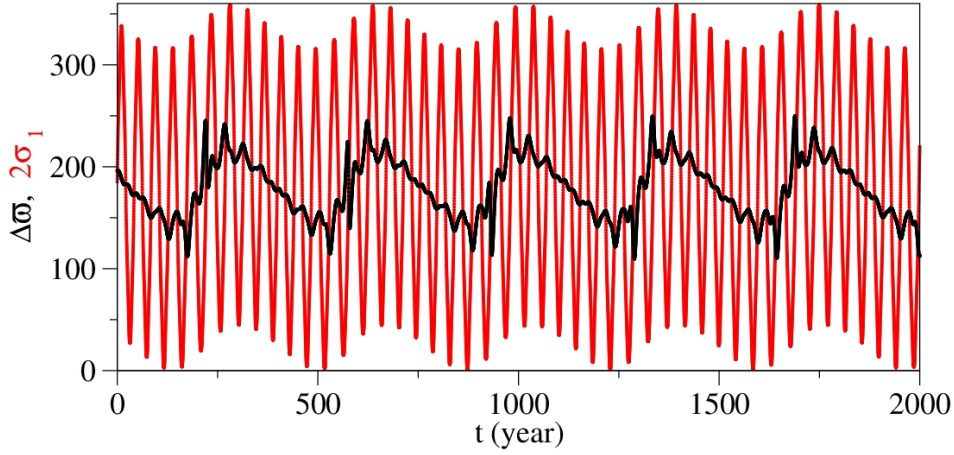


Fig. 14: Stable evolution of the resonant angle  $2\sigma_1$  (red) and the secular angle  $\Delta\varpi$  (black), typical for the initial conditions inside the secular resonance.

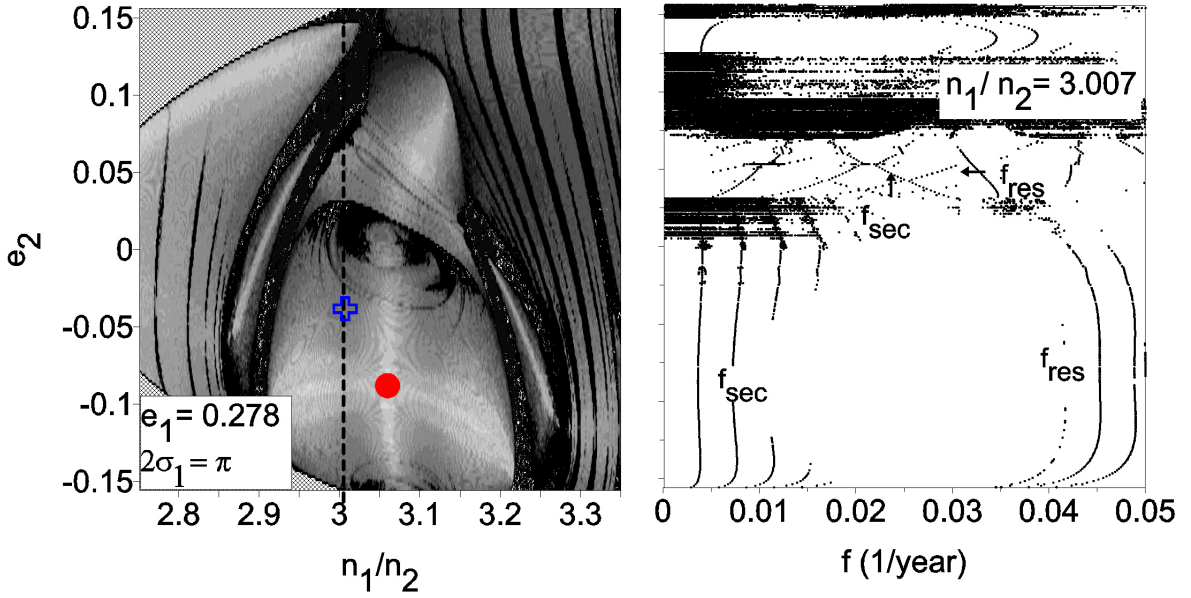


Fig. 15: Same as in Figure 11, except for  $e_1 = 0.278$ . *Blue symbol* shows the location of the HD60532 b-c system on the dynamical map.

resonance, which appears in the transition from the resonant zone, where  $\Delta\varpi$  oscillates/circulates progradely, to the secular zone, where the direction of the circulation of the secular angle is inverted.

#### 5.4 High-eccentricity symmetric ACR dynamical map

The physical and orbital parameters of the HD60532 b-c system, with  $e_1 = 0.278$  (see Table 1), were used to present the high-eccentricity dynamics of the 3/1 MMR. Figure 15 shows the corresponding dynamical map (left panel) and dynamical power spectrum (right panel). The spectrum was calculated along the dashed vertical line on the dynamical map, with the fixed value  $n_1/n_2 = 3.007$ , which corresponds to the HD60532 planets. The location of the system on the dynamical map is shown by a cross symbol and the red circle is a center of the resonant region where the HD60532 planets evolve.

The structure of the phase space observed in Figure 15 *left* is very similar to that observed at moderate eccentricities. The domain of the resonant motion surrounding the central ACR (red circle) is dominating on the dynamical map and is separated from the region of the quasi-resonant motion by the thick chaotic layer of the complex structure. The HD60532 system is located inside the resonance zone and oscillates around the corresponding ACR, with the  $2\sigma_1$ -amplitude of  $\sim 120^\circ$  and the  $\Delta\varpi$ -amplitude of  $\sim 80^\circ$ . Note that such large value of the amplitude of the critical angle is due to the composition of the resonant and secular modes in its oscillation, both with amplitudes of  $\sim 60^\circ$ . The numerical tests have shown that the behaviour of the system is stable over timespan of 5 Gyears (Laskar & Correia 2009). However, it is worth emphasizing that the presence of the tiny chaotic layers associated to secondary resonances in the close vicinity of the system could destabilize its motion in the case of possible corrections of the orbits due to future observations. Thus, to assess the long-term stability of the HD60532 system, the more detailed study of the domain where the system evolves, is needed.

The region of the quasi-resonant regime of motion shows a complex structure, with several strips of chaotic motion crossing the region. The analysis of the dynamical power spectrum in this region (right panel in Figure 15) confirms that, in this regime of motion, the independent frequencies  $f_{\text{sec}}$  and  $f_{\text{res}}$  become comparable and a beating between them or their harmonics occurs producing a number of secondary resonances inside the 3/1 MMR.

Finally, several narrow black strips on both sides of the whole 3/1 MMR are associated to high-order mean-motion resonances, that always accompany main low-order commensurabilities at high eccentricities.

## 6 Conclusions

In this paper we present a detailed analysis of the structure of the planetary 3/1 mean-motion resonance, when the outer planet is more massive than the inner one. In this case, all resonant motions are associated to a libration of the critical angle  $2\sigma_1 = 3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\varpi_1$ , while the secular angle associated to the difference in longitudes of pericenter  $\Delta\varpi$ , oscillates/circulates. The composition of these two modes results in quasi-periodic oscillations of the system around a center of the 3/1 resonant domain defined by a global stationary solution,  $(\pi, \pi)$ -ACR. The location of an ACR is uniquely defined by two free parameters of the problem, the total angular momentum and the scaling parameter.

Applying the semi-analytical approach we analyse the topology of the Hamiltonian which describes the 3/1 MMR and obtain the families of stable symmetric and asymmetric ACRs parameterised by the planetary mass ratio. The stable symmetric families of the  $(\pi, \pi)$ -type are characteristic of the low and moderate eccentricity regions of the phase space, while those of the  $(0, \pi)$ -type located beyond the collision curve defined by initial conditions for which the planetary orbits become crossing, allowing collisions to occur. In this paper, we analyse the planetary dynamics around the  $(\pi, \pi)$ -ACRs.

To investigate the dynamical structures of the phase space of the 3/1 MMR, we construct dynamical maps on the representative  $(n_1/n_2, e_2)$ -planes of initial conditions, for low, moderate and high values of the inner planet's eccentricity, corresponding to three different ACRs, all associated to the HD60532 system. We show that the phase portrait of the 3/1 MMR is populated by a complex structure of stable modes of motion. Each ACR is shown to be the intersection of two distinct stable modes of motion, one resonant (associated to the resonant angle  $2\sigma_1$ ) and one secular (associated to the secular angle  $\Delta\varpi$ ). For low values of the eccentricities, secondary resonances can also be found, where the librational and the secular frequencies are commensurable. These secondary resonances in turn generate thin chaotic layers, and form a complex picture between the ACR and the edge of the resonant domain.

In addition, we detect the region of the stable quasi-resonant behaviour of the planets, where both critical angles of the 3/1 MMR circulate, while the secular angle oscillates around zero. This region is observed for all values of the total angular momentum analysed. This regime of the motion is topologically distinct from the pure secular regime due to opposite direction of the  $\Delta\varpi$ -oscillation. Therefore, the domains of instable motion can be found separating the two regions.



## Acknowledgments

This work has been supported by the Brazilian National Research Council - CNPq. The authors are grateful to Prof. Dr. S. Ferraz-Mello, Dr. J. Correa-Otto, Dr. E. Andrade-Ines, and Dr. C. Beaugé, for numerous suggestions and corrections to this paper. This work has made use of the facilities of the Computation Center of the University of São Paulo (LCCA-USP) and of the Laboratory of Astroinformatics (IAG/USP, NAT/Unicsul), whose purchase was made possible by the Brazilian agency FAPESP (grant 2009/54006-4) and the INCT-A.

## References

1. Antoniadou, K. I., Voyatzis, G., Resonant periodic orbits in the exoplanetary systems, *Astrophysics and Space Science*, **349**, 657-676 (2014)
2. Beauge, C., Ferraz-Mello, S., Resonance trapping in the primordial solar nebula - The case of a Stokes drag dissipation, *Icarus*, **103**, 301-318 (1993)
3. Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Extrasolar Planets in Mean-Motion Resonance: Apes Alignment and Asymmetric Stationary Solutions, *The Astrophysical Journal*, **593**, 1124-1133 (2003)
4. Beaugé, C., Michtchenko, T. A., Modelling the high-eccentricity planetary three-body problem. Application to the GJ876 planetary system, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **341**, 760-770 (2003)
5. Beaugé, C., Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **365**, 1160-1170 (2006)
6. Bonfils, X., and 21 colleagues, The HARPS search for southern extra-solar planets. XXXIV. A planetary system around the nearby M dwarf GJ 163, with a super-Earth possibly in the habitable zone, *Astronomy and Astrophysics*, **556**, A110 (2013)
7. Callegari, N., Jr., Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., Dynamics of Two Planets in the 2/1 Mean-Motion Resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **89**, 201-234 (2004)
8. Callegari, N., Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Dynamics of Two Planets in the 3/2 Mean-motion Resonance: Application to the Planetary System of the Pulsar PSR B1257+12, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **94**, 381-397 (2006)
9. Dawson, R. I., Fabrycky, D. C., Radial Velocity Planets De-aliased: A New, Short Period for Super-Earth 55 Cnc e, *The Astrophysical Journal*, **722**, 937-953 (2010)
10. Ferraz-Mello, S., The high-eccentricity libration of the Hildas, *The Astronomical Journal*, **96**, 400-408 (1988)
11. Ferraz-Mello, S., Beaugé, C., Michtchenko, T. A., Evolution of Migrating Planet Pairs in Resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **87**, 99-112 (2003)
12. Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., Beaugé, C., Callegari, N., Extrasolar Planetary Systems, *Chaos and Stability in Planetary Systems*, **683**, 219-271 (2005)
13. Gautier, T. N., III, and 43 colleagues, Kepler-20: A Sun-like Star with Three Sub-Neptune Exoplanets and Two Earth-size Candidates, *The Astrophysical Journal*, **749**, 15 (2012)
14. Goldreich, P., Tremaine, S., The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential, *The Astrophysical Journal*, **233**, 857-871 (1979)
15. Goldreich, P., Tremaine, S., Disk-satellite interactions, *The Astrophysical Journal*, **241**, 425-441 (1980)
16. Gomes, R. S., The effect of nonconservative forces on resonance lock: Stability and instability, *Icarus*, **115**, 47-59 (1995a)
17. Gomes, R. S., Resonance Trapping and Evolution of Particles Subject to Poynting-Robertson Drag: Adiabatic and Non-Adiabatic Approaches, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **61**, 97-113 (1995b)
18. Han, E., Wang, S. X., Wright, J. T., Feng, Y. K., Zhao, M., Fakhouri, O., Brown, J. I., Hancock, C., Exoplanet Orbit Database. II. Updates to Exoplanets.org, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **126**, 827-837 (2014)
19. Kane, S. R., Gelino, D. M., On the Inclination and Habitability of the HD 10180 System, *The Astrophysical Journal*, **792**, 111 (2014)
20. Kley, W., On the migration of a system of protoplanets, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **313**, L47-L51 (2000)
21. Kley, W., Lee, M. H., Murray, N., Peale, S. J., Modeling the resonant planetary system GJ 876, *Astronomy and Astrophysics* **437**, 727-742 (2005)
22. Laskar, J., Analytical framework in Poincaré variables for the motion of the solar system, *Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems*, 93-114, Plenum Press, New York (1991)
23. Laskar, J., Correia, A. C. M., HD 60532, a planetary system in a 3:1 mean motion resonance, *Astronomy and Astrophysics*, **496**, L5-L8 (2009)
24. Laskar, J., Robutel, P., Stability of the Planetary Three-Body Problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **62**, 193-217 (1995)
25. Lee, M. H., Diversity and Origin of 2:1 Orbital Resonances in Extrasolar Planetary Systems, *The Astrophysical Journal*, **611**, 517-527 (2004)
26. Lin, D. N. C., Papaloizou, J., Tidal torques on accretion discs in binary systems with extreme mass ratios, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **186**, 799-812 (1979)

- 
27. Lovis, C., and 13 colleagues, The HARPS search for southern extra-solar planets. XXVIII. Up to seven planets orbiting HD 10180: probing the architecture of low-mass planetary systems, *Astronomy and Astrophysics*, **528**, A112 (2011)
  28. Marzari, F., Scholl, H., Tricarico, P., Frequency map analysis of the 3/1 resonance between planets b and c in the 55 Cancri system, *Astronomy and Astrophysics*, **442**, 359-364 (2005)
  29. Mayor, M., and 13 colleagues 2011, The HARPS search for southern extra-solar planets XXXIV. Occurrence, mass distribution and orbital properties of super-Earths and Neptune-mass planets, ArXiv e-prints arXiv:1109.2497 (2011)
  30. Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., Comparative study of the asteroidal motion in the 3:2 and 2:1 resonances with Jupiter. I. Planar model, *Astronomy and Astrophysics*, **303**, 945 (1995)
  31. Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., Modeling the 5 : 2 Mean-Motion Resonance in the Jupiter-Saturn Planetary System, *Icarus*, **149**, 357-374 (2001a)
  32. Michtchenko & Ferraz-Mello, Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets, *Astronomical Journal*, **122**, 474-481 (2001b)
  33. Michtchenko, T. A., Lazzaro, D., Ferraz-Mello, S., Roig, F., Origin of the Basaltic Asteroid 1459 Magnya: A Dynamical and Mineralogical Study of the Outer Main Belt, *Icarus*, **158**, 343-359 (2002)
  34. Michtchenko, T. A., Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **94**, 411-432 (2006)
  35. Michtchenko, T. A., Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **391**, 215-227 (2008a)
  36. Michtchenko, T. A., Beaugé, C., Ferraz-Mello, S., Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - I. Systems with a more massive outer planet, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **387**, 747-758 (2008b)
  37. Michtchenko, T. A., Ferraz-Mello, S., Beaugé, C., The periodic and chaotic regimes of motion in the exoplanet 2/1 mean-motion resonance, in *Third La Plata International School on Astronomy and Geophysics*, (P.M. Cincotta, C.M. Giordano, and C. Efthymiopoulos, eds.) (2011)
  38. Michtchenko, T. A., Rodríguez, A., Modelling the secular evolution of migrating planet pairs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **415**, 2275-2292 (2011)
  39. Moons, M., Morbidelli, A., The main mean motion commensurabilities in the planar circular and elliptic problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **57**, 99-108 (1993)
  40. Nelson, B. E., Ford, E. B., Wright, J. T., Fischer, D. A., von Braun, K., Howard, A. W., Payne, M. J., Dindar, S., The 55 Cancri planetary system: fully self-consistent N-body constraints and a dynamical analysis, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **441**, 442-451 (2014)
  41. Sándor, Z., Kley, W., Formation of the resonant system HD 60532, *Astronomy and Astrophysics*, **517**, A31 (2010)
  42. Snellgrove, M. D., Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., On disc driven inward migration of resonantly coupled planets with application to the system around GJ876, *Astronomy and Astrophysics*, **374**, 1092-1099 (2001)
  43. Tuomi, M., Evidence for nine planets in the HD 10180 system, *Astronomy and Astrophysics*, **543**, A52 (2012)
  44. Voyatzis, G., Hadjidemetriou, J. D., Symmetric and Asymmetric Librations in Planetary and Satellite Systems at the 2/1 Resonance, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **93**, 263-294 (2005)
  45. Voyatzis, G., Hadjidemetriou, J. D., Symmetric and asymmetric 3:1 resonant periodic orbits with an application to the 55Cnc extra-solar system, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **95**, 259-271 (2006)
  46. Zhou, L. Y., Lehto, H. J., Zheng, J. Q., The 3:1 Resonance in the 55 Cancri, Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems, **316**, 155 (2004)



## Appendix

The explicit expressions for the coefficients of the analytical first-order expansion of the Hamiltonian (10) of the 3/1 MMR:

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{M_1}{2J_1^3} + \frac{3}{2} \frac{M_2}{2J_2^3}, & B &= -\frac{3}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{M_1}{J_1^4}, \\
C &= -c_2 \frac{M_3}{J_1 J_2^2} + \frac{3}{2} c_1 \frac{M_1}{J_2^3}, & D &= -c_3 \frac{M_3}{J_2^3} + \frac{3}{2} c_1 \frac{M_3}{J_2^3}, \\
E &= -c_4 \frac{M_3}{J_2^2 \sqrt{J_1 J_2}}, & F_1 &= -\frac{1}{2} c_5 \frac{M_3}{J_2^2 J_1}, \\
F_2 &= -\frac{1}{2} c_6 \frac{M_3}{J_2^3}, & F_3 &= \frac{1}{2} c_7 \frac{M_3}{J_2^2 \sqrt{J_1 J_2}},
\end{aligned} \tag{12}$$

where  $M_1 = \mu_1^2 m_1^3$ ,  $M_2 = \mu_2^2 m_2^3$  e  $M_3 = m_1 M_2 / m_0$ , while  $c_i$  are the Laplace coefficients:

$$\begin{aligned}
c_0 &= -\frac{1}{2} \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha), \\
c_1 &= \frac{1}{2} b_{\frac{3}{2}}^{(0)}(\alpha), \\
c_2 &= \frac{1}{8} [2\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{\frac{3}{2}}^{(0)}, \\
c_4 &= \frac{1}{4} [2 - 2\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] b_{\frac{3}{2}}^{(1)},
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
c_5 &= \frac{1}{8} [21 + 10\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(3)}, \\
c_6 &= \frac{1}{4} [-20 - 10\alpha D_\alpha - \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(2)}, \\
c_7 &= \frac{1}{4} [17 + 10\alpha D_\alpha + \alpha^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^{(1)} - \frac{27}{8} \alpha,
\end{aligned}$$

where  $D_\alpha^i$  are n-th order derivative in  $\alpha = a_1/a_2$ . The coefficients  $b_i$  are obtained by the series:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} b_s^{(j)}(\alpha) &= \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{1.2.3\dots j} \alpha^j \\
&\times \left[ 1 + \frac{s(s+j)}{1(j+1)} \alpha^2 + \frac{s(s+1)(s+j)(s+j+1)}{1.2(j+1)(j+2)} \alpha^4 + \dots \right].
\end{aligned} \tag{14}$$

when  $j = 0$ ,

$$\frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{1.2.3\dots j} \alpha^j = 1, \tag{15}$$

and the series is convergent for  $\alpha < 1$ .