

Universidade de São Paulo
Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Departamento de Astronomia

Eduardo Andrade Inês

**Modelagem do Movimento Planetário nos
Sistemas de Estrelas Múltiplas**

São Paulo

2014

Eduardo Andrade Inês

Modelagem do Movimento Planetário nos Sistemas de Estrelas Múltiplas

Tese apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Astronomia
Orientadora: Prof.^a Dr.^a Tatiana A.
Michtchenko

São Paulo

2014

À Bia.

Agradecimentos

À minha família, por sempre acreditar em mim e apoiar minhas decisões, especialmente à Bia, pelo incondicional apoio nos bons e maus momentos, essenciais para a conclusão desse trabalho;

À professora Tatiana Michtchenko, pela paciência, pelos conselhos, pelo incentivo, pela dedicação e por me introduzir na vida acadêmica;

Ao Cristian Beaugé, pelo apoio, acolhimento, amizade e inestimável colaboração para a conclusão desse trabalho;

Aos professores do IAG, em especial ao professor Sylvio Ferraz-Mello, pelos todos ensinamentos e conselhos, essenciais na minha formação;

Aos amigos e colegas de grupo, Adrian, Alan, Gleidson, Hugo, Jorge, Luis e Marcos, pela paciência, dúvidas tiradas, idéias, desabafos e boas risadas;

Ao pessoal de *la casita* de Córdoba, em especial Cristian Giuppone, Ernesto, Javier, Pablo, Martín, pela calorosa recepção e fazerem o que poderia ser uma das experiências mais difíceis da minha vida ser uma das mais agradáveis;

Aos colegas do IAG, em especial Bruno e Phillip, por me acompanharem nessa jornada antes mesmo de inicia-la;

À FAPESP, pelo apoio financeiro, sob os projetos n^o: 2010/01209-2 e 2013/17102-0;

Ao IAG e seus funcionários, por propiciarem uma boa estrutura e um sempre agradável ambiente de trabalho.

“Olhamos as montanhas e dizemos que são eternas, e é o que parecem ser... Mas, no correr do tempo, montanhas erguem-se e ruem, rios mudam de curso, estrelas caem do céu, e grandes cidades afundam-se no mar.”

George R. R. Martin, *Fúria dos Reis*

“É um fato importante, e conhecido por todos, que as coisas nem sempre são o que parecem ser. Por exemplo, no planeta Terra os homens sempre se consideraram mais inteligentes que os golfinhos, porque haviam criado tanta coisa - a roda, Nova York, as guerras, etc. - enquanto os golfinhos só sabiam nadar e se divertir. Porém, os golfinhos, por sua vez, sempre se acharam muito mais inteligentes que os homens - exatamente pelos mesmos motivos.”

Douglas Adams, *O Guia do Mochileiro das Galáxias*

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo da dinâmica secular coplanar de um planeta em uma órbita tipo S em estrelas binárias. Para este fim, elaboramos modelos analíticos de primeira e segunda ordem, baseados em expansões da função perturbadora e teorias de perturbações Hamiltonianas. A fim de comparação, elaboramos modelos semi-analíticos, baseados no procedimento numérico de média.

Verificamos que a dinâmica secular é caracterizada por duas grandezas: a excentricidade forçada e a frequência secular. Ambas essas grandezas são definidas pelas soluções estacionárias da função Hamiltoniana secular e dependem apenas dos parâmetros do problema, tais como as massas, distâncias e momento angular total do sistema.

Apresentamos e desenvolvemos ferramentas numéricas para a obtenção de tais grandezas através de integrações das equações exatas de movimento. Em seguida, comparamos os resultados obtidos com aqueles dos modelos Analíticos de Primeira e Segunda Ordem obtidos.

Mostramos que cada modelo apresenta suas vantagens e limitações. Enquanto o modelo de Primeira Ordem é simples conceitualmente e de fácil implementação, o modelo de Segunda Ordem apresenta os resultados mais confiáveis, especialmente em domínios onde as perturbações são significativas.

Finalmente, determinamos os limites de aplicabilidade de cada modelo no espaço de parâmetros do problema, o que permite a escolha adequada do modelo a ser implementado no estudo de um dado sistema.

Abstract

In this work we study the secular dynamics of a planet evolving on a S-type coplanar orbit in binary star systems. For this purpose, we develop analytical models of both, first and second order, based on expansions of the disturbing function and perturbation Hamiltonian theories. For comparison, we elaborate semi-analytical models, based on the numerical averaging procedure.

We find that the secular dynamics is characterized by two quantities: the forced eccentricity and the secular frequency. Both quantities are obtained from the stationary solutions of the secular Hamiltonian and are defined by the values of the parameters of the problem, such as the masses, distances and the total angular momentum of the system.

We also present and develop a numerical approach to obtain the analogous quantities from the solution of the exact equations of motion. In what follows, we compare the results obtained to those obtained with the First and Second Order Analytical models.

We show that each model has its advantages and limitations. While the First Order model is conceptually simple and easy in implementation, the Second Order model provides the most reliable results, specially in domains of significant perturbations.

Finally, we determine the limits of applicability of each model in the parameter space of the problem, which allows us to choose the appropriate model to be implemented in the study of a given system.

Lista de Figuras

1.1	Representação dos tipos de movimento de um planeta p em um sistema binário composto pelas estrelas A e B	30
1.2	Representação da arquitetura dos planetas em órbitas do tipo S com separação menor que 1000 AU descobertos até julho de 2013. Os círculos em azul representam os planetas, com os raios proporcionais a $(m_p/m_{\text{Jup}})^{1/3}$, e os círculos em amarelo representam as companheiras binárias, com os raios proporcionais a $(m_B/m_A)^{1/3}$. As linhas horizontais representam a variação na distância dos corpos devido às excentricidades (quando são conhecidas), e as linhas verticais representam o limite de estabilidade orbital estimado por Holman & Wiegert (1999). Extraído de Thebault e Haghighipour (2014).	31
2.1	Representação do problema de 3 corpos	35
2.2	Definição do sistema de coordenadas de Jacobi	37
2.3	Representação das variáveis angulares do caso planar, onde Π_i , ϖ_i e f_i são, respectivamente, as posições dos pericêntricos, as anomalias verdadeiras e as longitudes dos pericêntricos do i -ésimo corpo.	41
2.4	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) e do desenvolvimento analítico da função perturbadora (azul) para o primeiro conjunto de integrações.	50
2.5	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) e do desenvolvimento analítico da função perturbadora (azul) para o segundo conjunto de integrações.	51

3.1	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) e do Hamiltoniano Secular analítico de primeira ordem (azul) para o primeiro conjunto de integrações.	57
3.2	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) e do Hamiltoniano Secular analítico de primeira ordem (azul) para o segundo conjunto de integrações.	58
3.3	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular analítico de primeira ordem (azul) e para o modelo Secular de Heppenheimer (1978) (verde) para o primeiro conjunto de integrações.	61
3.4	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular analítico de primeira ordem (azul) e para o modelo Secular de Heppenheimer (1978) (verde) para o segundo conjunto de integrações.	61
3.5	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico de Primeira ordem (azul) e do Hamiltoniano Secular Analítico de Primeira ordem (verde) para o primeiro conjunto de integrações.	65
3.6	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico de Primeira ordem (azul) e do Hamiltoniano Secular Analítico de Primeira ordem (verde) para o segundo conjunto de integrações.	65

3.7	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Semi-Secular Semi-Analítico de primeira ordem (azul) e do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico (verde) para o primeiro conjunto de integrações.	68
3.8	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Semi-Secular semi-analítico de primeira ordem (azul) e do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico (verde) para o segundo conjunto de integrações.	69
4.1	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular Analítico de Segunda Ordem (azul) e para o modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (verde) para o primeiro conjunto de integrações.	86
4.2	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular Analítico de Segunda Ordem (azul) e para o modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (verde) para o segundo conjunto de integrações.	86
5.1	Espaço de fase construído a partir do valor de momento angular total para o sistema fictício com os parâmetros apresentados na Tabela para os planetas c (acima) e d (abaixo) de v Andromedae. Na escala de cinza são apresentados os valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico e as curvas coloridas representam órbitas seculares (níveis de energia constante). As curvas em verde representam órbitas oscilando em torno do Modo I, as curvas em vermelho representam órbitas oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula.	92

5.2	Espaço de fase para as órbitas seculares do sistema ν Andromedae, na Figura 5.1, representadas sobre a esfera de Pauwels. As curvas em verde representam órbitas oscilando em torno do Modo I, as curvas em vermelho representam órbitas oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula. Os pólos Norte e Sul da esfera de Pauwels são representados pelas letras N e S , respectivamente.	94
5.3	Espaço de fase construído a partir do valor de momento angular total para o sistema fictício com os parâmetros apresentados na Tabela 5.1 mas com as massas dos planetas $m_1 = m_2/100$. Na escala de cinza são apresentados os valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico e as curvas coloridas representam órbitas seculares (níveis de energia constante). A curva em verde representa uma órbita oscilando em torno do Modo I, a curva em vermelho representa uma órbita oscilando em torno do Modo II e e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula.	95
5.4	Espaço de fase construído a partir do valor de momento angular total para o sistema fictício com os parâmetros apresentados na Tabela 5.1 mas com as massas dos planetas $m_1 = 100m_2$. Na escala de cinza são apresentados os valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico e as curvas coloridas representam órbitas seculares (níveis de energia constante). A curva em verde representa uma órbita oscilando em torno do Modo I, a curva em vermelho representa uma órbita oscilando em torno do Modo II e e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula	97
5.5	Espaço de fase para as órbitas seculares para o sistema com $m_1 = m_2/100$, na Figura 5.3, representadas sobre a esfera de Pauwels. As curvas em verde representam órbitas oscilando em torno do Modo I, as curvas em vermelho representam órbitas oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula.	98
5.6	Espaço de fase para as órbitas seculares para o sistema com $m_1 = 100m_2$, na Figura 5.4, representadas sobre a esfera de Pauwels. As curvas em verde representam órbitas oscilando em torno do Modo I, as curvas em vermelho representam órbitas oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula.	98

5.7	Acima: Mapa representativo com os níveis do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico para o sistema $m_0 = m_2 = M_\odot$, $m_1 = 1 \times 10^{-4}M_\odot$, com os parâmetros orbitais $a_1/a_2 = 0.1$ e $\Delta\varpi = 0$. Na escala de cinza é apresentado o Hamiltoniano Secular Semi-Analítico, e seus níveis são representados pelas linhas cheias, enquanto que as linhas tracejadas representam valores de momento angular total. A curva pontilhada vermelha representa a coleção dos pontos de tangência entre as curvas de energia e momento angular total. Abaixo: valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico em azul em função da excentricidade do planeta e_1 , calculados para o valor momento angular total definido por $e_1 = 0$ e $e_2 = 0.2$ (curva tracejada em azul no mapa superior), com o ponto de energia máxima representado pelo círculo vermelho.	101
5.8	Frequências seculares do modelo calculadas a partir da Equação (5.13) para as soluções estacionárias obtidas a partir do método geométrico na Figura 5.7, em função da excentricidade do planeta (esquerda) e da estrela perturbadora (direita).	103
6.1	Espectro de Fourier calculado para o sinal da excentricidade e_1	107
6.2	Exemplo de espectro de potência dinâmico.	108
6.3	Detalhes do espectro dinâmico apresentado na Figura 6.2 na região $0.15AU < a_1 < 0.21AU$. As linhas tracejadas em azul representam as posições de ressonâncias de movimentos médios presentes no intervalo.	110
6.4	Exemplo do resultado do isolamento da banda secular do espectro de potência dinâmico apresentado na Figura 6.2.	111
6.5	Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) para o primeiro conjunto de condições iniciais (topo) e o segundo conjunto de condições iniciais (abaixo).	113

6.6	Evolução das órbitas nos planos $e_1 \cos(\Delta\varpi) \times e_1 \sin(\Delta\varpi)$ para o primeiro conjunto (plano superior) e para o segundo conjunto (plano inferior) de condições iniciais. Os círculos em verde representam os valores obtidos através da média definida pela Equação (6.2), enquanto que os triângulos em azul representam os valores obtidos pela Equação (6.3).	114
6.7	Exemplo de resultado obtido para a família de soluções estacionárias do Modo I a partir de integrações das equações exatas de movimento em função do semi-eixo próprio a_1 em vermelho, com as amplitudes das oscilações de curto período representadas pelas barras tracejadas em preto.	116
6.8	Detalhes da curva das excentricidades forçadas do Modo I apresentado na Figura 6.7 na região $0.15AU < a_1 < 0.21AU$. As linhas tracejadas em azul representam as posições de ressonâncias de movimentos médios presentes no intervalo.	117
6.9	Mapa dinâmico para um planeta orbitando α Centauri A para o caso planar construído em função dos elementos orbitais iniciais. A escala de cores representa o logaritmo do número espectral, onde os tons mais claros representam órbitas regulares e os tons mais escuros representam órbitas mais instáveis. A textura em listras na diagonal na parte superior do mapa corresponde a órbitas que não sobreviveram ao tempo total de integração.	119
6.10	Mapa ilustrando a diferença entre os valores iniciais osculadores das excentricidades e_1 , no eixo x , e os valores médios das excentricidades e_1 após 1 período Kepleriano da estrela perturbadora na escala de cores. A textura em listras na diagonal na parte superior do mapa corresponde a órbitas que não sobreviveram ao tempo total de integração.	121

6.11	<p>Mapa dinâmico para um planeta orbitando α Centauri A para o caso planar, construído em função dos elementos equivalentes aos próprios e_1 e a_1. A escala de cores representa o logaritmo do número espectral, onde os tons mais claros representam órbitas regulares e os tons mais escuros representam órbitas mais instáveis. Os pontos em vermelho representam a curva das soluções estacionárias obtida através do método apresentado na Seção 6.3. A textura em listras na diagonal na parte superior direita do mapa corresponde a órbitas que não sobreviveram ao tempo total de integração, enquanto que a textura quadriculada em cinza-escuro na parte superior esquerda do mapa corresponde à região vazia no espaço de parâmetros.</p>	122
7.1	<p>Famílias das soluções estacionárias (coluna esquerda) e frequências seculares (coluna direita) calculadas para os diferentes modelos (ver texto) para $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo), com a massa da estrela perturbadora fixa em $m_2 = 1M_\odot$.</p>	126
7.2	<p>Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares (coluna direita) calculadas para os diferentes modelos (ver texto) para $m_2 = 0.1M_\odot$ (topo), $m_2 = 1M_\odot$ (meio) e $m_2 = 2M_\odot$ (abaixo), com a excentricidade da estrela perturbadora fixa em $e_2 = 0.3$.</p>	127
7.3	<p>Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto para $m_2 = 1M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio), e $e_2 = 0.5$ (abaixo).</p>	130

7.4	Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em um período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto para $e_2 = 0.3$ e $m_2 = 0.1M_\odot$ (topo), $m_2 = 1M_\odot$ (meio), e $m_2 = 10M_\odot$ (abaixo).	131
7.5	Curvas das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto para o caso $m_2 = 1M_\odot$ e $e_2 = 0.2$. As linhas tracejadas na vertical representam os limites de aplicabilidade do modelo Secular de Primeira Ordem (PO), do modelo Secular de Segunda Ordem (SO), do método numérico (Num) e também da estimativa de influência dos termos de curto período (SP) e da instabilidade (Ins).	134
7.6	Limites de aplicabilidade das teorias de Primeira Ordem (área em azul), de Segunda Ordem (área em verde), do método numérico (curva em vermelho), assim como a estimativa da influência dos termos de curto período (curva em preto) e da instabilidade das simulações (curva em magenta) em função das razões de massas m_0/m_2 e para as excentricidades e_2 nos diferentes planos. A área em laranja representa a região de instabilidade determinada pelo critério <i>MAcD</i> (Andrade-Ines e Michtchenko, 2014), enquanto que a área em cinza representa a área com possíveis instabilidades. Os pontos em amarelo são representações dos planetas em sistemas binários, dados pela Tabela 7.1 e discutidos na Seção 7.4.	136

7.7	Limites de aplicabilidade das teorias de Primeira Ordem (área em azul), de Segunda Ordem (área em verde), do método numérico (curva em vermelho), assim como a estimativa da influência dos termos de curto período (curva em preto) e da instabilidade das simulações (curva em magenta) em função das excentricidades e_2 e para as razões de massas m_0/m_2 nos diferentes planos. A área em laranja representa a região de instabilidade determinada pelo critério $MAcD$ (Andrade-Ines e Michtchenko, 2014), enquanto que a área em cinza representa a área com possíveis instabilidades.	137
7.8	Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para órbitas em torno da estrela α Centauri B. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 1.71 \times 10^{-3} AU$), dado pela Tabela 7.1.	141
7.9	Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para para órbitas em torno da estrela HD 126614 A. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 2.35 AU$), dado pela Tabela 7.1.	142
7.10	Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para para órbitas em torno da estrela HD 196885 A. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 2.60 AU$), dado pela Tabela 7.1.	142

7.11	Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para para órbitas em torno da estrela γ Cephei A. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 2.05AU$), dado pela Tabela 7.1.	143
7.12	Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para para órbitas em torno da estrela HD 41004 A. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 1.60AU$), dado pela Tabela 7.1.	143
A.1	Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 0.1M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).	156
A.2	Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 0.5M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).	157
A.3	Curvas das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 1M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).	158
A.4	Família das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 2M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).	159
A.5	Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 10M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).	160

- B.1 Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 0.1M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$ 162
- B.2 Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 0.5M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$ 163
- B.3 Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 1M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$ 164
- B.4 Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 2M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$ 165

B.5 Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 10M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$ 166

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros do sistema planetário <i>v</i> Andromeda com os planetas c e d adotados no estudo em Michtchenko e Malhotra (2004). O sistema é considerado coplanar.	90
7.1	Parâmetros físicos e orbitais de planetas em órbitas tipo S em sistemas binários com separação menor que 50 <i>AU</i> (Pourbaix, 1999; Roell et al., 2012; Dumusque et al., 2012).	140

Sumário

1. <i>Introdução</i>	29
2. <i>Problema Geral de 3 Corpos - Função Perturbadora</i>	35
2.1 Polinômios de Legendre	39
2.2 Coeficientes de Hansen	40
2.3 Operadores de Newcomb	41
2.4 Função Perturbadora Explícita em Elementos Orbitais	42
2.5 Variáveis Ação-Ângulo	43
2.6 Classificação dos termos da Função Perturbadora	45
2.7 Equações de Movimento de Hamilton	46
2.8 Determinação do Número de Termos do Desenvolvimento	49
3. <i>Teorias Seculares de Primeira Ordem</i>	53
3.1 Teoria Secular Analítica de Primeira Ordem	53
3.2 Modelo Secular Simplificado	57
3.3 Abordagens Semi-Analíticas	62
3.3.1 Teoria Secular Semi-Analítica de Primeira Ordem	62
3.3.2 Teoria Semi-Secular Semi-Analítica de Primeira Ordem	65
4. <i>Teoria Secular de Segunda Ordem</i>	71
4.1 Método das Características	75
4.2 Método da Transformada de Fourier	77
5. <i>Aspectos Básicos da Dinâmica Secular</i>	89

5.1	Soluções Estacionárias do Modelo Secular	89
5.2	Determinação das Soluções Estacionárias Seculares	100
5.3	Determinação da Frequência Secular	102
6.	<i>Ferramentas Numéricas no Estudo da Dinâmica Secular</i>	105
6.1	Transformada de Fourier	105
6.2	Espectro de Potência Dinâmico	107
6.3	Determinação Numérica do Modo Forçado	110
6.4	Mapa Dinâmico - Número Espectral	117
7.	<i>Aplicação e Comparação dos Modelos Desenvolvidos na Caracterização da Dinâmica Secular</i>	123
7.1	Construção dos Planos Paramétricos	123
7.2	Influência das Oscilações de Curto Período	128
7.3	Limites de Aplicabilidade das Teorias Seculares	132
7.4	Aplicação - Sistemas Detectados	140
8.	<i>Conclusões e Perspectivas Futuras</i>	145
	<i>Referências</i>	147
	<i>Apêndice</i>	153
A.	<i>Soluções Estacionárias e Frequências Seculares Calculadas para os Modelos Desenvolvidos</i>	155
B.	<i>Famílias de Soluções Estacionárias do Problema Secular Planar de Três Corpos</i> .	161
C.	<i>Estudo da Estabilidade Dinâmica de Planetas Terrestres no Sistema α Centauri AB167</i>	

Introdução

Estima-se que mais de 50% das estrelas da sequência principal constituem um sistema binário ou múltiplo estelar (Abt, 1979). Além disso, modelos de formação estelar recentes mostram que, mesmo para estrelas da pré-sequência principal, o número de ocorrências de multiplicidade é maior que 50% (Mathieu, 1994; Mathieu et al., 2000). Na vizinhança solar, para estrelas com tipo espectral do tipo G ou K, a frequência de companheiras estelares é ainda maior, acima de 60% (Duquennoy e Mayor, 1991; Raghavan et al., 2010; Duchêne e Kraus, 2013).

Por ser um fenômeno tão frequente no universo, e com as descobertas de sistemas planetários em estrelas simples, astrônomos começaram a se perguntar sobre a possibilidade de existência de planetas em sistemas múltiplos. No entanto, devido às fortes perturbações produzidas pela estrela secundária no movimento do planeta, não existe ainda um consenso em relação à influência da companheira binária na formação, evolução e na detectabilidade de tais sistemas (Nelson, 2000; Boss, 2006; Haghighipour, 2006; Thébault et al., 2009; Eggl et al., 2013).

O movimento planetário em estrelas binárias pode ser classificado, sob um ponto de vista dinâmico, em três tipos (Dvorak, 1984, veja também a Figura 1.1):

- O tipo S (*S-type*), ou tipo satélite, quando o planeta se move ao redor de apenas uma das componentes estelares;
- O tipo P (*P-type*), ou tipo planetário, quando o planeta se move em uma órbita externa, englobando a órbita de ambas as estrelas; essa configuração também é conhecida como circum-binária;
- O tipo L (*L-type*), ou tipo libratório, quando o planeta se move em um movimento

co-orbital sobre os pontos Lagrangianos L_4 ou L_5 ;

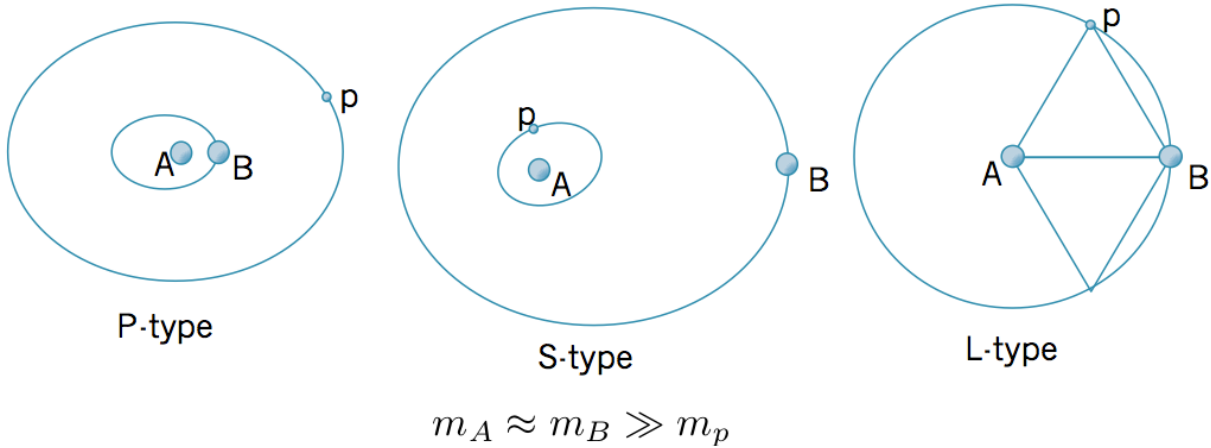


Figura 1.1: Representação dos tipos de movimento de um planeta p em um sistema binário composto pelas estrelas A e B .

A técnica da velocidade radial favorece a detecção de exoplanetas com órbitas próximas à estrela hospedeira. Devido a isso, os primeiros exoplanetas em estrelas binárias foram descobertos em órbitas do tipo S, com a primeira detecção do sistema γ Cephei (Hatzes et al., 2003). Planetas em órbitas do tipo P foram descobertos com a técnica de detecção de trânsitos planetários, e confirmados com a técnica de velocidade radial. O primeiro sistema descoberto nessa órbita foi o planeta Kepler 16b (Doyle et al., 2011). No presente trabalho, o foco será o estudo de órbitas planetárias do tipo S em estrelas binárias.

Sempre com a intenção de encontrar um sistema exoplanetário similar ao Sistema Solar, programas de busca de exoplanetas são enviesados contra sistemas binários. Ainda assim, ao menos 12% dos exoplanetas descobertos se encontram em sistemas estelares múltiplos (Eggenberger et al., 2004, 2007; Desidera e Barbieri, 2007; Roell et al., 2012). Isso se deve ao fato da maioria dos planetas em estrelas binárias ter sido descoberta antes mesmo das companheiras estelares (Thebault e Haghighipour, 2014), o que pode explicar porque a maioria dos sistemas binários com planetas conhecidos possui grandes separações, muitas vezes maior que 500 AU , como é ilustrado na Figura 1.2.

Os elevados valores da massa do perturbador, das excentricidades e inclinações das órbitas do sistema fazem com que a aplicação de teorias baseadas em expansões clássicas

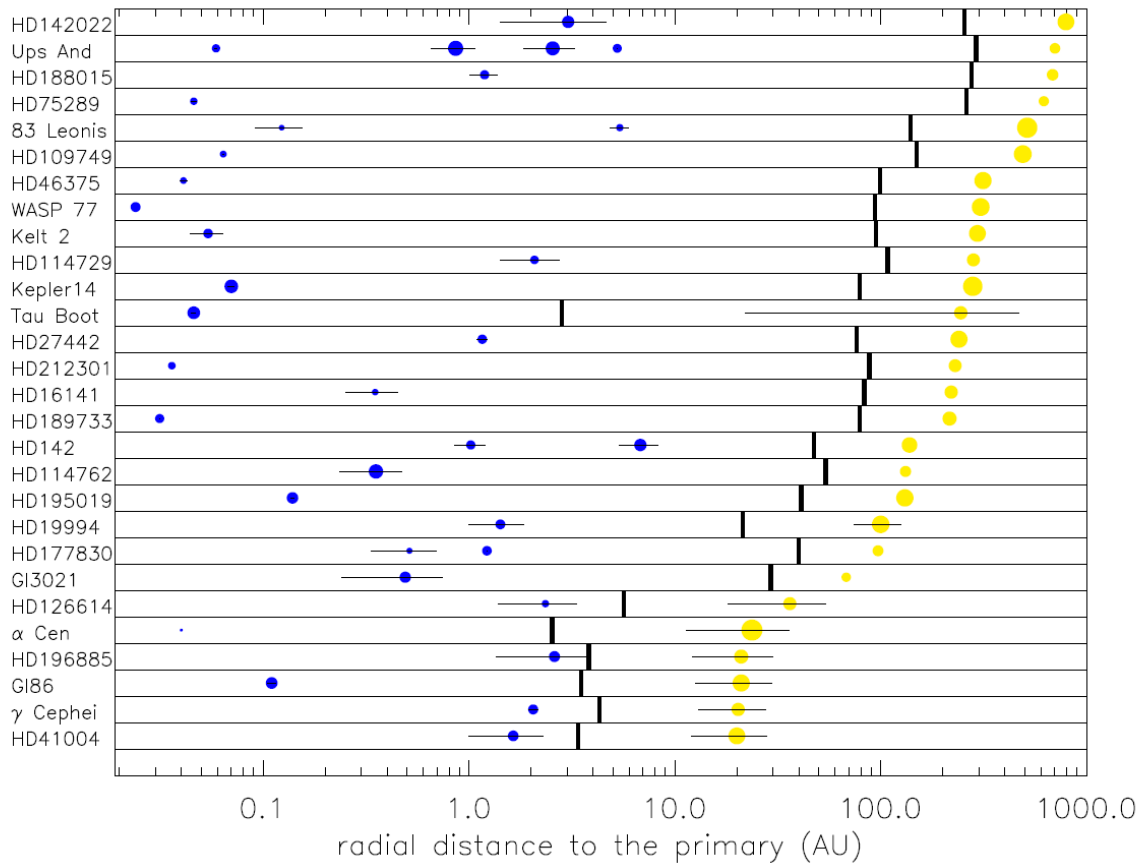


Figura 1.2: Representação da arquitetura dos planetas em órbitas do tipo S com separação menor que 1000 AU descobertos até julho de 2013. Os círculos em azul representam os planetas, com os raios proporcionais a $(m_p/m_{\text{Jup}})^{1/3}$, e os círculos em amarelo representam as companheiras binárias, com os raios proporcionais a $(m_B/m_A)^{1/3}$. As linhas horizontais representam a variação na distância dos corpos devido às excentricidades (quando são conhecidas), e as linhas verticais representam o limite de estabilidade orbital estimado por Holman & Wiegert (1999). Extraído de Thebault e Haghighipour (2014).

sejam inaplicáveis nesse caso. Uma abordagem possível é a expansão da função perturbadora em função da razão de semi-eixos, utilizando os polinômios de Legendre (Heppenheimer, 1978; Ford et al., 2000; Laskar e Boué, 2010). Embora esse tipo de desenvolvimento evite restrições com relação às excentricidades e às inclinações, sua convergência é lenta, limitando sua aplicação a sistemas hierárquicos, com grandes distâncias mútuas (Nelson, 2000; Boss, 2006; Haghighipour, 2006; Thébault et al., 2009; Eggl et al., 2013).

Uma abordagem alternativa para o estudo de sistemas planetários que surgiu nos últimos anos é a chamada semi-analítica. Introduzido em Michtchenko e Malhotra (2004), no método semi-analítico o desenvolvimento do problema envolve o cálculo numérico do procedimento de média, eliminando assim a necessidade de expansões da função perturba-

dora. Dessa maneira, podem ser estudadas configurações orbitais com valores elevados de excentricidade e inclinações. Porém, essa abordagem não é mais válida para o caso em que a estrela perturbadora possua uma massa da ordem da massa da estrela central, já que o procedimento da média, neste caso, é limitado à primeira ordem.

Uma alternativa para superar essa limitação é a extensão da teoria de perturbações para a segunda ordem em relação à massa do perturbador. Isso foi feito em Giuppone et al. (2011), onde o modelo desenvolvido pelos autores foi aplicado para o estudo da formação do planeta localizado no sistema binário γ Cephei. O modelo construído se mostrou adequado para o estudo da dinâmica secular e também apresentou uma grande melhora sobre o modelo de primeira ordem. Os autores enfatizaram, no entanto, a complexidade e, portanto, a inviabilidade do modelo, optando pelo uso de uma expressão empírica, obtida especificamente para o sistema γ Cephei.

O objetivo principal desse trabalho é apresentar um estudo da evolução secular coplanar de planetas em órbitas tipo S em estrelas binárias. Esse trabalho teve início no mestrado, intitulado *Movimento Planetário nos Sistemas de Estrelas Múltiplas*, com o estudo da estabilidade de planetas em órbitas tipo S em estrelas binárias. Esse estudo foi feito com o desenvolvimento de um critério de estabilidade, *MACD*, baseado na solução do problema de três corpos restrito e circular, que é comparado com integrações numéricas das equações exatas de movimento e com o critério desenvolvido por Holman e Wiegert (1999). Os resultados do trabalho foram publicados em Andrade-Ines e Michtchenko (2014).

No presente trabalho, aplicamos novas técnicas, analíticas e semi-analíticas, para a construção de modelos dinâmicos de planetas em estrelas binárias, baseado em aplicações bem sucedidas de tais técnicas para o estudo do problema planetário secular (Michtchenko e Malhotra, 2004; Giuppone et al., 2011). Essas técnicas incluíram o desenvolvimento analítico função perturbadora na construção de modelos seculares de primeira e segunda ordem, e a adaptação do método semi-analítico para a construção de modelos secular e semi-secular. Finalmente, mostramos que cada modelo desenvolvido possui suas vantagens e limitações, que englobam tanto a qualidade dos seus resultados obtidos quanto as suas complexidades.

Essa tese está estruturada na seguinte forma: no Capítulo 2 introduzimos a notação e realizamos o desenvolvimento da função perturbadora em polinômios de Legendre até altas ordens. No Capítulo 3 desenvolvemos a teoria tecular de primeira ordem com base na

teoria de perturbações canônica em séries de Lie e, com ela, construímos modelos seculares analíticos e semi-analíticos. Em seguida, no Capítulo 4, estendemos o desenvolvimento da teoria de perturbações para a segunda ordem na construção de um modelo analítico. A partir da formulação Hamiltoniana, no Capítulo 5 discutimos propriedades básicas da teoria secular e apresentamos técnicas e métodos para a caracterização do problema secular a partir de planos paramétricos. No Capítulo 6 desenvolvemos técnicas numéricas para a caracterização da dinâmica secular a partir da integração de equações de movimento para comparação com o resultados obtidos dos modelos seculares. No Capítulo 7 discutimos e comparamos os diferentes modelos discutidos nos Capítulos 3 e 4 com integrações numéricas utilizando as técnicas desenvolvidas nos Capítulos 5 e 6. Finalmente, no Capítulo 8 apresentamos as conclusões do trabalho e as perspectivas de continuidade.

Problema Geral de 3 Corpos - Função Perturbadora

O problema geral de 3 corpos da mecânica celeste consiste em determinar as posições e velocidades em qualquer instante do tempo de 3 massas pontuais interagindo mutuamente por meio da força gravitacional, dadas as posições e velocidades das massas em um dado instante inicial. Considere o sistema de corpos de massas m_0 , m_1 e m_2 , com vetores de posição \vec{R}_0 , \vec{R}_1 e \vec{R}_2 em relação a um referencial inercial S , como representa a Figura 2.1.

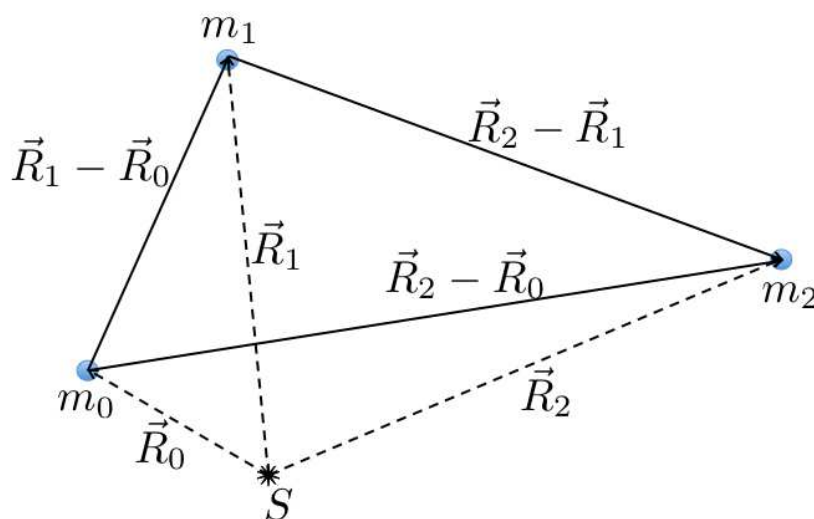


Figura 2.1: Representação do problema de 3 corpos

A partir das leis da gravitação de Newton, as acelerações resultantes em cada corpo devido os outros dois serão dadas por

$$\frac{d^2 \vec{R}_0}{dt^2} = Gm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_0|^3}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 \vec{R}_1}{dt^2} = -Gm_0 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|^3} + Gm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 \vec{R}_2}{dt^2} = -Gm_0 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_0}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_0|^3} - Gm_1 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}_1}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|^3}, \quad (2.3)$$

onde G é a Constante Gravitacional Universal. A função Hamiltoniana desse sistema será dada por

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{P}_0^2}{2m_0} + \frac{\vec{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{P}_2^2}{2m_2} - \frac{Gm_0m_1}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_0|} - \frac{Gm_0m_2}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_0|} - \frac{Gm_1m_2}{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|} \quad (2.4)$$

onde \vec{P}_i é o momento linear do i -ésimo corpo, definido por

$$\vec{P}_i = m_i \frac{d\vec{R}_i}{dt}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.5)$$

O Hamiltoniano dado pela Equação (2.4) possui 9 graus de liberdade. O número de graus de liberdade pode ser reduzido para 6 ao realizar uma mudança de referencial para um sistema astrocêntrico, com o corpo de massa m_0 no centro de referência. Entretanto, o sistema astrocêntrico tradicional, definido por

$$\begin{aligned} \vec{R}'_1 &= \vec{R}_1 - \vec{R}_0, & \vec{P}'_1 &= \vec{P}_1 - \vec{P}_0 \\ \vec{R}'_2 &= \vec{R}_2 - \vec{R}_0, & \vec{P}'_2 &= \vec{P}_2 - \vec{P}_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

não pode ser construído com uma transformação canônica a partir de um referencial inercial. No entanto, dois sistemas de variáveis astrocêntricas alternativas podem ser obtidos: o sistema de Jacobi e o sistema de Poincaré.

O sistema de Poincaré possui uma definição simples: os vetores de posição r'_i são definidos da mesma maneira que o referencial astrocêntrico, dados pela Equação (2.6), enquanto que os vetores de momento p'_i são definidos em relação ao baricentro do sistema. Tendo em vista que pretendemos estudar o caso em que $m_1 \ll m_0$ e $m_1 \sim m_2$, o centro de massas do sistema pode, em muitos casos, se encontrar em uma posição exterior à do corpo m_1 . Dessa maneira, os elementos orbitais associados à órbita do corpo m_1 perdem sua interpretação geométrica.

O sistema de Jacobi possui o vetor de posição do i -ésimo corpo definido em relação ao centro de massas dos $i - 1$ corpos anteriores, dados pelas equações

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_0 &= \vec{0}, \\
 \vec{r}_1 &= \vec{R}_1 - \vec{R}_0, \\
 \vec{r}_2 &= \vec{R}_2 - \frac{m_0 \vec{R}_0 + m_1 \vec{R}_1}{m_0 + m_1},
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

como ilustra a Figura 2.2

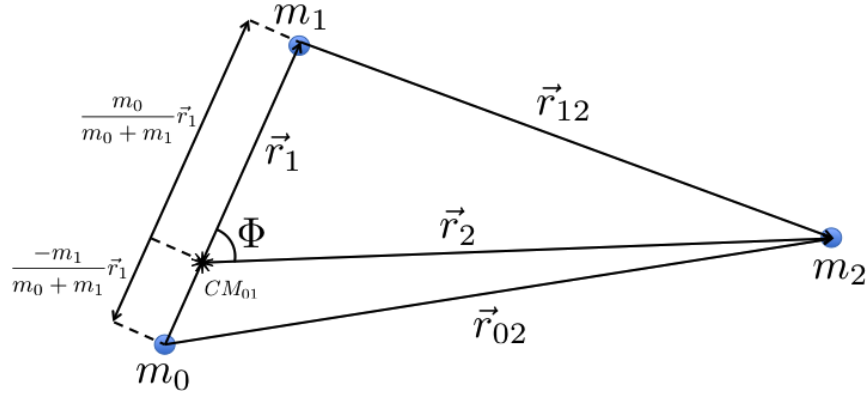


Figura 2.2: Definição do sistema de coordenadas de Jacobi

onde CM_{01} representa o centro de massa dos corpos 0 e 1, Φ o ângulo entre os vetores de posição de Jacobi \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , e \vec{r}_{ij} é o vetor relativo entre o par de corpos com índices i e j . Os vetores de momento são obtidos ao construir uma transformação canônica a partir de um sistema inercial, e pode-se chegar que (Ferraz-Mello et al., 2005; Beaugé et al., 2007)

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_0 &= \vec{0}, \\
 \vec{p}_1 &= \vec{P}_1 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{P}_2 = -\vec{P}_0 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{P}_2, \\
 \vec{p}_2 &= \vec{P}_2.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Aplicando as transformações para o sistema de Jacobi, dado pelas Equações (2.7) e (2.8), na função Hamiltoniana (2.4), chega-se em

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Kep}} + \mathcal{R}, \tag{2.9}$$

onde \mathcal{H}_{Kep} é a parte Kepleriana e \mathcal{R} é a função perturbadora. A parte Kepleriana é dada por

$$\mathcal{H} = \left(\frac{\vec{p}_1^2 (m_0 + m_1)}{2 m_0 m_1} - \frac{G m_1 m_0}{r_1} \right) + \left(\frac{\vec{p}_2^2 (m_0 + m_1 + m_2)}{2 m_0 (m_0 + m_1)} - \frac{G m_2 (m_0 + m_1)}{r_2} \right), \quad (2.10)$$

que também pode ser escrita na forma

$$\mathcal{H}_{\text{Kep}} = -\frac{G m_0 m_1}{2 a_1} - \frac{G (m_0 + m_1) m_2}{2 a_2}, \quad (2.11)$$

onde a_i é o semi-eixo maior do i -ésimo corpo no sistema com referencial de Jacobi. A função perturbadora \mathcal{R} é dada por

$$\mathcal{R} = -\frac{G m_0 m_2}{r_{02}} - \frac{G m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{G (m_0 + m_1) m_2}{r_2}. \quad (2.12)$$

A partir da definição do centro de massas, podemos re-escrever a função perturbadora (2.12) em termos dos vetores de posição de Jacobi, r_1 e r_2 , na forma

$$\mathcal{R} = -\frac{G m_0 m_2}{\left| \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \right|} - \frac{G m_1 m_2}{\left| \frac{-m_0}{m_0 + m_1} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \right|} + \frac{G (m_0 + m_1) m_2}{r_2}. \quad (2.13)$$

Os dois primeiros termos da função perturbadora (2.13) podem ser expandidos em uma série de polinômios de Legendre. Usando a lei dos cossenos, escrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left| \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \right|} &= \frac{1}{r_2} \left(1 + \left(\frac{-m_1}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{-m_1}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right) \cos \Phi \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{-m_1}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right)^l P_l(\cos \Phi); \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left| \frac{-m_0}{m_0 + m_1} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \right|} &= \frac{1}{r_2} \left(1 + \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right) \cos \Phi \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \frac{r_1}{r_2} \right)^l P_l(\cos \Phi), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $P_l(x)$ são os polinômios de Legendre de grau l . Substituindo as Equações (2.14) e (2.15) na Equação da função perturbadora (2.13), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{G (m_0 + m_1) m_2}{r_2} - \frac{G m_0 m_2}{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-m_1)^l}{(m_0 + m_1)^l} \frac{r_1^l}{r_2^l} P_l(\cos \Phi) + \\ &\quad - \frac{G m_1 m_2}{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m_0^l}{(m_0 + m_1)^l} \frac{r_1^l}{r_2^l} P_l(\cos \Phi). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Separando os termos $l = 0$ e $l = 1$ da função perturbadora, e lembrando que $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$, a função perturbadora pode ser re-escrita na forma simplificada

$$\mathcal{R} = -\frac{G}{r_2} \sum_{l=2}^{\infty} \mathcal{M}_l \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l P_l(\cos \Phi) = -\frac{G}{a_2} \sum_{l=2}^{\infty} \mathcal{M}_l \alpha^l \left(\frac{r_1}{a_1}\right)^l \left(\frac{a_2}{r_2}\right)^{l+1} P_l(\cos \Phi), \quad (2.17)$$

onde introduzimos a razão de semi-eixos $\alpha = a_1/a_2$ e

$$\mathcal{M}_l = m_0 m_1 m_2 \frac{m_0^{l-1} - (-m_1)^{l-1}}{(m_0 + m_1)^l}.$$

É importante notar que o desenvolvimento da função perturbadora em coordenadas de Jacobi possui essa forma independentemente da posição do perturbador relativo ao corpo de teste. Esta é uma vantagem sobre o desenvolvimento em coordenadas astrocêntricas ou de Poincaré, onde o desenvolvimento da função perturbadora assume formas diferentes dependendo da posição relativa do perturbador em relação à partícula de testes.

Introduzindo a variável $\gamma_i = r_i/a_i$ na Equação (2.17), chegamos finalmente na seguinte expressão da função perturbadora:

$$\mathcal{R} = -\frac{G}{a_2} \sum_{l=2}^{\infty} \mathcal{M}_l \alpha^l \frac{\gamma_1^l}{\gamma_2^{l+1}} P_l(\cos \Phi). \quad (2.18)$$

2.1 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre podem ser escritos em termos de séries de potências explícitas, como foi feito em Whittaker e Watson (1963) e Laskar e Boué (2010), a partir da identidade

$$(1 - 2x \cos x + z^2)^{-1/2} = (1 - ze^{ix})^{-1/2} (1 - ze^{-ix})^{-1/2} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(2p)!(2q!)}{2^{2p+2q} (p!)^2 (q!)^2} e^{i(p-q)x} z^{p+q}, \quad (2.19)$$

válida para $0 \leq z < 1$. Manipulando os índices e introduzindo $n = p + q$, em seguida substituindo q por $n - q$, a identidade (2.19) será expressa por

$$(1 - 2z \cos x + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{q=0}^n \frac{(2q)!(2n-2q)!}{2^{2n} ((n-q)!)^2 (q!)^2} e^{i(2q-n)x} \right) z^n. \quad (2.20)$$

A Equação (2.20), expressa em termos de uma série de Legendre, pode ser escrita como

$$(1 - 2x \cos x + z^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos x) z^n. \quad (2.21)$$

Comparando as Equações (2.20) e (2.21), é possível perceber que os polinômios de Legendre serão dados por

$$P_n(\cos \Phi) = \sum_{q=0}^n \frac{(2q)!(2n-2q)!}{2^{2n}((n-q)!)^2(q!)^2} e^{i(2q-n)\Phi} \quad (2.22)$$

A substituição da Equação (2.22), encontrada para os polinômios de Legendre, na expressão da função perturbadora (2.18) resulta em

$$\mathcal{R} = -\frac{G}{a_2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=0}^n \mathcal{M}_n f_{n,q} \alpha^n \frac{\gamma_1^n}{\gamma_2^{n+1}} e^{i(2q-n)\Phi}, \quad (2.23)$$

onde introduzimos o coeficiente $f_{n,q}$, que é função apenas dos índices das somatórias, na forma

$$f_{n,q} = \frac{(2q)!(2n-2q)!}{2^{2n}(q!)^2((n-q)!)^2}. \quad (2.24)$$

2.2 Coeficientes de Hansen

Considerando o caso planar, o ângulo Φ entre os vetores de posição r_1 e r_2 pode ser escrito em termos das anomalias verdadeiras f_i e das longitudes dos pericentros ϖ_i dos corpos 1 e 2, como representado na Figura 2.3.

A partir da Figura 2.3, podemos ver que o ângulo Φ pode ser escrito como

$$\Phi = (f_1 + \varpi_1) - (f_2 + \varpi_2) = (f_1 - f_2) + \Delta\varpi, \quad (2.25)$$

onde $\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2$. Introduzindo a definição do ângulo Φ na Equação da função perturbadora (2.23), temos

$$\mathcal{R} = -\frac{G}{a_2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=0}^n \mathcal{M}_n f_{n,q} \alpha^n \frac{\gamma_1^n e^{i(2q-n)f_1}}{\gamma_2^{n+1} e^{i(2q-n)f_2}} e^{i(2q-n)\Delta\varpi}. \quad (2.26)$$

Os termos dependentes das anomalias verdadeiras f_i e de γ_i podem ser expressos em termos dos coeficientes de Hansen $X_k^{n,m}$ (Plummer, 1918; Kaula, 1962; Hughes, 1981), que são definidos pela expressão

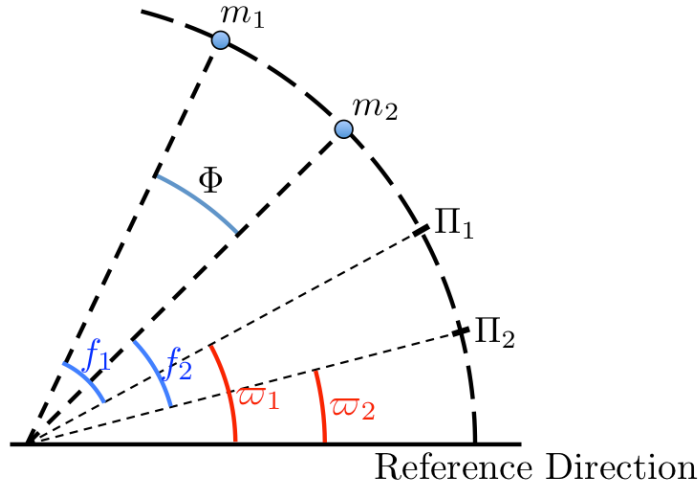


Figura 2.3: Representação das variáveis angulares do caso planar, onde Π_i , ϖ_i e f_i são, respectivamente, as posições dos pericêntricos, as anomalias verdadeiras e as longitudes dos pericêntricos do i -ésimo corpo.

$$\gamma_i^n e^{imf} = \sum_{k_i=-\infty}^{\infty} X_{k_i}^{n,m}(e_i) e^{ik_i M_i}, \quad (2.27)$$

onde e_i e M_i são as excentricidade e anomalia média do i -ésimo corpo, respectivamente. Introduzindo a definição dos coeficientes de Hansen, dada pela Equação (2.27), na expressão da função perturbadora (2.26) temos

$$\mathcal{R} = -\frac{G}{a_2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=0}^n \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_n f_{n,q} X_{k_1}^{n,(2q-n)}(e_1) X_{k_2}^{-(n+1),(n-2q)}(e_2) a^n e^{i[(2q-n)\Delta\varpi + k_1 M_1 + k_2 M_2]}, \quad (2.28)$$

onde notamos que há uma dependência implícita das excentricidades.

2.3 Operadores de Newcomb

A dependência da excentricidade nos coeficientes de Hansen pode ser explicitada em uma série de potências com o auxílio dos operadores de Newcomb $Y_{c,d}^{a,b}$, que são definidos por meio da equação

$$X_j^{n,k}(e_i) = e_i^{|k-j|} \sum_{s_i=0}^{\infty} Y_{s_i+u_1, s_i+u_2}^{n,k} e_i^{2s_i}, \quad (2.29)$$

onde $u_1 = \max(0, j - k)$ e $u_2 = \max(0, k - j)$. Os operadores de Newcomb, por sua vez,

podem ser facilmente calculados por meio de relações recursivas (Ellis & Murray, 2000). Para o cálculo do operador $X_{c,d}^{a,b}$ de grau $(a, b, c, d) \neq 0$, usaremos

$$X_{c,d}^{a,b} = 0 \text{ se } c < 0 \text{ ou } d < 0, \quad (2.30)$$

$$X_{c,d}^{a,b} = X_{d,c}^{a,-b} \text{ se } c < d, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} 4dX_{c,d}^{a,b} = & -2(2b + a)X_{c,d-1}^{a,b-1} - (b + a)X_{c,d-2}^{a,b-2} \\ & -(c - 5d + 4 + 4b + a)X_{c-1,d-1}^{a,b} \\ & + 2(c - d + b) \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \binom{3/2}{j} X_{c-j,d-j}^{a,b}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

É possível perceber que os operadores de Newcomb do lado direito da Equação (2.32) possuem grau inferior em b , c e d que o operador do lado direito. Aplicações sucessivas das Equações de (2.30) a (2.32) eventualmente chegarão no operador de Newcomb $X_{c,0}^{a,b}$, que pode ser calculado a partir da expressão

$$4cX_{c,0}^{a,b} = 2(2b - a)X_{c-1,0}^{a,b+1} + (b - a)X_{c-2,0}^{a,b+2}. \quad (2.33)$$

No caso da Equação (2.33), podemos perceber que o coeficiente no lado direito há um decréscimo em grau apenas do coeficiente c em relação aos coeficientes no lado esquerdo, e, portanto, aplicações sucessivas levarão eventualmente aos casos $X_{0,0}^{a,b}$ e $X_{1,0}^{a,b}$, que são calculados como

$$X_{0,0}^{a,b} = 1 \quad \text{e} \quad X_{1,0}^{a,b} = b - \frac{a}{2}. \quad (2.34)$$

$$(2.35)$$

2.4 Função Perturbadora Explícita em Elementos Orbitais

Introduzindo a definição dos operadores de Newcomb, dada pela Equação (2.29), na expressão da função perturbadora (2.28) e tomando a parte real da mesma, chegamos em

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= -\frac{G}{a_2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{q=0}^n \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \mathcal{M}_n f_{n,q} Y_{s_1+u_A, s_1+u_B}^{n, (2q-n)} Y_{s_2+u_C, s_2+u_D}^{-(n+1), (n-2q)} \\ &\times \alpha^n e_1^{2s_1+|2q-n-k_1|} e_2^{2s_2+|n-2q-k_2|} \cos[(2q-n)\Delta\varpi + k_1 M_1 + k_2 M_2], \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde $u_A = \max(0, k_1 - 2q + n)$, $u_B = \max(0, 2q - n - k_1)$, $u_C = \max(0, k_2 - n + 2q)$ e $u_D = \max(0, n - 2q - k_2)$.

A função perturbadora apresentada na Equação (2.36) possui dependência explícita dos elementos orbitais e das massas dos corpos, além de coeficientes que dependem apenas dos índices das somatórias. Por simplicidade de notação, as diferentes somatórias, cada uma com seu diferente índice, serão agrupadas em apenas uma somatória. Também iremos agrupar todos os fatores independentes dos parâmetros físicos e orbitais do sistema em apenas um termo $T_{k_1, k_2, s_1, s_2}^{n, q}$, dependente apenas dos índices das somatórias. Dessa maneira, a função perturbadora será representada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= -\frac{G}{a_2} \sum_{n, q, k_1, k_2, s_1, s_2} T_{k_1, k_2, s_1, s_2}^{n, q} \mathcal{M}_n \alpha^n e_1^{2s_1+|2q-n-k_1|} e_2^{2s_2+|n-2q-k_2|} \\ &\times \cos[(2q-n)\Delta\varpi + k_1 M_1 + k_2 M_2], \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde $T_{k_1, k_2, s_1, s_2}^{n, q} = f_{n, q} Y_{s_1+u_A, s_1+u_B}^{n, (2q-n)} Y_{s_2+u_C, s_2+u_D}^{-(n+1), (n-2q)}$. Finalmente, o Hamiltoniano completo será dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{Gm_0 m_1}{2a_1} - \frac{G(m_0 + m_1)m_2}{2a_2} - \frac{G}{a_2} \sum_{n, q, k_1, k_2, s_1, s_2} T_{k_1, k_2, s_1, s_2}^{n, q} \\ &\times \mathcal{M}_n \alpha^n e_1^{2s_1+|2q-n-k_1|} e_2^{2s_2+|n-2q-k_2|} \cos[(2q-n)\Delta\varpi + k_1 M_1 + k_2 M_2], \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.5 Variáveis Ação-Ângulo

Com o intuito de utilizar o Hamiltoniano na aplicação de teorias de perturbação canônicas, é conveniente neste ponto introduzir as variáveis ação-ângulo do problema de 2 corpos. É possível demonstrar que o seguinte conjunto de variáveis pode ser obtido através de uma transformação canônica das variáveis de Delaunay modificadas no sistema de referência de Jacobi (Beaugé et al., 2007):

$$\begin{aligned}
M_1, & \quad L_1 = \beta_1 \sqrt{a_1 \mu_1}, \\
M_2, & \quad L_2 = \beta_2 \sqrt{a_2 \mu_2}, \\
\Delta\varpi = \varpi_1 - \varpi_2, & \quad G_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2} \\
\varpi_2, & \quad G_1 + G_2 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2} + L_2 \sqrt{1 - e_2^2} = \text{AM},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

onde $\beta_i = m_i \sigma_{i-1}$, $\mu_i = G \sigma_i$ e $\sigma_i = \sum_{j=0}^i m_j$. A transformação das variáveis a_i para as ações L_i pode ser facilmente implementada no Hamiltoniano, apresentado na Equação (2.38), já que estas se relacionam por uma lei de potências simples, dada por

$$a_i = \frac{1}{\mu_i \beta_i^2} L_i^2. \tag{2.40}$$

Relembrando que $\alpha = a_1/a_2$, a função perturbadora se torna

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & -\frac{G^2 m_0^3 m_1^3}{2(m_0 + m_1)} \frac{1}{L_1^2} - \frac{G^2 (m_0 + m_1)^3 m_2^3}{2(m_0 + m_1 + m_2)} \frac{1}{L_2^2} - G^2 \sum_{n,q,k_1,k_2,s_1,s_2} T_{k_1,k_2,s_1,s_2}^{n,q} \\
& \times \mathcal{M}_n \mathcal{Q}_n L_1^{2n} L_2^{-2(n+1)} e_1^{2s_1+|2q-n-k_1|} e_2^{2s_2+|n-2q-k_2|} \\
& \times \cos[(2q-n)\Delta\varpi + k_1 M_1 + k_2 M_2],
\end{aligned} \tag{2.41}$$

onde

$$\mathcal{Q}_n = \left(\frac{m_2}{m_0 m_1} \right)^{2n} \frac{m_2^2 (m_0 + m_1)^{3n+2}}{(m_0 + m_1 + m_2)^{n+1}}.$$

Por outro lado, a transformação das variáveis e_i para as ações G_i não é relacionada por uma lei de potências e sua implementação no Hamiltoniano faria com que o mesmo perdesse sua forma simples, como uma série de potências nas variáveis do problema. Assim, os cálculos de derivadas em relação às ações G_i serão implementados com a regra da cadeia, e estes resultados serão apresentados adiante, na Seção 2.7.

Como mencionado anteriormente, o fator $T_{k_1,k_2,s_1,s_2}^{n,q}$ não possui nenhuma dependência sobre os parâmetros físicos ou orbitais do sistema. Portanto, assumindo um valor suficientemente alto para o truncamento das séries em n , q , k_1 , k_2 , s_1 e s_2 , podemos calcular todos os valores possíveis do fator $T_{k_1,k_2,s_1,s_2}^{n,q}$, de modo que o número total de termos seja um número N . O mesmo pode ser feito para os expoentes das ações L_i e das excentricidades e_i , assim como os coeficientes da parte angular, de modo que seja constituída uma tabela finita de N termos. Desta maneira, podemos re-indexar todos os termos da função

perturbadora com o número da linha i desta tabela, de forma que o Hamiltoniano tenha a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{G^2 m_0^3 m_1^3}{2(m_0 + m_1)} \frac{1}{L_1^2} - \frac{G^2 (m_0 + m_1)^3 m_2^3}{2(m_0 + m_1 + m_2)} \frac{1}{L_2^2} \\ & - G^2 \sum_{i=1}^N \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi), \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde $1 \leq i \leq N$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i &= T_{k_{1_i}, k_{2_i}, s_{1_i}, s_{2_i}}^{n_i, q_i}, \\ \mathcal{M}_i &= \mathcal{M}_{n_i}, \\ \mathcal{Q}_i &= \mathcal{Q}_{n_i}, \\ a_i &= 2n_i, \\ b_i &= -2(n_i + 1) \\ c_i &= 2s_{1_i} + |2q_i - n_i - k_{1_i}|, \\ d_i &= 2s_{2_i} + |n_i - 2q_i - k_{2_i}|, \\ x_i &= k_{1_i}, \\ y_i &= k_{2_i}, \\ z_i &= 2q_i - n_i, \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.6 Classificação dos termos da Função Perturbadora

Após a construção da tabela, podemos re-ordenar os termos da função perturbadora de modo que:

- para $1 \leq i \leq N_0$, nenhum dos termos possui dependência angular, ou seja, $x_i = y_i = z_i = 0$;
- para $N_0 < i \leq N_S$, todos os termos possuem dependência apenas do ângulo $\Delta \varpi$, ou seja, $x_i = y_i = 0$ e $z_i \neq 0$;
- para $N_S < i \leq N$ todos os outros termos.

Após ordenados, os termos da função perturbadora podem ser classificados como: termo *integrável*, com $1 \leq i \leq N_0$, termos *seculares*, com $N_0 < i \leq N_S$, e termos de curto período, com $N_S < i \leq N$. Neste ponto, para simplificar a notação, é conveniente introduzir os

termos da parte Kepleriana na somatória. Isso pode ser feito introduzindo os índices $i = -1$ e $i = 0$ tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{-1} &= 1, & \mathcal{T}_0 &= 1, \\ \mathcal{M}_{-1} &= 1 & \mathcal{M}_0 &= 1, \\ \mathcal{Q}_{-1} &= \frac{m_0^3 m_1^3}{2(m_0 + m_1)} & \mathcal{Q}_0 &= \frac{m_2^3 (m_0 + m_1)^3}{2(m_0 + m_1 + m_2)}, \\ a_{-1} &= -2 & b_0 &= -2, \end{aligned} \tag{2.44}$$

e $b_{-1} = c_{-1} = d_{-1} = x_{-1} = y_{-1} = z_{-1} = a_0 = c_0 = d_0 = x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Finalmente, o Hamiltoniano completo será dado por

$$\mathcal{H} = -G^2 \sum_{i=-1}^N \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi). \tag{2.45}$$

A grande vantagem de se trabalhar com os coeficientes tabelados desta maneira é que, para qualquer sistema, basta realizar a leitura de um arquivo com os termos da função perturbadora já calculados. O método utilizado para o cálculo dos operadores de Newcomb, apesar de simples implementação, demanda um tempo computacional elevado ao se calcular termos de alta ordem em séries de expansão. Por outro lado, ao realizar todos os cálculos para a construção de uma tabela, representando um Hamiltoniano que pode descrever um sistema com quaisquer elementos orbitais (dentro do limite estipulado para o truncamento das séries), a implementação da rotina de cálculo do Hamiltoniano é simples e direta.

2.7 Equações de Movimento de Hamilton

A evolução temporal das variáveis ação-ângulo será determinada pelas equações de movimento de Hamilton

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M_1} &= -\frac{dL_1}{dt}, & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_1} &= \frac{dM_1}{dt}, \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M_2} &= -\frac{dL_2}{dt}, & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_2} &= \frac{dM_2}{dt}, \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Delta\varpi} &= -\frac{dG_1}{dt}, & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G_1} &= \frac{d\Delta\varpi}{dt}, \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varpi_2} &= -\frac{dAM}{dt}, & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial AM} &= \frac{d\Delta\varpi}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

É possível notar na Equação (2.45) que o Hamiltoniano não possui dependência explícita no ângulo ϖ_2 . Portanto, ϖ_2 é uma variável cíclica e sua ação conjugada, AM , é uma constante do movimento, e será considerada como um parâmetro daqui em diante nos cálculos desse modelo. O parâmetro AM pode ser interpretado fisicamente como o momento angular total do sistema, e podemos perceber que será uma constante independentemente do sistema, desde que não existam torques externos agindo sobre o sistema.

Como mencionado anteriormente, as excentricidades e_i foram mantidas na função perturbadora apesar das mesmas possuírem dependências implícitas das ações L_i e G_i . Para o cálculo das derivadas parciais das equações de movimento, é necessário levar em conta essa dependência por meio da regra da cadeia. A dependência de L_i e G_i em e_i se dá na forma

$$e_1 = \sqrt{1 - \frac{G_1^2}{L_1^2}}, \quad e_2 = \sqrt{1 - \frac{(AM - G_1)^2}{L_2^2}}. \tag{2.47}$$

As derivadas parciais das excentricidades e_i com respeito às ações L_1 , L_2 e G_1 são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_1}{\partial L_1} &= \frac{G_1^2}{e_1 L_1^3}, & \frac{\partial e_2}{\partial L_1} &= 0, \\
\frac{\partial e_1}{\partial L_2} &= 0, & \frac{\partial e_2}{\partial L_2} &= \frac{(AM - G_1)^2}{e_2 L_2^3}, \\
\frac{\partial e_1}{\partial G_1} &= -\frac{G_1}{e_1 L_1^2}, & \frac{\partial e_2}{\partial G_1} &= \frac{(G_1 - AM)}{e_2 L_2^2}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Denominando o elemento dentro da somatória da Equação da função perturbadora (2.45) por $\tau_i = \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta\varpi)$, e utilizando as derivadas

parciais das excentricidades obtidas na Equação (2.48), as derivadas parciais de τ_i com respeito às variáveis ação-ângulo são dadas por

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial M_1} = \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} (-x_i) \sin(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi), \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial M_2} = \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} (-y_i) \sin(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi), \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial \Delta \varpi} = \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} (-z_i) \sin(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi), \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial L_1} = \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi) \left(\frac{a_i - c_i}{L_1} + \frac{c_i}{L_1 e_1^2} \right), \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial L_2} = \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi) \left(\frac{b_i - d_i}{L_2} + \frac{d_i}{L_2 e_2^2} \right), \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \tau_i}{\partial G_1} = \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi) \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^2}}{e_2^2 L_2} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^2}}{e_1^2 L_1} \right), \quad (2.54)$$

Aplicando as Equações de (2.49) até (2.54) nas Equações de movimento (2.46), temos

$$\frac{dL_1}{dt} = -G^2 \sum_{i=-1}^N \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} (x_i) \sin(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi), \quad (2.55)$$

$$\frac{dL_2}{dt} = -G^2 \sum_{i=-1}^N \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} (y_i) \sin(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi), \quad (2.56)$$

$$\frac{dG_1}{dt} = -G^2 \sum_{i=-1}^N \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} (z_i) \sin(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi), \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} = & -G^2 \sum_{i=-1}^N \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \\ & \times \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi) \left(\frac{a_i - c_i}{L_1} + \frac{c_i}{L_1 e_1^2} \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_2}{dt} = & -G^2 \sum_{i=-1}^N \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \\ & \times \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi) \left(\frac{b_i - d_i}{L_2} + \frac{d_i}{L_2 e_2^2} \right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \varpi}{dt} = & -G^2 \sum_{i=-1}^N \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i} \\ & \times \cos(x_i M_1 + y_i M_2 + z_i \Delta \varpi) \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^2}}{e_2^2 L_2} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^2}}{e_1^2 L_1} \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

2.8 Determinação do Número de Termos do Desenvolvimento

A construção da tabela com os elementos definidos pelas relações apresentadas na Equação (2.43) é feita considerando termos com $2 \leq n \leq 6$, $-10 \leq (k_1, k_2) \leq 10$ e $0 \leq (s_1, s_2) \leq 8$. Respeitando as condições impostas pelas definições da parte Kepleriana e da parte secular, apresentadas após a Equação (2.43), os elementos são reorganizados conforme as magnitudes do termo $\mathcal{T}_i = T_{k_1, k_2, s_1, s_2}^{n_i, q_i}$.

É importante enfatizar que, se a razão de semi-eixos não for um número suficientemente pequeno, isto é, se $\alpha \not\ll 1$, é necessário um número grande de termos do desenvolvimento N para a convergência da série. Uma maneira de se estimar quantos termos são necessários para convergência é analisar o fator $|\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i| / |\sum_{i=0}^N \tau_i|$, onde $\tau_i = \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i L_1^{a_i} L_2^{b_i} e_1^{c_i} e_2^{d_i}$.

Assumindo o caso limite $\alpha = 0.25$, $e_1 = e_2 = 0.5$, obtivemos para $N = 20000$ que $|\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i| / |\sum_{i=0}^N \tau_i| < 10^{-5}$. Como estamos trabalhando com séries de potências nos semi-eixos e nas excentricidades, ao adotar $N = 20000$ como o número de termos do nosso desenvolvimento, qualquer sistema com $\alpha \leq 0.25$ e $e_1, e_2 \leq 0.5$ será bem descrito pelo Hamiltoniano.

Para confirmar a convergência da série, fizemos integrações numéricas das Equações de (2.55) a (2.60). Para essas integrações adotamos $N = 20000$ como o número total de termos do Hamiltoniano, e cada integração foi comparada com a integração das equações exatas de Newton. A integração das equações de Hamilton foi feita com o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem (Press, 2002), enquanto que a integração das equações exatas de Newton foi feita com o integrador RADAU (Everhart, 1985).

As integrações foram feitas para dois conjuntos de parâmetros iniciais, ambos coplanares. Na Figura 2.4 são apresentados os resultados do primeiro conjunto, que define um sistema com parâmetros físicos $m_0 = m_2 = 1M_\odot$ e $m_1 = 10^{-4}M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciando em $a_1 = 0.1AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.01$, $e_2 = 0.3$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$. Na Figura 2.5 são apresentados os resultados do segundo conjunto, com parâmetros físicos $m_0 = 1M_\odot$, $m_1 = 10^{-4}M_\odot$ e $m_2 = 0.5M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciando em $a_1 = 0.2AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.2$, $e_2 = 0.1$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$.

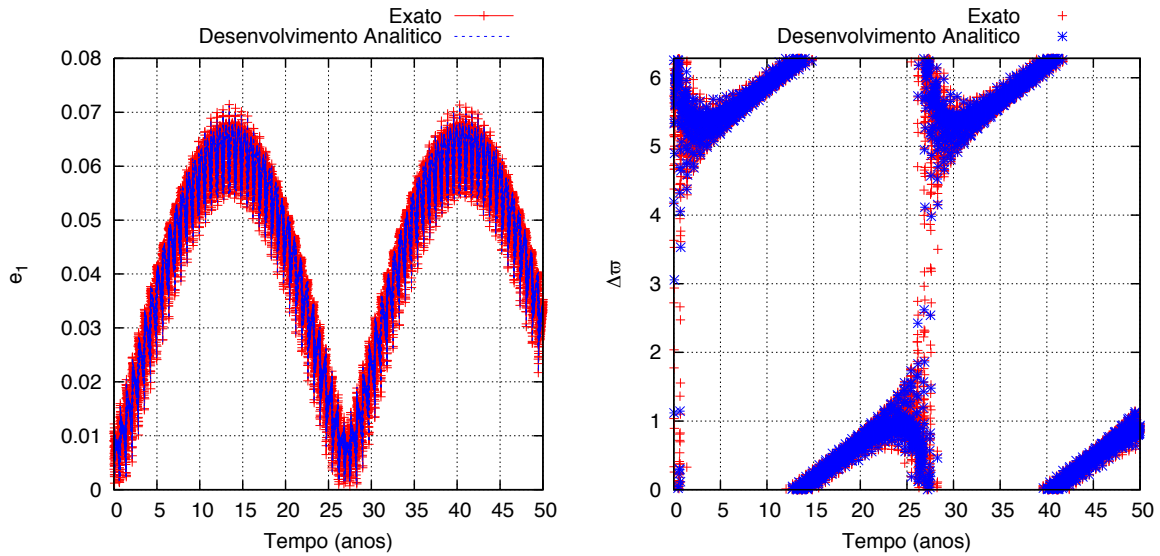


Figura 2.4: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) e do desenvolvimento analítico da função perturbadora (azul) para o primeiro conjunto de integrações.

É possível notar que para os dois conjuntos de condições iniciais, todas as curvas coincidem perfeitamente. Isso indica que o número de termos do desenvolvimento adotado, $N = 20000$, é suficiente para a descrição da função para ambos os conjuntos de elementos orbitais, conforme era esperado.

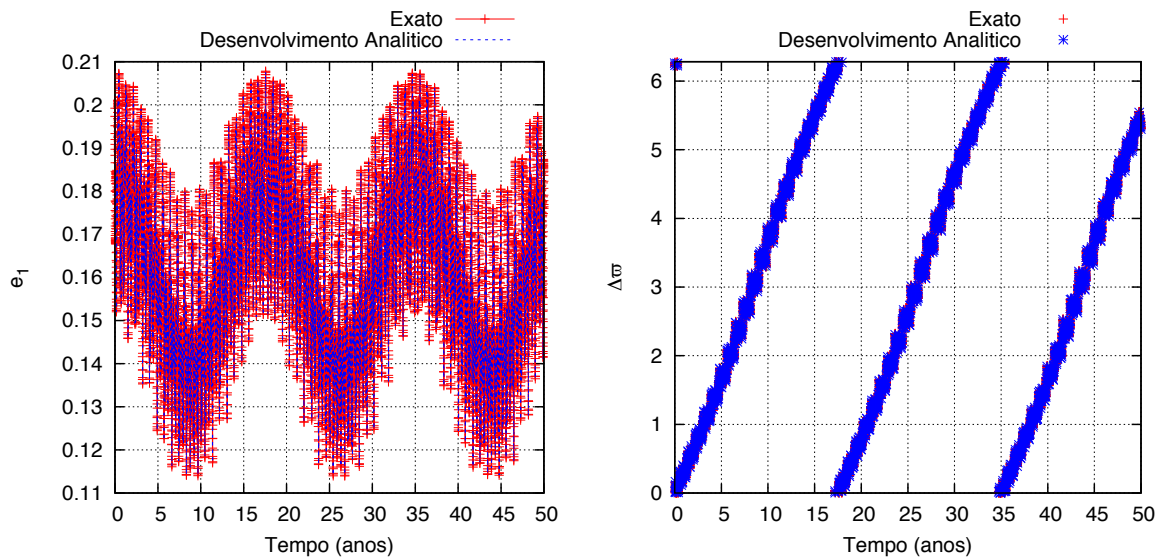


Figura 2.5: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) e do desenvolvimento analítico da função perturbadora (azul) para o segundo conjunto de integrações.

Teorias Seculares de Primeira Ordem

O problema de três corpos coplanar apresentado no Capítulo 2, possui 3 graus de liberdade, como foi apresentado nas equações de movimento na Seção 2.7. Ao se considerar o caso não-ressonante (que será descrito adiante), estudos da dinâmica do problema de três corpos separa os argumentos da função perturbadora, em geral, em duas partes: a parte de curto período, associada aos graus de liberdade relativos aos ângulos M_1 e M_2 (que descrevem a posição dos planetas sobre as órbitas elípticas) e a parte secular, relativa ao grau de liberdade ligado ao ângulo $\Delta\varpi$ (que descreve as deformações e orientação dessas elipses Keplerianas causadas pela atração mútua dos corpos).

Com o interesse na evolução de longo período do sistema, é conveniente simplificar o problema para reduzir o número de graus de liberdade e facilitar o estudo da dinâmica. Para esse fim são introduzidas as teorias Seculares.

3.1 Teoria Secular Analítica de Primeira Ordem

Uma das teorias de perturbação mais utilizada é a teoria de Hori (Hori 1966, veja também Ferraz-Mello 2007) que, por meio de transformações canônicas de Lie, elimina a dependência dos ângulos rápidos do Hamiltoniano. Re-escrevendo o nosso Hamiltoniano, dado pela Equação (2.45), na forma

$$\mathcal{H}(\theta_i, J_i) = \mathcal{H}_0(J_i) + \epsilon \mathcal{H}_1(\theta_i, J_i) \quad (3.1)$$

onde $\theta_1 = M_1$, $\theta_2 = M_2$, $\theta_3 = \Delta\varpi$ são as variáveis angulares, $J_1 = L_1$, $J_2 = L_2$ e $J_3 = G_1$ são suas respectivas ações conjugadas, ϵ é um parâmetro pequeno, dado por

$$\epsilon = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \frac{m_2}{m_0} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^4 \frac{m_2^5(m_0 + m_1)^6}{m_0^5 m_1^4 (m_0 + m_1 + m_2)^2}, \quad (3.2)$$

e

$$\mathcal{H}_0 = -G^2 \sum_{l=-1}^{N_0} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{a_l} L_2^{b_l} e_1^{c_l} e_2^{d_l}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = & -G^2 \sum_{l=N_0+1}^{N_S} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{a_l-4} L_2^{b_l-4} e_1^{c_l} e_2^{d_l} \cos(z_l \Delta \varpi) \\ & -G^2 \sum_{l=N_S+1}^N \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{a_l-4} L_2^{b_l-4} e_1^{c_l} e_2^{d_l} \cos(x_l M_1 + y_l M_2 + z_l \Delta \varpi), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde introduzimos

$$\mathcal{K}_l = \frac{m_2^{2l-3}}{m_0^{2l-5} m_1^{2l-4}} \frac{(m_0 + m_1)^{3l-4}}{(m_0 + m_1 + m_2)^{l+1}}. \quad (3.5)$$

O objetivo do método de Hori é encontrar uma transformação de Lie E_{B^*} das variáveis $(M_1, M_2, \Delta \varpi, L_1, L_2, G_1)$, gerada pela função

$$B^*(\theta_i^*, J_i^*) = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j B_j^*(\theta_i^*, J_i^*) \quad (3.6)$$

para um novo conjunto de variáveis $(M_1^*, M_2^*, \Delta \varpi^*, L_1^*, L_2^*, G_1^*)$, também conhecidas como *variáveis próprias*, tais que o novo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}^*(\theta_i^*, J_i^*) = \mathcal{H}_0^*(J_i^*) + \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j H_j^*(\theta_i^*, J_i^*) \quad (3.7)$$

seja independente dos ângulos rápidos M_1^* e M_2^* . O novo Hamiltoniano será construído a partir da transformação

$$E_{B^*} \mathcal{H}(\theta_i, J_i) = \mathcal{H}(\theta_i^*, J_i^*), \quad (3.8)$$

e assumindo que o Hamiltoniano seja independente do tempo, temos

$$\mathcal{H}^*(\theta_i^*, J_i^*) = \mathcal{H}(\theta_i, J_i). \quad (3.9)$$

A partir das Equações (3.8) e (3.9) temos

$$\mathcal{H}^*(\theta_i^*, J_i^*) = E_{B^*} \mathcal{H}(\theta_i^*, J_i^*). \quad (3.10)$$

A expansão do lado direito da Equação (3.10) até primeira ordem em ϵ é dada por

$$E_{B^*} \mathcal{H}(\theta_i^*, J_i^*) = \mathcal{H}_0(J_i^*) + \epsilon \mathcal{H}_1(\theta_i^*, J_i^*) + \{\mathcal{H}_0(J_i^*), \epsilon B_1^*(\theta_i^*, J_i^*)\}. \quad (3.11)$$

Como vemos na Equação (3.2), o parâmetro pequeno ϵ depende das ações L_1 e L_2 , e portanto, das Equações (3.10) e (3.11) temos

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{H}_1 + \epsilon \{\mathcal{H}_0, B_1^*\} + B_1^* \left[\frac{\partial \mathcal{H}_0^*}{\partial M_1^*} \frac{\partial \epsilon}{\partial L_1^*} - \frac{\partial \mathcal{H}_0^*}{\partial M_2^*} \frac{\partial \epsilon}{\partial L_2^*} \right], \quad (3.12)$$

e quando levamos em conta que \mathcal{H}_0 é independente dos ângulos, a Equação (3.12) se torna

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{H}_1 + \epsilon \{\mathcal{H}_0, B_1^*\}. \quad (3.13)$$

Comparando a Equação (3.13) com a Equação (3.7) e agrupando os termos com mesma ordem em ϵ chegamos nas equações

$$\mathcal{H}_0^* = \mathcal{H}_0, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{H}_1^* = \mathcal{H}_1 + \{\mathcal{H}_0, B_1^*\}. \quad (3.15)$$

A Equação (3.15) pode ser escrita na forma generalizada

$$\mathcal{H}_k^* = \Psi_k + \{\mathcal{H}_0, B_k^*\}, \quad (3.16)$$

onde \mathcal{H}_k^* e B_k^* são funções desconhecidas e Ψ_k é uma função conhecida desde que as $k - 1$ equações anteriores são conhecidas. Portanto, a Equação (3.16), também conhecida como *equação homológica*, possui uma indeterminação que pode ser resolvida caso adotemos a chamada *regra da média*

$$\mathcal{H}_k^* = \langle \Psi_k \rangle_{M_1^*, M_2^*}. \quad (3.17)$$

Para a primeira ordem, temos portanto

$$\mathcal{H}_1^* = \langle \Psi_1 \rangle_{M_1^*, M_2^*} = \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{M_1^*, M_2^*}, \quad (3.18)$$

e, a partir das Equações (3.3), (3.4), (3.14) e (3.18), temos o Hamiltoniano Secular de Primeira Ordem

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1A}^* = & -G^2 \sum_{l=-1}^{N_0} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \\ & - G^2 \epsilon \sum_{l=N_0+1}^{N_S} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \cos(z_l \Delta \varpi^*). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Utilizando a mesma quantidade de termos que foi necessária para representar o Hamiltoniano exato, descrito na Seção 2.8, temos que $N_0 = 73$ e $N_S = 297$.

As equações de movimento são as mesmas apresentadas na Equação (2.46). No entanto, nesse caso o Hamiltoniano secular, dado pela Equação (3.19), não possui dependência explícita dos ângulos M_1^* , M_2^* e ϖ_2^* , então suas respectivas ações conjugadas, L_1^* , L_2^* e AM^* , serão constantes de movimento. Finalmente, o problema é reduzido a apenas 1 grau de liberdade, com as equações de movimento dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{1A}^*}{\partial \Delta \varpi^*} = -\frac{dG_1^*}{dt}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{1A}^*}{\partial G_1^*} = \frac{d\Delta \varpi^*}{dt}. \quad (3.20)$$

Aplicando as relações obtidas para as derivadas parciais apresentadas nas Equações (2.51) e (2.54), chegamos em

$$\frac{dG_1^*}{dt} = -G^2 \sum_{l=N_0+1}^{N_S} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} (z_l) \sin(z_l \Delta \varpi^*), \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \varpi^*}{dt} = & -G^2 \sum_{l=-1}^{N_S} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \\ & \times \cos(z_l \Delta \varpi^*) \left(\frac{d_l \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{e_2^{*2} L_2^*} - \frac{c_l \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{e_1^{*2} L_1^*} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

A integração das Equações (3.21) e (3.22) é feita numericamente, com o algoritmo Runge-Kutta de quarta ordem (Press, 2002). Para avaliar a qualidade do modelo, integramos as órbitas seculares e as comparamos com integrações numéricas das equações exatas de movimento, obtidas com o algoritmo RADAU de Everhart (1985).

As integrações foram feitas para os mesmos conjuntos de parâmetros iniciais utilizados na Seção 2.8, ambos coplanares. As variáveis próprias iniciais a_i^* e e_i^* do modelo secular foram tomadas como o valor médio de a_i e e_i das integrações das equações exatas por um

período Kepleriano da estrela perturbadora. Na Figura 3.1 são apresentados os resultados para o primeiro conjunto, um sistema com parâmetros físicos $m_0 = m_2 = 1M_\odot$ e $m_1 = 10^{-4}M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciando em $a_1 = 0.1AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.01$, $e_2 = 0.3$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$. Na Figura 3.2 são apresentados os resultados para o segundo conjunto, com parâmetros físicos $m_0 = 1M_\odot$, $m_1 = 10^{-4}M_\odot$ e $m_2 = 0.5M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciando em $a_1 = 0.2AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.2$, $e_2 = 0.1$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$.

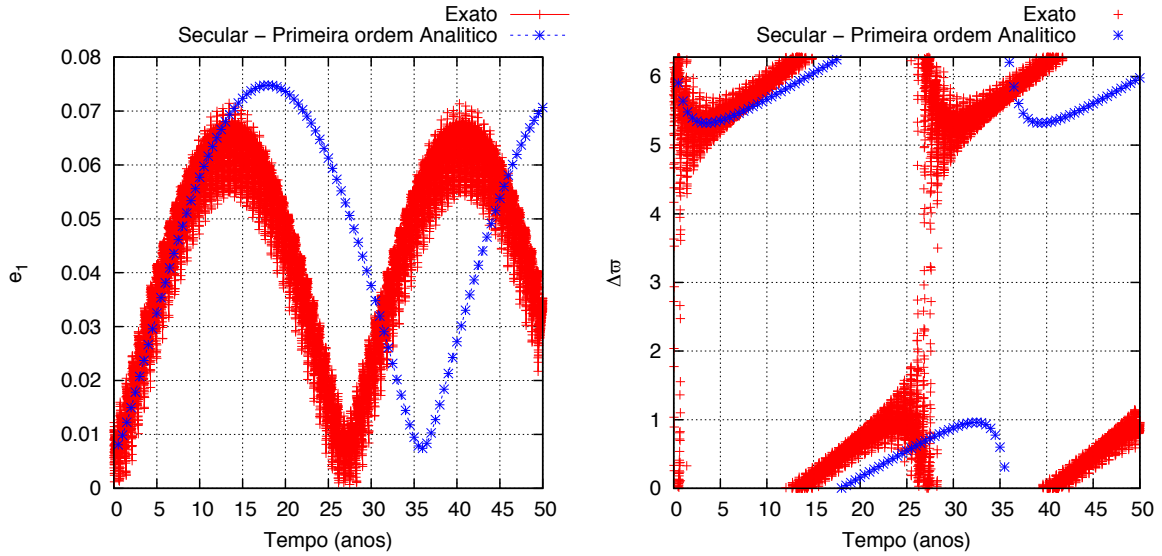


Figura 3.1: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) e do Hamiltoniano Secular analítico de primeira ordem (azul) para o primeiro conjunto de integrações.

Em ambas as Figuras 3.1 e 3.2 é possível notar que o modelo secular analítico, não representa adequadamente as integrações das equações exatas. Os valores obtidos da excentricidade média e do período secular são maiores que os obtidos a partir das integrações exatas. Entretanto, há de se enfatizar que as órbitas seculares apresentam as mesmas características qualitativas das integrações exatas, com o ângulo secular oscilando em torno de $\Delta\varpi = 0^\circ$ na Figura 3.1, e circulando na Figura 3.2.

3.2 Modelo Secular Simplificado

Um modelo frequentemente aplicado no estudo de órbitas de planetas em estrelas binárias foi desenvolvido em Heppenheimer (1978) (veja também Terquem e Papaloizou 2002). Considere o problema de três corpos restrito, composto pelo sistema de partículas

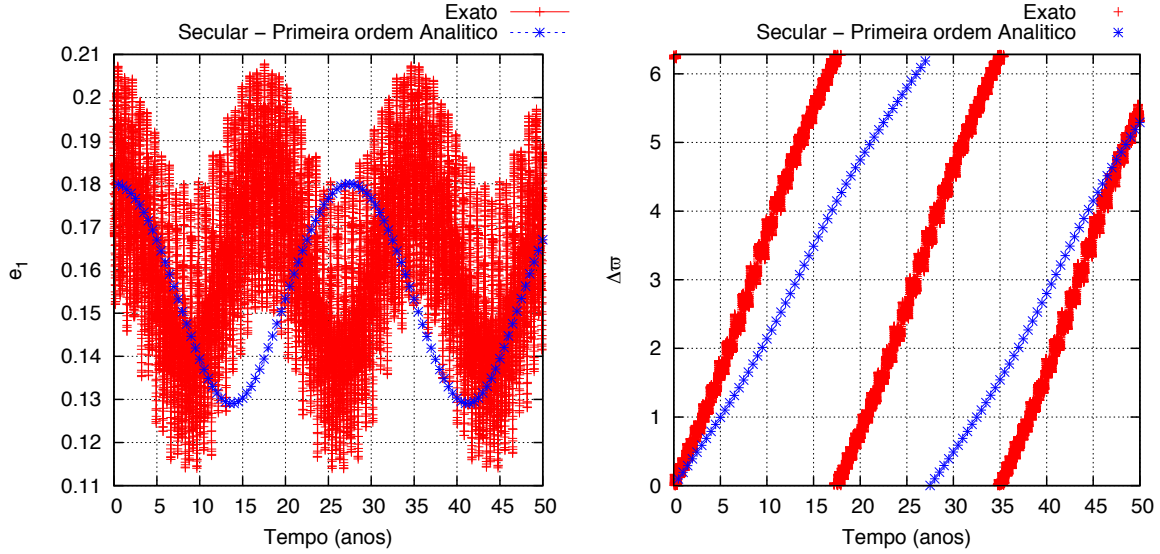


Figura 3.2: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) e do Hamiltoniano Secular analítico de primeira ordem (azul) para o segundo conjunto de integrações.

de massas m_0 , m_1 e m_2 , com $m_1 \ll m_0 \sim m_2$, no sistema de referência astrocêntrico, centrado no corpo m_0 . No problema restrito, o corpo de massa m_2 se move pela órbita elíptica não perturbada, com semi-eixo maior a_2 , excentricidade e_2 e longitude do pericentro ϖ_2 constantes, definidos pela solução do problema de dois corpos. O corpo de massa m_1 se moverá em torno do corpo de massa m_0 com a perturbação externa gerada pelo corpo m_2 .

O Hamiltoniano secular é construído a partir do desenvolvimento da função perturbadora feito em Kaula (1962), truncado em segunda ordem na excentricidade do corpo externo e_2 . Considerando o caso de órbitas coplanares, a função perturbadora é construída aplicando um procedimento de média do tipo *scissors* sobre as longitudes médias dos corpos 1 e 2, procedimento esse também conhecido como o *princípio da média*. O resultado apresentado pelos autores é

$$\mathcal{R}_{\text{Hep}} = \frac{Gm_2}{(1 - e_2^2)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^3} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e_1^2 - \frac{15}{16} \frac{a_1}{a_2} \frac{e_1 e_2}{(1 - e_2^2)} \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \right], \quad (3.23)$$

onde G é a Constante Gravitacional Universal. O princípio da média é amplamente usado por diversas teorias seculares e, apesar de apresentar resultados consistentes na maioria de suas aplicações, não possui um rigor teórico na sua definição (Ferraz-Mello, 2007). Entretanto, como vimos na Seção 3.1, o procedimento de média decorrente da teoria de perturbações canônica de Lie de primeira ordem é equivalente ao princípio da média em sua aplicação. Introduzindo as variáveis

$$\begin{aligned} h &= e_1 \sin(\varpi_1 - \varpi_2), \\ k &= e_1 \cos(\varpi_1 - \varpi_2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

a função perturbadora da Equação (3.23) será dada por

$$\mathcal{R}_{\text{Hep}} = \frac{Gm_2}{(1 - e_2^2)^{3/2}} \frac{a_1^2}{a_2^3} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{8}(k^2 + h^2) - \frac{15}{16} \frac{a_1}{a_2} \frac{e_2}{(1 - e_2^2)} k \right]. \quad (3.25)$$

As variáveis k e h se relacionam por meio das equações planetárias de Lagrange-Laplace modificadas (Brouwer e Clemence, 1961) que, ao considerar somente os termos com ordem menor que 2 em excentricidades, possuem a forma

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{Hep}}}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{1}{n_1 a_1^2} \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{Hep}}}{\partial h}, \quad (3.26)$$

onde $n_1 = \sqrt{Gm_0/a_1^3}$ é o movimento médio do corpo 1. As derivadas parciais acima podem ser facilmente calculadas a partir da Equação (3.25), o que nos leva a

$$\frac{dh}{dt} = g(k - e_f), \quad \frac{dk}{dt} = -gh, \quad (3.27)$$

onde introduzimos

$$g = \frac{3}{4} \frac{m_2}{m_0} \frac{a_1^3}{a_2^3} \frac{n_1}{(1 - e_2^2)^{3/2}} \quad (3.28)$$

e

$$e_f = \frac{5}{4} \frac{a_1}{a_2} \frac{e_2}{(1 - e_2^2)}. \quad (3.29)$$

O sistema de Equações (3.27) possui apenas 1 grau de liberdade e possui como solução

$$k(t) = e_p \cos(gt + \phi_0) + e_f, \quad (3.30)$$

$$h(t) = e_p \sin(gt + \phi_0), \quad (3.31)$$

onde e_p e ϕ_0 são constantes de integração determinadas pelas condições iniciais $k_0 = e_1(0) \cos(\varpi_1(0) - \varpi_2)$ e $h_0 = e_1(0) \sin(\varpi_1(0) - \varpi_2)$, na forma

$$e_p = \sqrt{(k_0 - e_f)^2 + h_0^2}, \quad (3.32)$$

$$\cos \phi_0 = \frac{k_0 - e_f}{e_p}, \quad \sin \phi_0 = \frac{h_0}{e_p}. \quad (3.33)$$

A forma da solução obtida é frequentemente encontrada no estudo do problema asteroidal do Sistema Solar. A grandeza g é conhecida como a frequência secular, e_f como a excentricidade forçada, e_p como a excentricidade própria e ϕ_0 como o ângulo de fase. Podemos perceber das Equações (3.28) e (3.29) que a excentricidade forçada e_f e a frequência secular g são apenas funções de parâmetros constantes do sistema, enquanto que a excentricidade própria e_p e o ângulo de fase ϕ_0 são funções das condições iniciais da órbita do corpo 1.

Para ilustrar a qualidade do modelo, comparamos os resultados das Equações (3.30) e (3.31) com integrações das equações exatas de movimento realizadas numericamente por meio do integrador RADAU (Everhart, 1985), e também com as integrações das equações de movimento do modelo Secular Analítico de Primeira Ordem desenvolvido na Seção 3.1.

As integrações foram feitas para os mesmos conjuntos de parâmetros iniciais apresentados na Seção 3.1, ambos coplanares. Na Figura 3.1 são apresentados os resultados para o primeiro conjunto, um sistema com parâmetros físicos $m_0 = m_2 = 1M_\odot$ e $m_1 = 10^{-4}M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciais $a_1 = 0.1AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.01$, $e_2 = 0.3$ e $M_1 = M_2 = \varpi_1 = \varpi_2 = 0$. Na Figura 3.2 são apresentados os resultados para o segundo conjunto, com parâmetros físicos $m_0 = 1M_\odot$, $m_1 = 10^{-4}M_\odot$ e $m_2 = 0.5M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciando em $a_1 = 0.2AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.2$, $e_2 = 0.1$ e $M_1 = M_2 = \varpi_1 = \varpi_2 = 0$. A excentricidade inicial $e_1(0)$ do modelo foi tomada como o valor médio da evolução da excentricidade e_1 obtida pelas integrações das equações exatas para um período Kepleriano do perturbador m_2 .

A partir das Figuras 3.3 e 3.4 é possível notar que, para os parâmetros iniciais utilizados em ambos os conjuntos de integração, o modelo Secular de Heppenheimer (1978) não apresenta uma boa concordância com a evolução das equações exatas. Tanto o valor médio da evolução da excentricidade e_f quanto a frequência secular g possuem valores muito distintos dos observados nas integrações exatas.

Como o modelo foi construído a partir de um desenvolvimento truncado em baixas ordens da função perturbadora (apenas à ordem 3 em razão de semi-eixos e à ordem 2 em excentricidades), é razoável se esperar que para órbitas com excentricidade $e_1 = 0.3$ ou razão de semi-eixos $a_1/a_2 = 0.2$ as aproximações não sejam boas. De fato, há uma

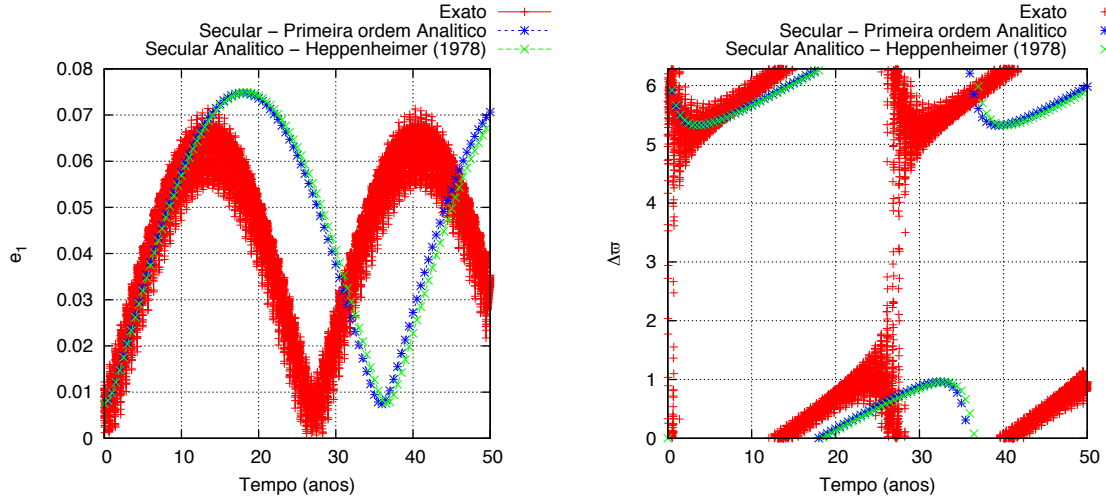


Figura 3.3: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular analítico de primeira ordem (azul) e para o modelo Secular de Heppenheimer (1978) (verde) para o primeiro conjunto de integrações.

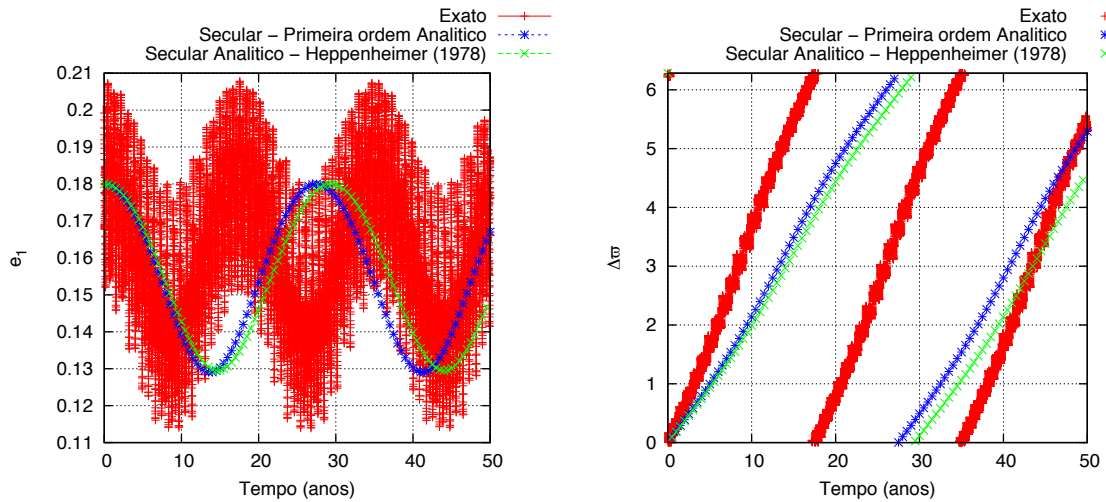


Figura 3.4: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular analítico de primeira ordem (azul) e para o modelo Secular de Heppenheimer (1978) (verde) para o segundo conjunto de integrações.

limitação em relação ao desenvolvimento da função perturbadora, mas o fator que carrega o maior peso na diferença entre o modelo e as integrações exatas é o procedimento da média realizado.

Ao comparar as órbitas integradas por ambos os modelos seculares, é possível notar que há uma diferença perceptível particularmente no valor da frequência secular para o segundo conjunto de integrações. Entretanto, a diferença entre os modelos seculares é muito menor que a diferença entre ambos os modelos das integrações das equações exatas

de movimento. Além disso, como foi apresentado na Seção 2.8, o número de elementos da função perturbadora escolhido na construção do Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem é suficiente para representar perfeitamente as integrações das equações exatas, o que significa que a diferença entre as integrações do Hamiltoniano Secular analítico e as integrações das equações exatas não pode ser atribuída somente a limitações em expansões no desenvolvimento do Hamiltoniano.

3.3 Abordagens Semi-Analíticas

O método semi-analítico, introduzido em Michtchenko e Malhotra (2004) para o problema planetário, é uma abordagem alternativa para a modelagem do problema. Nesse método, o Hamiltoniano é construído a partir de um procedimento de média numérico sobre os ângulos rápidos na função perturbadora expressa em sua forma exata. Assim, a necessidade de um desenvolvimento da função perturbadora em séries é evitada, resultando em um modelo sem limitações nos valores das excentricidades e das inclinações.

3.3.1 Teoria Secular Semi-Analítica de Primeira Ordem

Considere o sistema de 3 corpos de massas m_0 , m_1 e m_2 em um sistema de coordenadas astrocêntrico de Jacobi, centrado no corpo 0, como representado na Figura 2.2. O Hamiltoniano desse sistema pode ser escrito na forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Kep}} + \mathcal{R}, \quad (3.34)$$

onde \mathcal{H}_{Kep} é a parte Kepleriana e \mathcal{R} é a função perturbadora, que são dadas, respectivamente, por

$$\mathcal{H}_{\text{Kep}} = -\frac{Gm_0m_1}{2a_1} - \frac{G(m_0 + m_1)m_2}{2a_2}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{R} = -\frac{Gm_0m_2}{\left|\frac{m_1}{m_0+m_1}\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right|} - \frac{Gm_1m_2}{\left|\frac{-m_0}{m_0+m_1}\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right|} + \frac{G(m_0 + m_1)m_2}{r_2}. \quad (3.36)$$

onde G é a Constante Gravitacional Universal, a_i é o semi-eixo maior e \vec{r}_i o vetor de posição do i -ésimo corpo, ambos no referencial de Jacobi. Como foi apresentado na Seção 2.5, a partir da parte Kepleriana do Hamiltoniano (3.34) é possível introduzir o seguinte conjunto de variáveis ação-ângulo para o caso coplanar

$$\begin{aligned}
M_1, & & L_1 &= \beta_1 \sqrt{a_1 \mu_1}, \\
M_2, & & L_2 &= \beta_2 \sqrt{a_2 \mu_2}, \\
\Delta \varpi &= \varpi_1 - \varpi_2, & G_1 &= L_1 \sqrt{1 - e_1^2}, \\
\varpi_2, & & G_1 + G_2 &= L_1 \sqrt{1 - e_1^2} + L_2 \sqrt{1 - e_2^2} = \text{AM},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

onde $\beta_i = m_i \sigma_{i-1}$, $\mu_i = G \sigma_i$ e $\sigma_i = \sum_{j=0}^i m_j$; novamente M_i são as anomalias médias, ϖ_i são as longitudes do pericentro e e_i as excentricidades do i -ésimo corpo. Como vimos na Equação (3.17), o Hamiltoniano secular de primeira ordem é definido como a média da função perturbadora sobre os ângulos rápidos, no caso M_1 e M_2 , da forma

$$\mathcal{H}_{1S} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(L_1, L_2, G_1, \text{AM}, M_1, M_2, \Delta \varpi, \varpi_2) dM_1 dM_2, \tag{3.38}$$

onde as variáveis ação-ângulo e, por consequência os elementos orbitais, são transformadas numericamente para coordenadas cartesianas e, assim, a função perturbadora é calculada diretamente pela Equação (3.36). A transformação de elementos orbitais para coordenadas cartesianas depende da solução de uma equação transcendental, a equação de Kepler

$$M_i = E_i - e_i \sin E_i \tag{3.39}$$

onde a anomalia excêntrica E_i é necessária para o cálculo das variáveis cartesianas. Classicamente, esse problema é contornado por meio de expansões da função perturbadora. Em sua forma numérica, essa equação pode ser resolvida por algoritmos iterativos para se chegar numa solução aproximada e, desta maneira, evitando o desenvolvimento da função perturbadora.

Esse processo pode ser ainda mais simplificado com uma transformação das variáveis de integração na Equação (3.38). Diferenciando a Equação (3.39), temos

$$dM_i = (1 - e_i \cos E_i) dE_i. \tag{3.40}$$

Os limites das integrais são determinados pela Equação (3.39), o que leva a $M_i = 0 \rightarrow E_i = 0$ e $M_i = 2\pi \rightarrow E_i = 2\pi$, e, assim, o Hamiltoniano secular pode ser calculado na forma

$$\mathcal{H}_{1S} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e_1 \cos E_1)(1 - e_2 \cos E_2) \mathcal{R} dE_1 dE_2. \tag{3.41}$$

O Hamiltoniano secular, assim como o discutido na Seção 3.1, não possui dependência explícita dos ângulos M_1 , M_2 e ϖ_2 , o que faz com que suas ações conjugadas, respectivamente L_1 , L_2 e AM , sejam constantes de movimento.

As equações de movimento do problema de 1 grau de liberdade podem ser dadas simplesmente por

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{1S}}{\partial \Delta \varpi} = -\frac{dG_1}{dt}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{1S}}{\partial G_1} = \frac{d\Delta \varpi}{dt}, \quad (3.42)$$

onde as derivadas parciais do Hamiltoniano são calculadas numericamente. A integração das equações de movimento também é feita numericamente, com um algoritmo como o Runge-Kutta de quarta ordem (Press, 2002). Novamente para ilustrar a qualidade do modelo, fizemos a integração das órbitas seculares que foram comparadas com integrações das equações exatas de movimento, integradas numericamente com o algoritmo RADAU (Everhart, 1985). Também foram introduzidas na comparação as órbitas seculares do modelo Secular Analítico de Primeira Ordem, apresentadas na Seção 3.1.

As integrações foram realizadas para os mesmos conjuntos de parâmetros iniciais apresentados na Seção 3.1. Na Figura 3.5 são apresentados os resultados para o primeiro conjunto, um sistema com parâmetros físicos $m_0 = m_2 = 1M_\odot$ e $m_1 = 10^{-4}M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciais $a_1 = 0.1AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.01$, $e_2 = 0.3$ e $M_1 = M_2 = \Delta \varpi = 0$. Na Figura 3.6 são apresentados os resultados para o segundo conjunto, com parâmetros físicos $m_0 = 1M_\odot$, $m_1 = 10^{-4}M_\odot$ e $m_2 = 0.5M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciais $a_1 = 0.2AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.2$, $e_2 = 0.1$ e $M_1 = M_2 = \Delta \varpi = 0$.

As Figuras 3.5 e 3.5 mostram que ambos os modelos, Secular Semi-Analítico e Secular Analítico, coincidem perfeitamente para ambos os conjuntos de integrações. Como o modelo Secular Semi-Analítico não possui nenhuma limitação com respeito aos desenvolvimentos em excentricidade ou razão de semi-eixos, podemos concluir que o desenvolvimento do modelo Secular Analítico, realizado na Seção 3.1, constitui uma boa aproximação para os valores de excentricidade e razão de semi-eixos utilizados nas integrações. Além disso, podemos concluir que a diferença observada das integrações de ambos os modelos com as integrações das equações exatas se deve ao procedimento de média adotado.

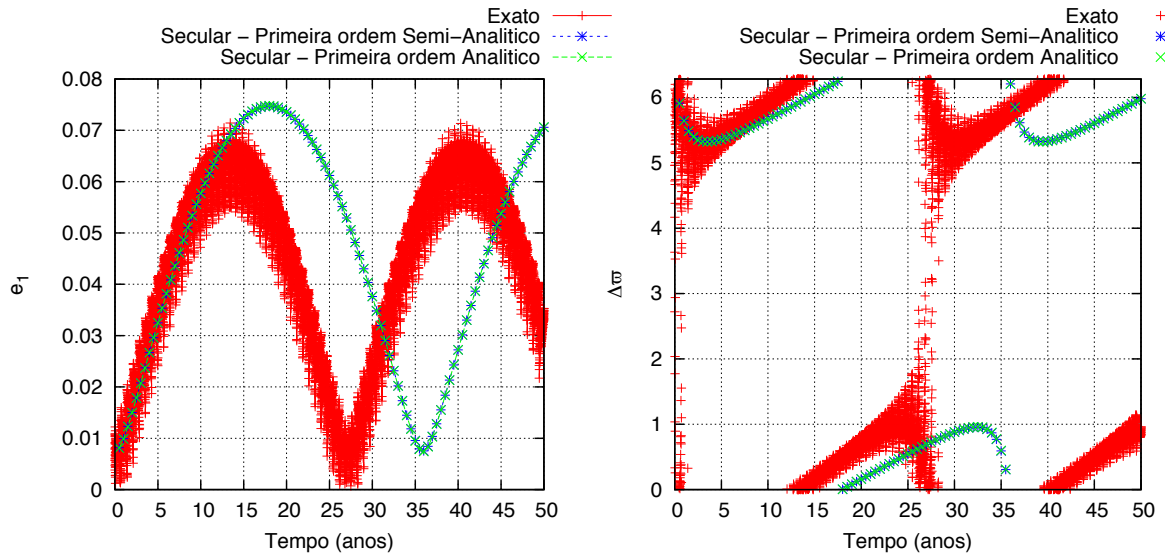


Figura 3.5: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico de Primeira ordem (azul) e do Hamiltoniano Secular Analítico de Primeira ordem (verde) para o primeiro conjunto de integrações.

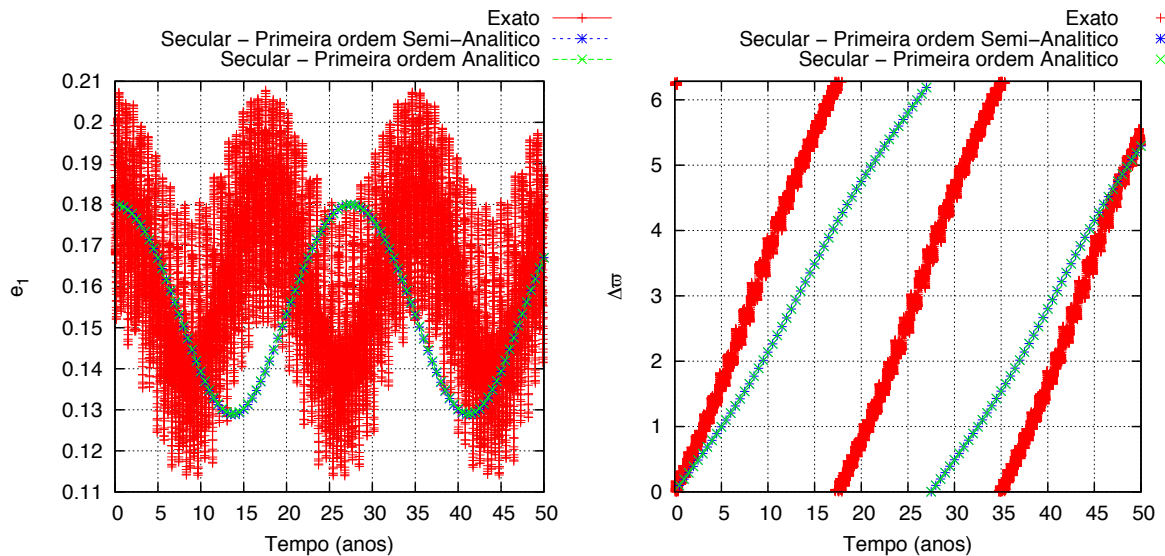


Figura 3.6: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico de Primeira ordem (azul) e do Hamiltoniano Secular Analítico de Primeira ordem (verde) para o segundo conjunto de integrações.

3.3.2 Teoria Semi-Secular Semi-Analítica de Primeira Ordem

Como pôde ser visto nas Seções de 3.2 a 3.3.1, a média de primeira ordem do Hamiltoniano secular não constituiu uma boa aproximação para a descrição do movimento secular, particularmente para os casos das órbitas apresentadas nos exemplos. Como discutido an-

teriormente, podemos verificar que nos modelos Analítico, na Seção 3.1, e Semi-Analítico, na Seção 3.3.1 não há limitações em relação à excentricidade ou razão de semi-eixos para os exemplos apresentados. Isso nos leva à conclusão que o procedimento de média de primeira ordem utilizado exclui termos relevantes para a descrição da dinâmica secular, e tais termos podem estar relacionados com a evolução de curto período do perturbador.

A importância dos termos de curto período pode ser notada partir das integrações das equações exatas, nas Figuras 3.5 e 3.6. Particularmente para o caso apresentado na Figura 3.6, é possível notar que a amplitude das oscilações de curto período da excentricidade e_1 é da mesma ordem de grandeza que a amplitude da oscilação secular. Uma maneira para se levar em conta os termos de curto período é a construção do modelo definido como *semi-secular*. Nesse modelo, o procedimento da média é feito apenas em um dos ângulos rápidos de forma que o Hamiltoniano resultante possuirá dois graus de liberdade, considerando o caso planar. Enquanto isso introduz uma dificuldade ao dobrar o número de variáveis do problema, é possível considerar isoladamente os efeitos de curto período da estrela perturbadora.

Retomando a função Hamiltoniana em sua forma exata no referencial de Jacobi, na Equação (3.34), e a partir das variáveis ação-ângulo dadas pela Equação (3.37), construídas a partir da parte Kepleriana do problema, é possível obter o seguinte conjunto de variáveis ação-ângulo por meio de uma transformação canônica:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= M_1 + \varpi_1, & L_1, \\ M_2, & & L_2, \\ \Delta\varpi &= \varpi_1 - \varpi_2, & K_1 = G_1 - L_1, \\ \varpi_2, & & K_2 = G_1 + G_2 - L_1, \end{aligned} \tag{3.43}$$

onde λ_1 é a longitude média do planeta.

O Hamiltoniano Semi-Secular é construído com uma média sobre apenas o ângulo rápido λ_1 , enquanto o ângulo M_2 e sua ação conjugada L_2 são variáveis livres do problema. Portanto a parte Kepleriana do problema associada à variável L_2 é presente no Hamiltoniano Semi-Secular, que será dado pela expressão

$$\mathcal{H}_{\text{IS-S}}(M_2, L_2, \Delta\varpi, K_1) = -\frac{G(m_0 + m_1)m_2}{2a_2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}d\lambda_1, \tag{3.44}$$

onde, a média em λ_1 e o cálculo da função perturbadora são feitos numericamente, carac-

terizando o modelo Semi-Analítico.

As equações de movimento de Hamilton completas são dadas por

$$\frac{\partial H_{1S-S}}{\partial \lambda_1} = -\frac{dL_1}{dt}, \quad \frac{\partial H_{1S-S}}{\partial L_1} = \frac{d\lambda_1}{dt}, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial H_{1S-S}}{\partial M_2} = -\frac{dL_2}{dt}, \quad \frac{\partial H_{1S-S}}{\partial L_2} = \frac{dM_2}{dt}, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial H_{1S-S}}{\partial(\Delta\varpi)} = -\frac{dK_1}{dt}, \quad \frac{\partial H_{1S-S}}{\partial K_1} = \frac{d(\Delta\varpi)}{dt}, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial H_{1S-S}}{\partial \varpi_2} = -\frac{dK_2}{dt}, \quad \frac{\partial H_{1S-S}}{\partial K_2} = \frac{d\varpi_2}{dt}. \quad (3.48)$$

Após o procedimento da média apresentado na Equação (3.44), o Hamiltoniano Semi-Secular não possui dependência do ângulo rápido λ_1 e, portanto, L_2 é uma constante de movimento. A *regra de d'Alembert* (Murray e Dermott, 1999; Klioner, 2000) diz que, dada a função perturbadora coplanar na forma:

$$R = \sum S_j(a_1, a_2, e_1, e_2) \cos(j_1\lambda_1 + j_2\lambda_2 + j_3\varpi_1 + j_4\varpi_2), \quad (3.49)$$

os coeficientes dos ângulos obedecerão a relação:

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0. \quad (3.50)$$

Como o ângulo M_2 aparece somente na forma $M_2 = \lambda_2 - \varpi_2$, a relação de d'Alembert garante então que os ângulos ϖ_1 e ϖ_2 não aparecem na forma isolada, apenas na forma $(\varpi_1 - \varpi_2) = \Delta\varpi$. Assim, o Hamiltoniano semi-secular não possui dependência explícita do ângulo ϖ_2 e, portanto, sua ação conjugada K_2 também será uma constante de movimento.

Finalmente, o modelo Semi-Secular, com 2 graus de liberdade, possui as equações de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{1S-S}}{\partial M_2} &= -\frac{dL_2}{dt} & \frac{\partial H_{1S-S}}{\partial L_2} &= \frac{dM_2}{dt}, \\ \frac{\partial H_{1S-S}}{\partial(\Delta\varpi)} &= -\frac{dK_1}{dt} & \frac{\partial H_{1S-S}}{\partial K_1} &= \frac{d(\Delta\varpi)}{dt}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

sendo L_1 e $K_2 = G_1 + G_2 - L_1$ as constantes de movimento. Da mesma maneira como foi feito no modelo Secular Semi-Analítico, as derivadas parciais são construídas numericamente e as 4 equações de movimento são integradas simultaneamente por meio do integrador numérico Runge-Kutta de quarta ordem (Press, 2002).

Para ilustrar a qualidade do modelo, integramos as órbitas a partir das equações de movimento do modelo Semi-Secular Semi-Analítico. Os resultados dessas integrações são comparadas com integrações das equações exatas de movimento, integradas numericamente com o algoritmo RADAU (Everhart, 1985), e também com as órbitas seculares obtidas através do modelo Secular Semi-Analítico obtidas na seção 3.3.1.

As integrações foram feitas para os mesmos conjuntos de parâmetros iniciais apresentados na Seção 3.1. Na Figura 3.5 são apresentados os resultados do primeiro conjunto, um sistema com parâmetros físicos $m_0 = m_2 = 1M_\odot$ e $m_1 = 10^{-4}M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciando em $a_1 = 0.1AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.01$, $e_2 = 0.3$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$. Na Figura 3.6 são apresentados os resultados do segundo conjunto, com parâmetros físicos $m_0 = 1M_\odot$, $m_1 = 10^{-4}M_\odot$ e $m_2 = 0.5M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciando em $a_1 = 0.2AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.2$, $e_2 = 0.1$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$.

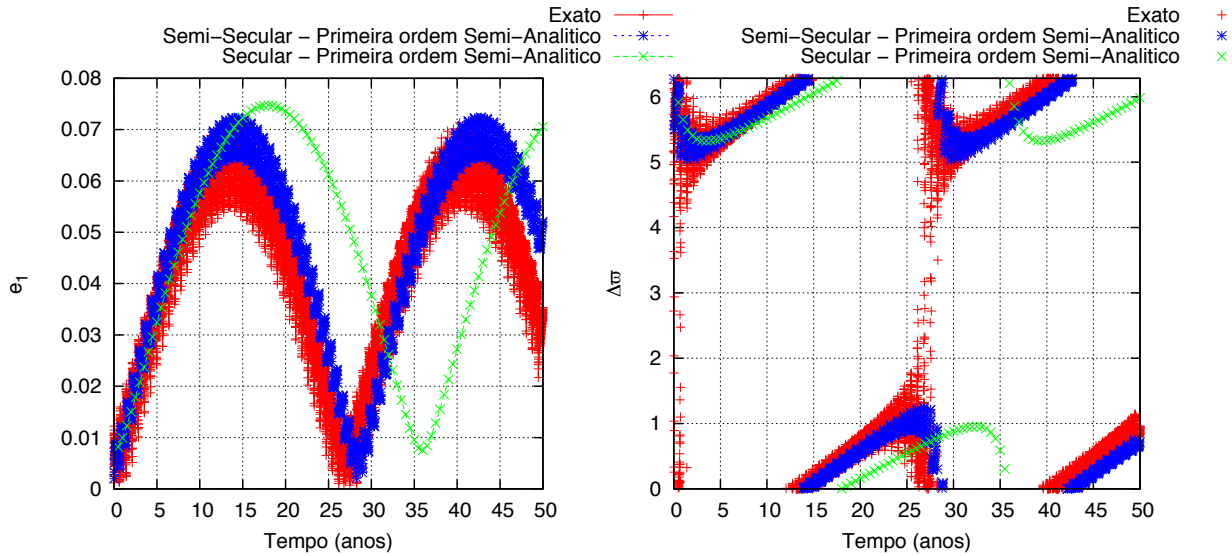


Figura 3.7: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Semi-Secular Semi-Analítico de primeira ordem (azul) e do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico (verde) para o primeiro conjunto de integrações.

É possível verificar a partir das Figuras 3.7 e 3.8 que o modelo Semi-Secular Semi-Analítico constitui uma aproximação significativamente melhor para as equações exatas

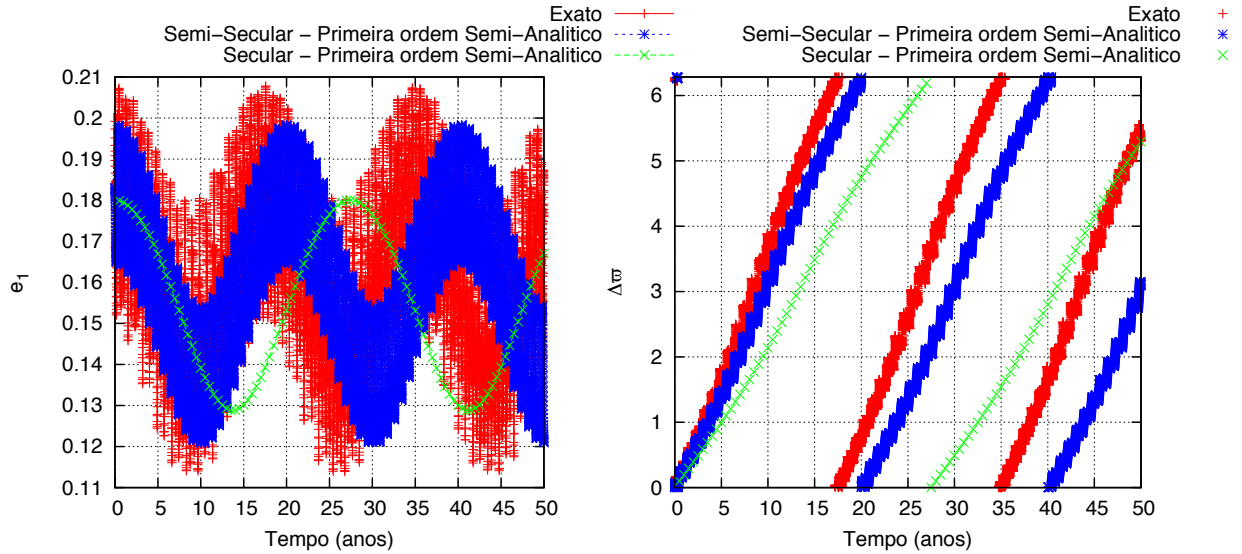


Figura 3.8: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\varpi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Semi-Secular semi-analítico de primeira ordem (azul) e do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico (verde) para o segundo conjunto de integrações.

que o modelo Secular Semi-Analítico. Tanto o valor médio da excentricidade e_1 quanto a frequência secular apresentam valores mais próximos aos obtidos a partir das equações exatas, embora ainda haja uma diferença apreciável, principalmente para o conjunto de parâmetros iniciais apresentados na Figura 3.8.

Esse resultado também mostra que, os termos mais importantes que estavam sendo descartados no procedimento de média do modelo Secular de primeira ordem eram justamente os termos relacionados ao perturbador de alta massa. Entretanto, é importante enfatizar que ainda há alguma parcela da informação da evolução secular sendo eliminada pelo procedimento da média de primeira ordem em λ_1 , que é responsável pelo desvio entre as integrações das equações exatas e das integrações do modelo Semi-Secular Semi-Analítico.

Como já foi mencionado, uma desvantagem ao trabalhar com o modelo Semi-Secular é o número de graus de liberdade que ele possui. Como o maior interesse ao realizar os procedimentos de média no modelo Secular é justamente avaliar a evolução de longo período do sistema, a presença das oscilações de curto período dificultam o tratamento do problema. Para avaliar a evolução de longo período a partir do modelo Semi-Secular, as integrações devem cobrir um intervalo de tempo compatível com o período secular, mas a presença das oscilações de curto período exige que o passo de integração seja curto, o que faz com que os cálculos numéricos das órbitas sejam longos.

Teoria Secular de Segunda Ordem

Como foi discutido no capítulo anterior, o Hamiltoniano secular de primeira ordem não foi capaz de descrever satisfatoriamente a evolução de longo período dos exemplos apresentados devido à elevada massa do perturbador. O procedimento de média adotado no modelo secular, desenvolvido a partir da Teoria das Perturbações na Seção 3.1, foi truncado à primeira ordem do parâmetro pequeno, dado por

$$\epsilon = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \frac{m_2}{m_0} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^4 \frac{m_2^5(m_0 + m_1)^6}{m_0^5 m_1^4 (m_0 + m_1 + m_2)^2}. \quad (4.1)$$

Como podemos perceber da Equação (4.1), o parâmetro pequeno é proporcional à massa do perturbador. Portanto, caso a massa do perturbador seja elevada o suficiente, um termo de segunda ordem da perturbação deve ser considerado. Retomando a Equação (3.11) mas incluindo os termos até segunda ordem em ϵ , temos

$$\begin{aligned} E_{B^*} \mathcal{H}(\theta_i^*, J_i^*) = & \mathcal{H}_0(J_i^*) + \epsilon \mathcal{H}_1(\theta_i^*, J_i^*) + \{\mathcal{H}_0(J_i^*), \epsilon B_1^*(\theta_i^*, J_i^*)\} \\ & + \{\mathcal{H}_0(J_i^*), \epsilon^2 B_2^*(\theta_i^*, J_i^*)\} + \{\epsilon \mathcal{H}_1(\theta_i^*, J_i^*), \epsilon B_1^*(\theta_i^*, J_i^*)\} \\ & + \frac{1}{2} \{\{\mathcal{H}_0(J_i^*), \epsilon B_1^*(\theta_i^*, J_i^*)\}, \epsilon B_1^*(\theta_i^*, J_i^*)\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como ϵ é função das ações L_1 e L_2 , e lembrando que $\mathcal{H}^*(\theta_i^*, J_i^*) = E_{B^*} \mathcal{H}(\theta_i^*, J_i^*)$, pode-se escrever a Equação (4.2) como

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^* &= \mathcal{H}_0 \\
&+ \epsilon \mathcal{H}_1 + \epsilon \{\mathcal{H}_0, B_1^*\} + B_1^* \left[\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial M_1^*} \frac{\partial \epsilon}{\partial L_1^*} - \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial M_2^*} \frac{\partial \epsilon}{\partial L_2^*} \right] \\
&+ \epsilon^2 \{\mathcal{H}_0, B_2^*\} + B_2^* \left[\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial M_1^*} \frac{\partial(\epsilon^2)}{\partial L_1^*} + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial M_2^*} \frac{\partial(\epsilon^2)}{\partial L_2^*} \right] \\
&+ \frac{1}{2} \{(2\epsilon \mathcal{H}_1 + \{\mathcal{H}_0, \epsilon B_1^*\}), \epsilon B_1^*\}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Como \mathcal{H}_0 é independente dos ângulos, da Equação (4.3) temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^* &= \mathcal{H}_0 \\
&+ \epsilon \mathcal{H}_1 + \epsilon \{\mathcal{H}_0, B_1^*\} \\
&+ \epsilon^2 \{\mathcal{H}_0, B_2^*\} + \frac{1}{2} \{(2\epsilon \mathcal{H}_1 + \epsilon \{\mathcal{H}_0, B_1^*\}), \epsilon B_1^*\}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A partir da Equação (3.7), desenvolvido até segunda ordem em ϵ , temos

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* + \epsilon \mathcal{H}_1^* + \epsilon^2 \mathcal{H}_2^*, \tag{4.5}$$

e ao comparar as Equações (4.4) e (4.5), podemos identificar os termos com a mesma ordem em ϵ o que leva às equações de perturbação

$$\mathcal{H}_0^* = \mathcal{H}_0, \tag{4.6}$$

$$\mathcal{H}_1^* = \mathcal{H}_1 + \{\mathcal{H}_0, B_1^*\}, \tag{4.7}$$

$$\epsilon^2 \mathcal{H}_2^* = \epsilon^2 \{\mathcal{H}_0, B_2^*\} + \frac{1}{2} \{(2\epsilon \mathcal{H}_1 + \epsilon \{\mathcal{H}_0, B_1^*\}), \epsilon B_1^*\}, \tag{4.8}$$

As Equações (4.6) e (4.7) são as mesmas encontradas na teoria de primeira ordem, desenvolvidas na Seção 3.1, que levam a:

$$\mathcal{H}_0^* = -G^2 \sum_{l=-1}^{N_0} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l}, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{H}_1^* = -G^2 \epsilon \sum_{l=N_0+1}^{N_S} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \cos(z_l \Delta \varpi^*). \quad (4.10)$$

Substituindo a Equação (4.7) na Equação (4.8) temos que

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \mathcal{H}_2^* &= \epsilon^2 \{\mathcal{H}_0, B_2^*\} + \frac{1}{2} \{\epsilon(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1), \epsilon B_1^*\} \\ &= \epsilon^2 \{\mathcal{H}_0, B_2^*\} + \frac{1}{2} [\epsilon^2 \{\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1, B_1^*\} + \epsilon B_1^* \{\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1, \epsilon\} \\ &\quad + \epsilon(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1) \{\epsilon, B_1^*\} + B_1^* (\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1) \{\epsilon, \epsilon\}], \end{aligned} \quad (4.11)$$

e após simplificar os colchetes de Poisson, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^* &= \{\mathcal{H}_0, B_2^*\} + \frac{1}{2} \{\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1, B_1^*\} \\ &\quad + \frac{2}{L_1} \left[B_1^* \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial M_1^*} - (\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1) \frac{\partial B_1^*}{\partial M_1^*} \right] \\ &\quad + \frac{2}{L_2} \left[B_1^* \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial M_2^*} - (\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1) \frac{\partial B_1^*}{\partial M_2^*} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Novamente podemos identificar a Equação homológica (3.16), dada por

$$\mathcal{H}_k^* = \Psi_k + \{\mathcal{H}_0, B_k^*\}, \quad (4.13)$$

onde

$$\Psi_1 = \mathcal{H}_1, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{1}{2} \{\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1, B_1^*\} \\ &\quad + \frac{2}{L_1} \left[B_1^* \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial M_1^*} - (\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1) \frac{\partial B_1^*}{\partial M_1^*} \right] \\ &\quad + \frac{2}{L_2} \left[B_1^* \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial M_2^*} - (\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1) \frac{\partial B_1^*}{\partial M_2^*} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como \mathcal{H}_0 é uma função independente dos ângulos, a Equação homológica (4.13) pode ser simplificada para

$$\nu_1 \frac{\partial B_k^*}{\partial M_1^*} + \nu_2 \frac{\partial B_k^*}{\partial M_2^*} + \nu_3 \frac{\partial B_k^*}{\partial \Delta \varpi^*} = \Psi_k - \mathcal{H}_k^*, \quad (4.16)$$

onde definimos as frequências como

$$\nu_i = \frac{\partial \mathcal{H}_0^*}{\partial J_i^*}. \quad (4.17)$$

Retomando o Hamiltoniano (3.1) e aplicando as relações para as derivadas parciais deduzidas na Seção 2.7 chegamos em

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L_1^*} = -G^2 \sum_{l=-1}^{N_0} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \left(\frac{a_l - c_l}{L_1^*} + \frac{c_l}{L_1^* e_1^{*2}} \right), \\ \nu_2 &= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L_2^*} = -G^2 \sum_{l=-1}^{N_0} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \left(\frac{b_l - d_l}{L_2^*} + \frac{d_l}{L_2^* e_2^{*2}} \right), \\ \nu_3 &= \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial G_1^*} = -G^2 \sum_{l=-1}^{N_0} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \left(\frac{d_l \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{e_2^{*2} L_2^*} - \frac{c_l \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{e_1^{*2} L_1^*} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

A indeterminação da Equação (4.13), onde ambas as funções B_k^* e \mathcal{H}_k^* são desconhecidas, é solucionada ao se adotar a regra da média

$$\mathcal{H}_k^* = \langle \Psi_k \rangle_{M_1^*, M_2^*}. \quad (4.19)$$

Para $k = 1$ temos

$$\nu_1 \frac{\partial B_1^*}{\partial M_1^*} + \nu_2 \frac{\partial B_1^*}{\partial M_2^*} + \nu_3 \frac{\partial B_1^*}{\partial \Delta \varpi^*} = \mathcal{H}_1 - \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{M_1^*, M_2^*}. \quad (4.20)$$

Ao substituir o Hamiltoniano na parte direita da Equação (4.20) chegamos na seguinte equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} \nu_1 \frac{\partial B_1^*}{\partial M_1^*} + \nu_2 \frac{\partial B_1^*}{\partial M_2^*} + \nu_3 \frac{\partial B_1^*}{\partial \Delta \varpi^*} &= -G^2 \sum_{l=N_S+1}^N \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \\ &\quad \times \cos(x_l M_1^* + y_l M_2^* + z_l \Delta \varpi^*). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Existem diversas técnicas para solucionar a Equação (4.21). Uma das técnicas mais usuais consiste em supor uma solução dada na forma geral

$$B_1^* = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [C_i \cos(x_i M_1^* + y_i M_2^* + z_i \Delta \varpi^*) + D_i \sin(x_i M_1^* + y_i M_2^* + z_i \Delta \varpi^*)], \quad (4.22)$$

e determinar os coeficientes C_i e D_i ao substituir a Equação (4.22) na Equação (4.21). Isso nos leva a

$$\begin{aligned} \nu_1 \frac{\partial B_1^*}{\partial M_1^*} + \nu_2 \frac{\partial B_1^*}{\partial M_2^*} + \nu_3 \frac{\partial B_1^*}{\partial \Delta \varpi^*} = & \sum_{i=-\infty}^{\infty} [-C_i \sin(x_i M_1^* + y_i M_2^* + z_i \Delta \varpi^*) \\ & + D_i \cos(x_i M_1^* + y_i M_2^* + z_i \Delta \varpi^*)](x_i \nu_1 + y_i \nu_2 + z_i \nu_3) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Comparando as Equações (4.23) e (4.21), tiramos que

$$C_i = 0, \forall i,$$

$$D_i = 0, \text{ para } i \leq N_S \text{ e } i > N, \quad (4.24)$$

$$D_i = -\frac{\mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i L_1^{*a_i-4} L_2^{*b_i-4} e_1^{*c_i} e_2^{*d_i}}{x_i \nu_1 + y_i \nu_2 + z_i \nu_3}, \text{ para } N_S < i \leq N.$$

Portanto, a primeira ordem da função geradora da transformação de Lie será dada por

$$B_1^* = -G^2 \sum_{l=N_S+1}^N \frac{\mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l}}{x_l \nu_1 + y_l \nu_2 + z_l \nu_3} \sin(x_l M_1^* + y_l M_2^* + z_l \Delta \varpi^*). \quad (4.25)$$

O método utilizado para a solução da Equação homológica (4.21) apresentado, no entanto, só pode ser utilizado quando a forma geral da solução é conhecida. Em seguida, serão apresentados dois métodos que podem ser aplicados de uma maneira geral na solução de equações diferenciais parciais ordinárias de primeira ordem: o *Método das Características* e o *Método da Transformada de Fourier*.

4.1 Método das Características

Seja a equação diferencial parcial ordinária de primeira ordem

$$\nu_1 \frac{\partial B}{\partial \theta_1} + \nu_2 \frac{\partial B}{\partial \theta_2} + \nu_3 \frac{\partial B}{\partial \theta_3} = \Phi(\theta_i), \quad (4.26)$$

onde Φ_i é uma função conhecida e $i = 1, 2, 3$. No método das características, nós queremos encontrar uma parametrização das variáveis θ_i em relação a uma variável comum s tal que

$$\frac{dB}{ds}(\theta_i(s)) = \Phi(\theta(s)) = \Phi(s). \quad (4.27)$$

A derivada completa do lado esquerdo da Equação (4.27) pode ser escrita como

$$\frac{\partial B}{\partial \theta_1} \frac{d\theta_1}{ds} + \frac{\partial B}{\partial \theta_2} \frac{d\theta_2}{ds} + \frac{\partial B}{\partial \theta_3} \frac{d\theta_3}{ds} = \Phi(s). \quad (4.28)$$

Comparando as Equações (4.28) e (4.26), podemos identificar

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{ds} = \nu_1 &\Rightarrow \theta_1 = \nu_1 s + \phi_1, \\ \frac{d\theta_2}{ds} = \nu_2 &\Rightarrow \theta_2 = \nu_2 s + \phi_2, \\ \frac{d\theta_3}{ds} = \nu_3 &\Rightarrow \theta_3 = \nu_3 s + \phi_3, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde ϕ_i são constantes de integração. Portanto, com a parametrização definida pela Equação (4.29), nós reduzimos nossa equação diferencial parcial ordinária a uma simples equação diferencial ordinária que pode ser resolvida por uma quadratura simples, na forma

$$\frac{dB}{ds} = \Phi(s) \Rightarrow B = \int \Phi(s) ds \quad (4.30)$$

Aplicando a parametrização definida pela Equação (4.29) na Equação (4.21), e tomando as constantes de integração ϕ_i arbitrariamente iguais a 0, chegamos em

$$\frac{dB_1^*}{ds} = -G^2 \sum_{l=N_s+1}^N \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \cos[s(x_l \nu_1 + y_l \nu_2 + z_l \nu_3)], \quad (4.31)$$

o que nos leva a

$$B_1^* = -G^2 \sum_{l=N_s+1}^N \frac{\mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l}}{x_l \nu_1 + y_l \nu_2 + z_l \nu_3} \sin[s(x_l \nu_1 + y_l \nu_2 + z_l \nu_3)], \quad (4.32)$$

onde tomamos a nova constante de integração igual a 0. Finalmente, realizando a transformação inversa da Equação (4.29) na Equação (4.32), teremos

$$B_1^* = -G^2 \sum_{l=N_s+1}^N \frac{\mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l}}{x_l \nu_1 + y_l \nu_2 + z_l \nu_3} \sin(x_l M_1^* + y_l M_2^* + z_l \Delta \varpi^*), \quad (4.33)$$

que é exatamente o mesmo resultado alcançado na Equação (4.25).

4.2 Método da Transformada de Fourier

Um outro método utilizado para a solução de uma equação parcial diferencial ordinária é o método da transformada de Fourier. A Equação (4.26) pode ser escrita na forma

$$\nu_1 \frac{\partial B}{\partial \theta_1} + \nu_2 \frac{\partial B}{\partial \theta_2} + \nu_3 \frac{\partial B}{\partial \theta_3} = \vec{\nu} \cdot \vec{\nabla}_{\theta_i} B = \Phi(\theta_i), \quad (4.34)$$

onde definimos o vetor $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, o operador divergente é dado com respeito ao espaço definido pelos ângulos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ e a função $\Phi(\theta_i)$ é uma função conhecida. Denotamos por $\mathcal{F}(f)$ o operador da transformada de Fourier direta aplicada a uma função f , que é definida como (Butkov, 1988)

$$\begin{aligned} g(w_1, w_2, w_3) &= \mathcal{F}(f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) e^{i(w_1 \theta_1 + w_2 \theta_2 + w_3 \theta_3)} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde w_i são as frequências das variáveis θ_i no espaço de Fourier. A transformada inversa, denotada por \mathcal{F}^{-1} , é definida como

$$\begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \mathcal{F}^{-1}(g(w_1, w_2, w_3)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(w_1, w_2, w_3) e^{-i(w_1 \theta_1 + w_2 \theta_2 + w_3 \theta_3)} dw_1 dw_2 dw_3. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aplicando a transformada de Fourier na Equação (4.34) chegamos em

$$\mathcal{F}(\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla}_{\theta_i} B) = \mathcal{F}(\Phi(\theta_i)). \quad (4.37)$$

O lado esquerdo da Equação (4.37) pode ser escrito como

$$\mathcal{F}(\vec{\nu} \cdot \vec{\nabla}_{\theta_i} B) = \vec{\nu} \cdot \mathcal{F}(\vec{\nabla}_{\theta_i} B) = -i\vec{\nu} \cdot \vec{w} (\mathcal{F}(B)), \quad (4.38)$$

onde definimos o vetor $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, composto pelas frequências das variáveis θ_i no espaço de Fourier. Das Equações (4.37) e (4.38), tiramos que

$$\mathcal{F}(B) = i \frac{\mathcal{F}(\Phi(\theta_i))}{\vec{\nu} \cdot \vec{w}}. \quad (4.39)$$

Finalmente, a função B será obtida ao se realizar a transformada de Fourier inversa na Equação (4.39), que nos leva a

$$B = \mathcal{F}^{-1} \left(i \frac{\mathcal{F}(\Phi(\theta_i))}{\vec{\nu} \cdot \vec{w}} \right), \quad (4.40)$$

onde B é uma função das variáveis θ_i . Tomando a notação complexa na Equação homológica (4.21) e aplicando a Equação (4.40), temos

$$B_1^* = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{i}{\vec{\nu} \cdot \vec{w}} \mathcal{F} \left(-G^2 \sum_{l=N_S+1}^N \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} e^{i(x_l M_1^* + y_l M_2^* + z_l \Delta \varpi^*)} \right) \right]. \quad (4.41)$$

Aplicando a definição da transformada de Fourier (4.35) na Equação (4.41) nos leva a

$$B_1^* = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} G^2 \sum_{l=N_S+1}^N \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \\ \times \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{i}{\vec{\nu} \cdot \vec{w}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iM_1^*(x_l+w_1)} dM_1^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{iM_2^*(y_l+w_2)} dM_2^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Delta\varpi^*(z_l+w_3)} d\Delta\varpi^* \right]. \quad (4.42)$$

As integrais da Equação (4.42) são facilmente resolvidas como funções Delta de Dirac, na forma

$$B_1^* = -(2\pi)^{3/2} G^2 \sum_{l=N_S+1}^N \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \\ \times \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{i\delta(x_l+w_1)\delta(y_l+w_2)\delta(z_l+w_3)}{(x_l\nu_1 + y_l\nu_2 + z_l\nu_3)} \right]. \quad (4.43)$$

Aplicando a definição da transformada de Fourier inversa, dada pela Equação (4.36), na Equação (4.43) nos leva a

$$\begin{aligned}
B_1^* = & -(2\pi)^{3/2} G^2 \sum_{l=N_S+1}^N \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \\
& \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(w_1 M_1^* + w_2 M_2^* + w_3 \Delta \varpi^*)} \\
& \times \left[\frac{i\delta(x_l + w_1)\delta(y_l + w_2)\delta(z_l + w_3)}{(x_l \nu_1 + y_l \nu_2 + z_l \nu_3)} \right] dw_1 dw_2 dw_3.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Finalmente, tomando a parte real da solução das integrais na Equação (4.44), teremos

$$B_1^* = -G^2 \sum_{l=N_S+1}^N \frac{\mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{*a_l-4} L_2^{*b_l-4} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l}}{x_l \nu_1 + y_l \nu_2 + z_l \nu_3} \sin(x_l M_1^* + y_l M_2^* + z_l \Delta \varpi^*), \tag{4.45}$$

que é o mesmo resultado alcançado nas Equações (4.25) e (4.33).

Além da função B_1^* , para o cálculo do termo de segunda ordem do Hamiltoniano (4.15) é necessária a função $(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)$. A partir das Equações (3.4) e (4.10), a função $(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)$ pode ser escrita na forma simplificada

$$\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1 = -G^2 \sum_{l=N_0+1}^N \delta_l \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{K}_l L_1^{a_l-4} L_2^{b_l-4} e_1^{c_l} e_2^{d_l} \cos(x_l M_1 + y_l M_2 + z_l \Delta \varpi), \tag{4.46}$$

onde introduzimos o discriminante δ_l , definido como

- $\delta_l = 0$ para $l \leq N_0$;
- $\delta_l = 2$ para $N_0 < l \leq N_S$;
- $\delta_l = 1$ para $l > N_S$.

O termo da segunda ordem do Hamiltoniano transformado será calculado a partir da Equação (4.15) que, após o desenvolvimento dos colchetes de Poisson, será escrita da forma

$$\begin{aligned}
\Psi_2 = & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial M_1} \frac{\partial B_1^*}{\partial L_1} - \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial L_1} \frac{\partial B_1^*}{\partial M_1} \right. \\
& + \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial M_2} \frac{\partial B_1^*}{\partial L_2} - \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial L_2} \frac{\partial B_1^*}{\partial M_2} \\
& \left. + \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial \Delta \varpi} \frac{\partial B_1^*}{\partial G_1} - \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial G_1} \frac{\partial B_1^*}{\partial \Delta \varpi} \right] \quad (4.47) \\
& + \frac{2}{L_1} \left[B_1^* \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial M_1^*} - (\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1) \frac{\partial B_1^*}{\partial M_1^*} \right] \\
& + \frac{2}{L_2} \left[B_1^* \frac{\partial(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)}{\partial M_2^*} - (\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1) \frac{\partial B_1^*}{\partial M_2^*} \right].
\end{aligned}$$

As derivadas parciais das funções B_1^* e $(\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_1)$ acima são calculadas aplicando as relações deduzidas na Seção 2.7 nas Equações (4.45) e (4.46). Em seguida, aplicamos relações trigonométricas para simplificar o resultado que, após uma sequência longa porém direta de cálculos, nos leva a

$$\begin{aligned}
\Psi_2 = & \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{j=N_S+1}^N \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{x_j \nu_1 + y_j \nu_2 + z_j \nu_3} L_1^{*a_i+a_j-8} L_2^{*b_i+b_j-8} e_1^{*c_i+c_j} e_2^{*d_i+d_j} \right. \\
& \times \left[x_i \left(\frac{a_j - c_j}{L_1^*} + \frac{c_j}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - x_j \left(\frac{a_i - c_i}{L_1^*} + \frac{c_i}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right. \\
& \quad + y_i \left(\frac{b_j - d_j}{L_2^*} + \frac{d_j}{L_2^* e_2^{*2}} \right) - y_j \left(\frac{b_i - d_i}{L_2^*} + \frac{d_i}{L_2^* e_2^{*2}} \right) \\
& \quad \left. \left. + z_i \left(\frac{d_j \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_j \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - z_j \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. \times \cos[(x_i + x_j)M_1^* + (y_i + y_j)M_2^* + (z_i + z_j)\Delta\varpi^*] \right\} \\
& + \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{j=N_S+1}^N \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{x_j \nu_1 + y_j \nu_2 + z_j \nu_3} L_1^{*a_i+a_j-8} L_2^{*b_i+b_j-8} e_1^{*c_i+c_j} e_2^{*d_i+d_j} \right. \\
& \times \left[-x_i \left(\frac{a_j - c_j}{L_1^*} + \frac{c_j}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - x_j \left(\frac{a_i - c_i}{L_1^*} + \frac{c_i}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right. \\
& \quad - y_i \left(\frac{b_j - d_j}{L_2^*} + \frac{d_j}{L_2^* e_2^{*2}} \right) - y_j \left(\frac{b_i - d_i}{L_2^*} + \frac{d_i}{L_2^* e_2^{*2}} \right) \\
& \quad \left. \left. - z_i \left(\frac{d_j \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_j \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - z_j \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. \times \cos[(x_i - x_j)M_1^* + (y_i - y_j)M_2^* + (z_i - z_j)\Delta\varpi^*] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

O termo de segunda ordem do Hamiltoniano é determinado a partir da regra da média, da Equação (4.19), que para $k = 2$, nos dá

$$\mathcal{H}_2^* = \langle \Psi_2 \rangle_{M_1^*, M_2^*}, \tag{4.49}$$

O procedimento de média na função Ψ_2 sobre os ângulos M_1^* e M_2^* , dada pela Equação (4.25), equivale a tomar todos os termos independentes de M_1^* e M_2^* de ambas as somatórias. Isso é feito tomando os termos com $x_i = -x_j$ e $y_i = -y_j$ na primeira somatória, e com $x_i = x_j$ e $y_i = y_j$ na segunda somatória. O que nos leva finalmente a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2^* = & \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{j=N_S+1}^N \sum_{|x_j=-x_i, y_j=-y_i} \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{-x_i \nu_1 - y_i \nu_2 + z_j \nu_3} L_1^{*a_i+a_j-8} L_2^{*b_i+b_j-8} e_1^{*c_i+c_j} e_2^{*d_i+d_j} \right. \\
& \times \left[x_i \left(\frac{a_j + a_i - c_j - c_i}{L_1^*} + \frac{c_j + c_i}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - y_i \left(\frac{b_j + b_i - d_j - d_i}{L_2^*} + \frac{d_j + d_i}{L_2^* e_2^{*2}} \right) \right. \\
& \left. \left. + z_i \left(\frac{d_j \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_j \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - z_j \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right] \right. \\
& \left. \times \cos[(z_i + z_j) \Delta \varpi^*] \right\} \\
& + \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{j=N_S+1}^N \sum_{|x_j=x_i, y_j=y_i} \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{x_i \nu_1 + y_i \nu_2 + z_j \nu_3} L_1^{*a_i+a_j-8} L_2^{*b_i+b_j-8} e_1^{*c_i+c_j} e_2^{*d_i+d_j} \right. \\
& \times \left[-x_i \left(\frac{a_j - c_j - a_i + c_j}{L_1^*} + \frac{c_j - c_i}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - y_i \left(\frac{b_j - d_j - b_i + d_j}{L_2^*} + \frac{d_j - d_i}{L_2^* e_2^{*2}} \right) \right. \\
& \left. \left. - z_i \left(\frac{d_j \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_j \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - z_j \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right] \right. \\
& \left. \times \cos[(z_i - z_j) \Delta \varpi^*] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

A partir da Equação (4.48), podemos perceber que o número de termos da função Ψ_2 será da ordem de N^2 . Tomando o mesmo número de termos necessários para representar o Hamiltoniano exato, descrito na Seção 2.8, temos que $N = 20000$ e a função Ψ_2 terá da ordem de 10^8 termos. Após realizar o procedimento de média, o número de termos do Hamiltoniano secular de segunda ordem \mathcal{H}_2^* será reduzido à ordem de 10^6 termos.

Como foi discutido na Seção 3.1, o Hamiltoniano Secular de primeira ordem, construído a partir do mesmo desenvolvimento da função perturbadora, possui aproximadamente 300 termos. Portanto, é importante enfatizar que a inclusão dos termos de segunda ordem aumenta o número de total termos do Hamiltoniano Secular em ao menos 4 ordens de grandeza, o que ilustra a dificuldade que o modelo de segunda ordem introduz no tratamento do problema.

O Hamiltoniano Secular de Segunda Ordem construído possui apenas 1 grau de liber-

dade, com as equações de movimento dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{H}_{2S}^*}{\partial \Delta \varpi^*} = -\frac{dG_1^*}{dt}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_{2S}^*}{\partial G_1^*} = \frac{d\Delta \varpi^*}{dt}, \quad (4.51)$$

onde

$$\mathcal{H}_{2S}^* = \mathcal{H}_0^* + \epsilon \mathcal{H}_1^* + \epsilon^2 \mathcal{H}_2^* \quad (4.52)$$

com \mathcal{H}_0^* , \mathcal{H}_1^* e \mathcal{H}_2^* dados respectivamente pelas Equações (4.9), (4.10) e (4.50). Usando as relações de derivadas parciais deduzidas na Seção 2.7, chegamos nas equações de movimento

$$\begin{aligned} \frac{dG_1^*}{dt} = & -G^2 \sum_{l=N_0+1}^{N_S} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} z_l \sin(z_l \Delta \varpi^*) \\ & + \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{j=N_S+1}^N \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{-x_i \nu_1 - y_i \nu_2 + z_j \nu_3} L_1^{*a_i+a_j} L_2^{*b_i+b_j} e_1^{*c_i+c_j} e_2^{*d_i+d_j} \right. \\ & \times \left[x_i \left(\frac{a_j + a_i - c_j - c_i}{L_1^*} + \frac{c_j + c_i}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - y_i \left(\frac{b_j + b_i - d_j - d_i}{L_2^*} + \frac{d_j + d_i}{L_2^* e_2^{*2}} \right) \right. \\ & \left. \left. + z_i \left(\frac{d_j \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_j \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - z_j \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right] \right. \\ & \left. \times (z_i + z_j) \sin[(z_i + z_j) \Delta \varpi^*] \right\} \\ & + \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{j=N_S+1}^N \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{Q}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{x_i \nu_1 + y_i \nu_2 + z_j \nu_3} L_1^{*a_i+a_j} L_2^{*b_i+b_j} e_1^{*c_i+c_j} e_2^{*d_i+d_j} \right. \\ & \times \left[-x_i \left(\frac{a_j - c_j - a_i + c_j}{L_1^*} + \frac{c_j - c_i}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - y_i \left(\frac{b_j - d_j - b_i + d_j}{L_2^*} + \frac{d_j - d_i}{L_2^* e_2^{*2}} \right) \right. \\ & \left. \left. - z_i \left(\frac{d_j \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_j \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - z_j \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right] \right. \\ & \left. \times (z_i - z_j) \sin[(z_i - z_j) \Delta \varpi^*] \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\varpi^*}{dt} = & -G^2 \sum_{l=-1}^{N_S} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{*a_l} L_2^{*b_l} e_1^{*c_l} e_2^{*d_l} \left(\frac{d_l \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{e_2^{*2} L_2^*} - \frac{c_l \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{e_1^{*2} L_1^*} \right) \cos(z_l \Delta\varpi^*) \\
& + \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{j=N_S+1}^N \sum_{|x_j=-x_i, y_j=-y_i} \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{-x_i \nu_1 - y_i \nu_2 + z_j \nu_3} L_1^{*a_i+a_j} L_2^{*b_i+b_j} \right. \\
& \left. e_1^{*c_i+c_j} e_2^{*d_i+d_j} \mathcal{C}_{ij} \cos[(z_i + z_j) \Delta\varpi^*] \right\} \\
& + \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{j=N_S+1}^N \sum_{|x_j=x_i, y_j=y_i} \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{x_i \nu_1^* + y_i \nu_2^* + z_j \nu_3^*} L_1^{*a_i+a_j} L_2^{*b_i+b_j} \right. \\
& \left. e_1^{*c_i+c_j} e_2^{*d_i+d_j} \mathcal{D}_{ij} \cos[(z_i - z_j) \Delta\varpi^*] \right\},
\end{aligned} \tag{4.54}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{ij} = & \left[x_i \left(\frac{a_j + a_i - c_j - c_i}{L_1^*} + \frac{c_j + c_i}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - y_i \left(\frac{b_j + b_i - d_j - d_i}{L_2^*} + \frac{d_j + d_i}{L_2^* e_2^{*2}} \right) \right. \\
& \left. + z_i \left(\frac{d_j \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_j \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) - z_j \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \right] \\
& \times \left[\frac{(d_i + d_j) \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{(c_i + c_j) \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right] \\
& + \frac{1}{L_1^{*2} e_1^{*4}} \left[2x_i (c_i + c_j) \sqrt{1 - e_1^{*2}} + (1 - e_1^{*2})(z_j c_i - z_i c_j) \right] \\
& - \frac{1}{L_2^{*2} e_2^{*4}} \left[2y_i (d_i + d_j) \sqrt{1 - e_2^{*2}} + (1 - e_2^{*2})(z_i d_j - z_j d_i) \right],
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{ij} = & - \left[x_i \left(\frac{a_j - c_j - a_i + c_j}{L_1^*} + \frac{c_j - c_i}{L_1^* e_1^{*2}} \right) + y_i \left(\frac{b_j - d_j - b_i + d_j}{L_2^*} + \frac{d_j - d_i}{L_2^* e_2^{*2}} \right) \right. \\
& + z_i \left(\frac{d_j \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_j \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) + z_j \left(\frac{d_i \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{c_i \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right) \left. \right] \\
& \times \left[\frac{(d_i + d_j) \sqrt{1 - e_2^{*2}}}{L_2^* e_2^{*2}} - \frac{(c_i + c_j) \sqrt{1 - e_1^{*2}}}{L_1^* e_1^{*2}} \right] \\
& + \frac{1}{L_1^{*2} e_1^{*4}} \left[-2x_i (c_i + c_j) \sqrt{1 - e_1^{*2}} + (1 - e_1^{*2})(z_j c_i - z_i c_j) \right] \\
& + \frac{1}{L_2^{*2} e_2^{*4}} \left[2y_i (d_i + d_j) \sqrt{1 - e_2^{*2}} + (1 - e_2^{*2})(z_j d_i - z_i d_j) \right],
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Assim como no modelo Secular, a integração das Equações (4.53) e (4.54) pode ser feita numericamente, com um algoritmo como o Runge-Kutta de quarta ordem (Press, 2002). Para ilustrar a qualidade do modelo, fizemos a integração das órbitas seculares e comparamos com integrações das equações exatas de movimento, integradas numericamente com o algoritmo RADAU (Everhart, 1985), e também com as integrações das equações de movimento do modelo Secular Analítico de Primeira Ordem, introduzido na Seção 3.1

As integrações foram feitas para os mesmos conjuntos de parâmetros iniciais utilizados nas simulações anteriores. As variáveis próprias iniciais a_i^* e e_i^* do modelo Secular de primeira e de segunda ordem foram tomadas como o valor médio de a_i e e_i das integrações das equações exatas por 1 período Kepleriano da estrela perturbadora.

Na Figura 4.1 são apresentados os resultados para o primeiro conjunto, um sistema com parâmetros físicos $m_0 = m_2 = 1M_\odot$ e $m_1 = 10^{-4}M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciais $a_1 = 0.1AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.01$, $e_2 = 0.3$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$. Na Figura 4.2 são apresentados os resultados para o segundo conjunto, com parâmetros físicos $m_0 = 1M_\odot$, $m_1 = 10^{-4}M_\odot$ e $m_2 = 0.5M_\odot$, e elementos orbitais de Jacobi iniciais $a_1 = 0.2AU$, $a_2 = 1.0AU$, $e_1 = 0.2$, $e_2 = 0.1$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$.

A partir das Figuras 4.1 e 4.2 podemos notar que o modelo Secular Analítico de Segunda Ordem apresenta uma melhora tanto no valor médio e amplitude da oscilação da excentricidade e_1 quanto na frequência de oscilação. Comparando as integrações do modelo de Segunda Ordem com a das equações exatas de movimento, podemos notar uma

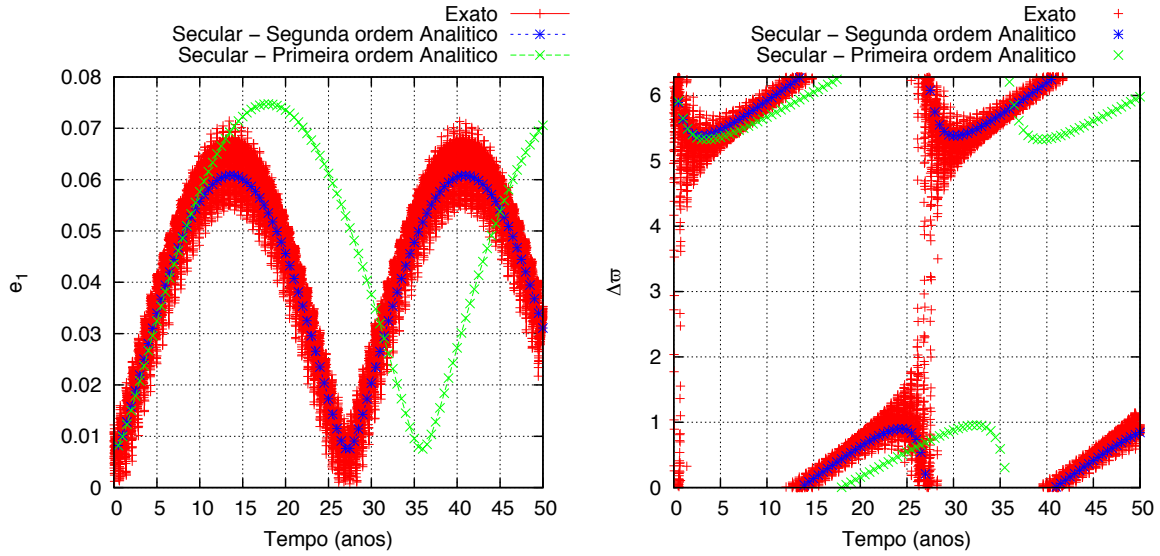


Figura 4.1: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\pi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular Analítico de Segunda Ordem (azul) e para o modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (verde) para o primeiro conjunto de integrações.

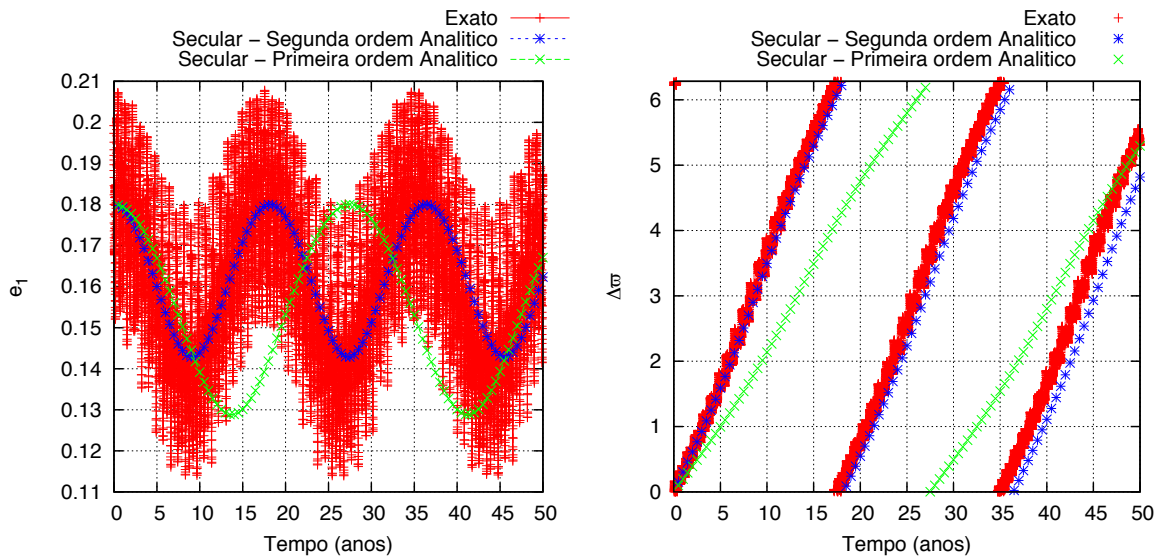


Figura 4.2: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\pi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho), do Hamiltoniano Secular Analítico de Segunda Ordem (azul) e para o modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (verde) para o segundo conjunto de integrações.

coincidência entre ambas com uma diferença do período Secular do segundo conjunto de parâmetros iniciais menor que 5%.

Esse resultado confirma as hipóteses sobre a imprecisão do modelo Secular de Primeira Ordem, levantadas no Capítulo 3. Entretanto, vale reforçar a complexidade que foi adicionada no modelo com o desenvolvimento e o número de termos necessários para se

chegar a esse resultado. Embora somente o modelo de Segunda Ordem consiga representar adequadamente a evolução secular das integrações das equações exatas dos exemplos apresentados, a implementação desse modelo para qualquer órbita pode ser inviável devido à complexidade do modelo já mencionada.

Uma caracterização do problema secular geral, com a determinação dos intervalos de validade de cada modelo para o espaço de parâmetros, é essencial para, sempre que possível, trabalharmos com o modelo mais simplificado. Essa caracterização é o tema do Capítulo 7.

Aspectos Básicos da Dinâmica Secular

Neste capítulo estudaremos algumas das propriedades básicas da dinâmica Secular utilizando os modelos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4. Como foi apresentado nos capítulos anteriores, a dinâmica secular de planetas em estrelas binárias depende de uma série de parâmetros físicos e orbitais do planeta e da binária. Embora a análise das órbitas individuais integradas a partir das equações de movimento seja capaz de identificar características importantes e nos permitir analisar em detalhes o que acontece em cada órbita, métodos de análise ao longo de diferentes parâmetros orbitais nos permite estudar toda uma família de órbitas ao mesmo tempo e também determinar características globais da dinâmica dos sistemas. Uma maneira para executar essa análise é por meio do estudo das soluções estacionárias do problema secular.

5.1 Soluções Estacionárias do Modelo Secular

Como foi visto nos Capítulos 3 e 4, o caso coplanar do problema Secular possui apenas 1 grau de liberdade. Assim, as soluções estacionárias são definidas como as soluções G_{1F} e $\Delta\varpi_F$ para o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dG_1}{dt} = 0 \\ \frac{d\Delta\varpi}{dt} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

A partir das equações de movimento para o problema Secular (3.20), as Equações (5.1) nos levam a

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{Sec}}}{\partial \Delta \varpi} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{Sec}}}{\partial G_1} = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Deste modo, as soluções estacionárias do problema secular podem ser interpretadas como pontos singulares da função Hamiltoniana Secular. Como pode ser visto nas formulações analíticas do Hamiltoniano de primeira (e.g., Equações (3.19) e (3.23)) e segunda ordem (e.g., Equação (4.50)), o Hamiltoniano é uma função par em relação à variável angular $\Delta \varpi$. Portanto, a primeira equação de (5.2) possui duas soluções, $\Delta \varpi_{F1} = 0$ e $\Delta \varpi_{F2} = \pi$ para qualquer $G_1 \neq 0$. A segunda equação de (5.2) é solucionada ao substituímos as soluções $\Delta \varpi_{F1} = 0$ e $\Delta \varpi_{F2} = \pi$, o que nos leva às duas soluções para G_{1F}

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{Sec}}}{\partial G_1} \right|_{G_{1F1}, \Delta \varpi = 0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{Sec}}}{\partial G_1} \right|_{G_{1F2}, \Delta \varpi = \pi} = 0. \quad (5.3)$$

No problema planetário secular ($m_0 \gg m_1$ e $m_1 \sim m_2$), encontramos ambas as soluções estacionárias, associadas com diferentes valores de *excentricidades forçadas*, e_{1F1} e e_{1F2} (Ferraz-Mello, 2007). A primeira é conhecida como *Modo I* e acontece quando as linhas pericêntricas das órbitas dos planetas estão alinhadas, ou seja, $\Delta \varpi = 0$. A segunda configuração, conhecida como *Modo II*, acontece quando as linhas pericêntricas se encontram em uma configuração anti-alinhada, ou seja, $\Delta \varpi = \pi$.

Entretanto, uma dessas configurações é degenerada quando passamos para o caso de planetas em estrelas binárias, quando $m_1 \ll m_0$ e $m_2 \sim m_0$ (para órbitas do tipo S) ou $m_2 \ll m_0$ e $m_1 \sim m_0$ (para órbitas do tipo P). Para demonstrar isso, vamos utilizar o modelo Secular Semi-analítico de Primeira Ordem, apresentado na Seção 3.3.1, aplicado para o sistema multi-planetário *v* Andromedae, o mesmo sistema estudado em Michtchenko e Malhotra (2004). Os parâmetros físicos e orbitais do sistema *v* Andromedae utilizados nesse estudo são apresentados na Tabela 5.1.

Corpo i	$m_i (M_\odot)$	$a_i (AU)$	e_i
0	1.3	–	–
1	1.75×10^{-3}	0.83	0.252
2	3.79×10^{-3}	2.5	0.308

Tabela 5.1 - Parâmetros do sistema planetário *v* Andromeda com os planetas **c** e **d** adotados no estudo em Michtchenko e Malhotra (2004). O sistema é considerado coplanar.

Nesta análise, construímos um mapa apresentando os níveis de energia do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico no espaço de fase $e_i \cos \Delta\varpi \times e_i \sin \Delta\varpi$, $i = 1, 2$. Para a construção do mapa, tanto as massas m_i quanto os semi-eixos a_i e o momento angular total $AM = G_1 + G_2$ foram mantidos constantes, conforme os parâmetros apresentados na Tabela 5.1. Como o mapa foi construído variando os valores da excentricidade do planeta interno e_1 , a excentricidade do outro planeta e_2 é recalculada em cada ponto de modo tal que o momento angular total $AM = G_1 + G_2$ permaneça constante ao longo do mapa. No plano superior da Figura 5.1 apresentamos os valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico na escala de cinza. Nessas condições, os níveis de energia constante são órbitas seculares para diferentes valores iniciais, as quais são representadas pelas curvas de cores verde, azul e vermelha. Os mesmos dados também são apresentados no plano $e_2 \cos \Delta\varpi \times e_2 \sin \Delta\varpi$, no plano inferior da Figura 5.1.

A Figura 5.1 mostra que as curvas em verde se localizam em uma região próxima ao valor máximo de energia (tons mais claros de cinza), enquanto que as curvas vermelhas se encontram em uma região próxima do valor mínimo (tons mais escuros de cinza). Nos pontos extremos desse Hamiltoniano, as órbitas seculares se reduzem a apenas um ponto nesse plano, o que significa que ambas as excentricidades e_1 e e_2 , assim como o ângulo da diferença das longitudes dos pericentros $\Delta\varpi$ serão constantes. Essas soluções particulares são soluções estacionárias seculares: a solução de máxima energia, que se encontra no lado positivo e sobre o eixo x ($\Delta\varpi = 0$), corresponde *Modo I*, enquanto que a solução de mínima energia, que se encontra no lado negativo ($\Delta\varpi = \pi$) corresponde ao *Modo II*.

É possível notar que o planeta interno, de menor massa (no painel superior), possui uma amplitude de oscilação da excentricidade maior, chegando até $e_1 \approx 0.7$, enquanto que para o mesmo valor de momento angular total, o planeta externo chega até $e_2 \approx 0.35$. Isso se dá ao fato justamente do planeta externo (no painel inferior) carregar uma maior fração do momento angular total do sistema, com uma maior massa e a uma distância maior à estrela central. Além disso, é possível notar que para o planeta interno o valor da excentricidade do Modo I é menor que a excentricidade do Modo II, enquanto que para o planeta externo a solução estacionária secular de menor excentricidade é o Modo II.

A órbita de transição entre os regimes de circulação para os regimes de oscilação em torno do Modo II, no plano superior, e em torno do Modo I, no plano inferior, já foi definida como uma separatriz do problema secular, causada por uma “ressonância secular” (e.g.

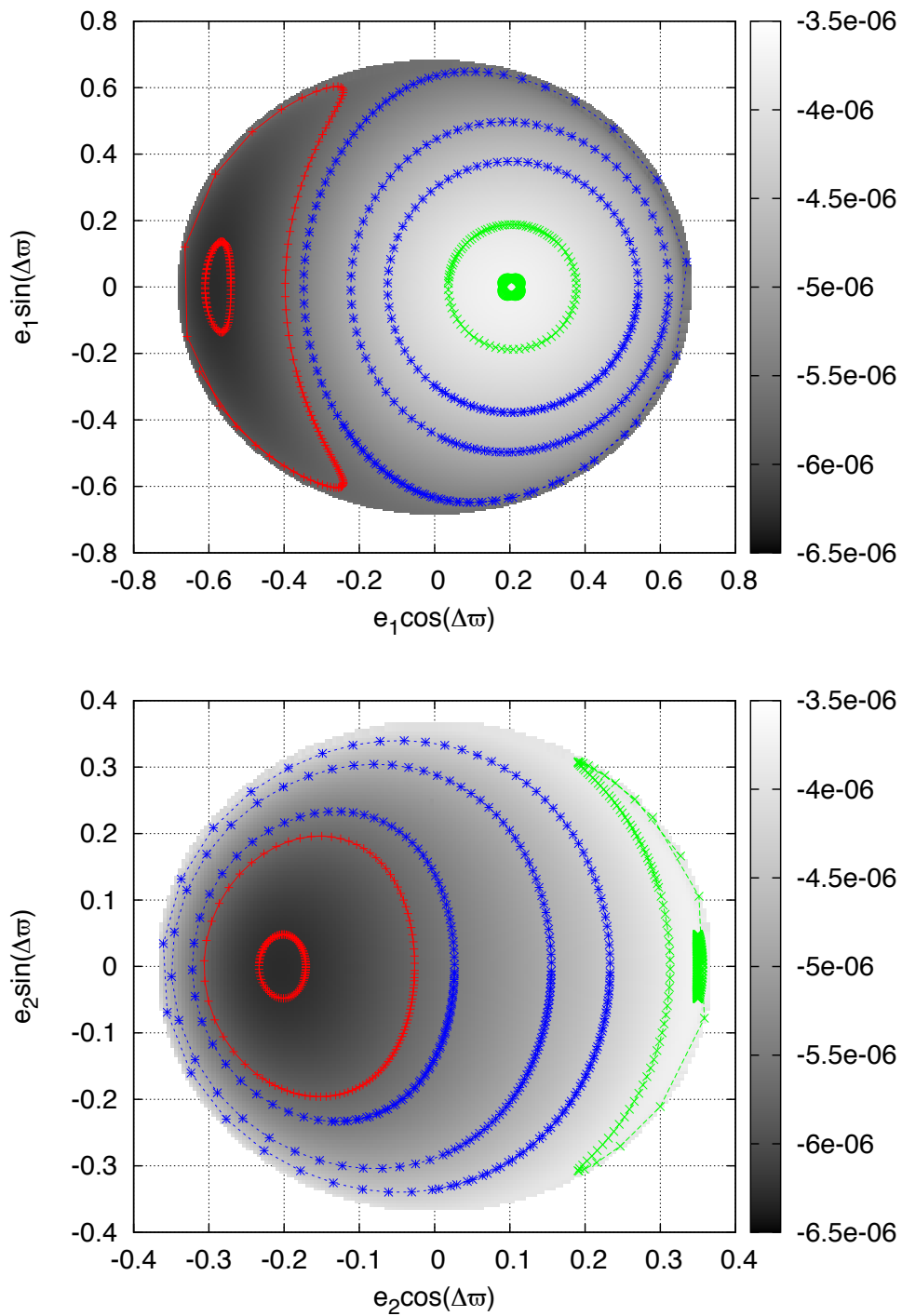


Figura 5.1: Espaço de fase construído a partir do valor de momento angular total para o sistema fictício com os parâmetros apresentados na Tabela para os planetas c (acima) e d (abaixo) de v Andromedae. Na escala de cinza são apresentados os valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico e as curvas coloridas representam órbitas seculares (níveis de energia constante). As curvas em verde representam órbitas oscilando em torno do Modo I, as curvas em vermelho representam órbitas oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula.

Barnes e Greenberg, 2006). Entretanto, essa órbita não está relacionada com nenhuma ressonância, sendo apenas um efeito cinemático causado pela topologia inadequada do plano escolhido para a representação das órbitas seculares.

A partir de um Hamiltoniano planetário truncado em ordem 2 em excentricidades, Pauwels (1983) mostrou que as órbitas seculares podem ser representadas como círculos concêntricos sobre uma esfera no espaço de fase, agora conhecida como *esfera de Pauwels*. A representação das órbitas na esfera pode ser estendida para outros modelos seculares ao aplicarmos as definições das coordenadas na esfera para a longitude \mathcal{L} e latitude \mathcal{B} , dadas por (Pauwels, 1983; Michtchenko e Rodríguez, 2011):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \Delta\varpi, \\ \cos \mathcal{B} &= \frac{L_1 - L_2 + AM - 2G_1}{L_1 + L_2 - AM}, \\ \sin \mathcal{B} &= \frac{2\sqrt{(L_1 - G_1)(L_2 - AM + G_1)}}{L_1 + L_2 - AM},\end{aligned}\tag{5.4}$$

onde, assim como na construção do espaço de fase apresentado na Figura 5.1, L_1 , L_2 e AM são parâmetros do problema. Utilizando a transformação definida pela Equação (5.4), apresentamos as órbitas seculares da Figura 5.1 sobre a esfera de Pauwels, na Figura 5.2.

A Figura 5.2 mostra que os Modos I e II são localizados em hemisférios opostos na esfera de Pauwels. Além disso, a topologia na esfera mostra que a passagem do regime de oscilação (órbitas em verde e em vermelho) para o regime de circulação (órbitas em azul) acontece continuamente. A transição acontece na passagem das órbitas sobre o eixo contendo os pólos Norte e Sul, definidos respectivamente por $\cos \mathcal{B} = 1$ e $\cos \mathcal{B} = -1$. Portanto, podemos concluir que não há uma diferença topológica entre os regimes de movimento da circulação e das oscilações em torno dos Modos I e II, o que significa que não existe uma separatriz associada a uma ressonância.

Podemos perceber também a partir da Figura 5.2 e da Equação (5.4) que os pólos Norte e Sul da esfera de Pauwels correspondem às órbitas com $e_1 = \max$, $e_2 = 0$ e $e_1 = 0$, $e_2 = \max$, respectivamente, onde ‘max’ representa o valor associado ao valor de momento angular total. A distância dos Modos I e II aos pólos Norte e Sul da esfera de Pauwels está relacionada com a razão entre os momentos angulares individuais de cada planeta e, portanto, depende das massas dos planetas. Essa também é a razão para a

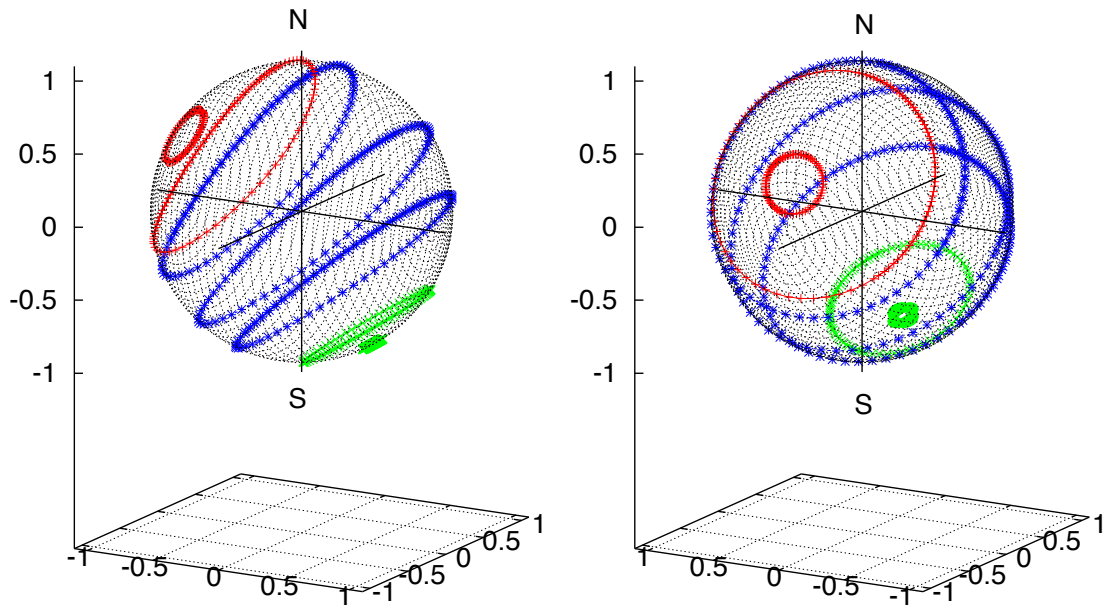


Figura 5.2: Espaço de fase para as órbitas seculares do sistema ν Andromedae, na Figura 5.1, representadas sobre a esfera de Pauwels. As curvas em verde representam órbitas oscilando em torno do Modo I, as curvas em vermelho representam órbitas oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula. Os pólos Norte e Sul da esfera de Pauwels são representados pelas letras N e S , respectivamente.

assimetria entre as soluções estacionárias dos Modos I e II, verificadas no espaço de fase planar na Figura 5.1.

Um caso particularmente interessante para avaliar a dependência das massas dos planetas no problema secular é o caso em que um dos planetas possui uma massa muito maior que a do outro. Para isso, refizemos os mapas do espaço de fase da mesma maneira que foi feito na Figura 5.1, com os mesmos parâmetros orbitais, mas desta vez com o planeta interno com uma massa 100 vezes menor que a do externo. Note que nesse caso o sistema pode ser descrito precisamente pelo modelo Secular de Primeira Ordem, já que as massas das componentes ainda são de ordem planetária. Além disso, os parâmetros do sistema definem um problema restrito, com $m_1 \ll m_2$, e caracterizando uma órbita planetária tipo S. Os mapas de fase construídos são apresentados na Figura 5.3

A Figura 5.3 mostra que os regimes de oscilação em torno dos Modos I e II estão limitados a órbitas de baixa amplitude, e que a maioria das órbitas no espaço de fase está no regime de circulação. O planeta interno (no plano superior) apresenta o Modo I como a solução estacionária de menor excentricidade, enquanto que para o planeta externo (no plano inferior) a excentricidade do Modo II é a menor, ambas com um valor próximo a

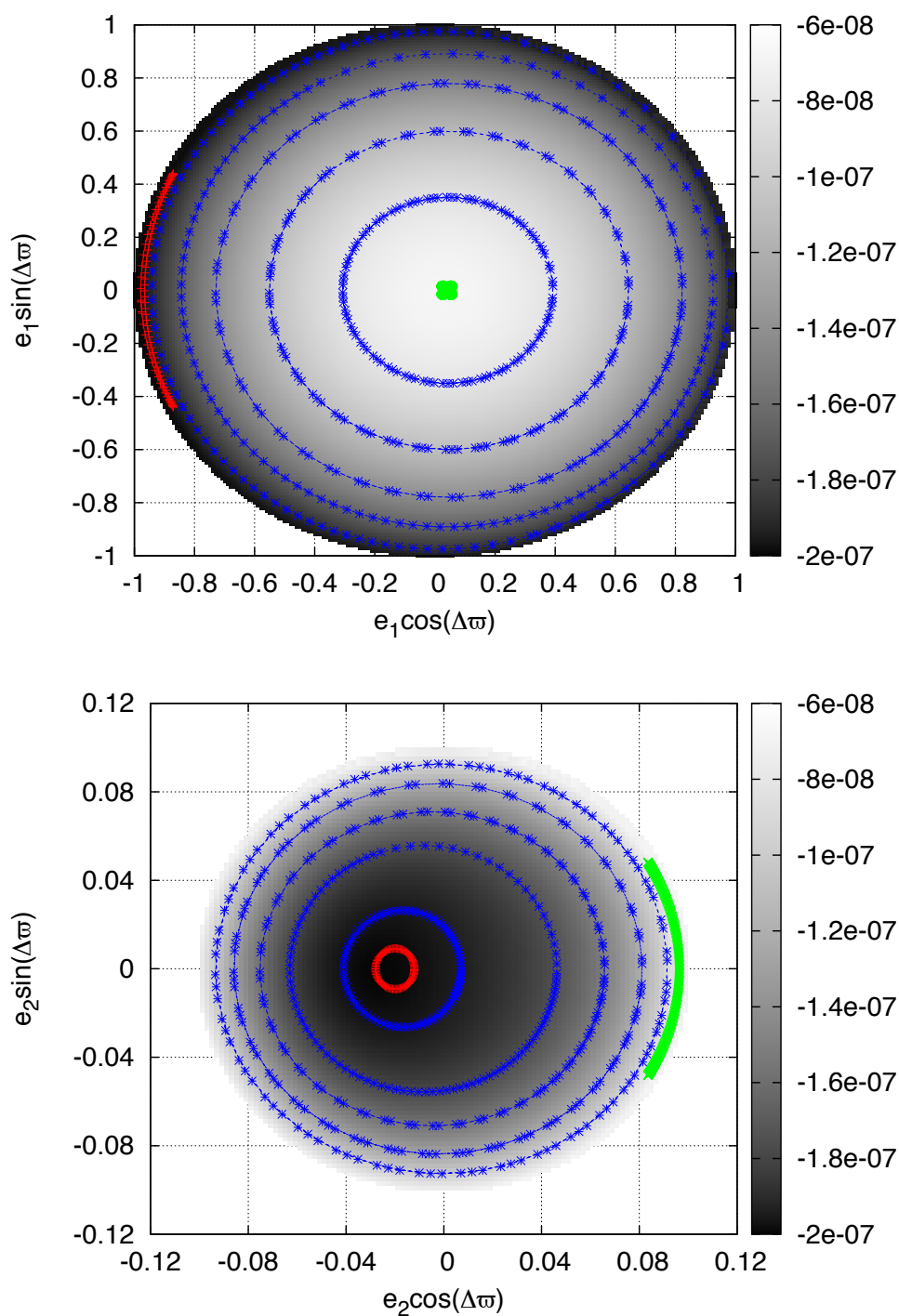


Figura 5.3: Espaço de fase construído a partir do valor de momento angular total para o sistema fictício com os parâmetros apresentados na Tabela 5.1 mas com as massas dos planetas $m_1 = m_2/100$. Na escala de cinza são apresentados os valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico e as curvas coloridas representam órbitas seculares (níveis de energia constante). A curva em verde representa uma órbita oscilando em torno do Modo I, a curva em vermelho representa uma órbita oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula.

0. Além disso, podemos ver que o Modo II, no plano superior, e o Modo I, no plano inferior, se localizam próximos às extremidades do espaço de fase, na região limite em que o movimento é permitido.

Outro caso a ser considerado é o em que o planeta interno possui massa muito maior que a do perturbador, o que caracteriza uma órbita planetária do tipo P em binárias. Repetimos o procedimento, utilizando um sistema com os mesmos parâmetros orbitais apresentados na Tabela 5.1, mas com a massa do planeta interno substituída por um valor $m_1 = 100m_2$. Os mapas construídos para esse caso são apresentados na 5.4.

O caso apresentado na Figura 5.4 mostra que o espaço de fase é dominado pelo regime de circulação, com as órbitas oscilatórias restritas a domínios de baixas amplitudes nas oscilações das excentricidades, assim como foi verificado para o caso $m_1 = m_2/100$ na Figura 5.3. O planeta interno, no plano superior, apresenta o Modo II como a solução estacionária de menor excentricidade, enquanto que para o planeta externo a excentricidade do Modo I é a menor, ambas com um valor bem próximo a 0. Além disso, podemos ver que o Modo I, para o planeta interno, e o Modo II, para o planeta externo, novamente se localizam na região limite do espaço de fase em que o movimento é permitido.

A Figura 5.4 mostra um comportamento dinâmico muito similar ao que foi verificado na Figura 5.3, apenas invertendo a posição dos planos superiores e inferiores em cada figura. Para ambos, a solução estacionária secular de baixa excentricidade para o planeta de menor massa é o Modo I, enquanto que para o planeta de maior massa, a solução de menor excentricidade é o Modo II. É importante enfatizar que as órbitas construídas a partir de análises do Hamiltoniano Secular não consideram interações de curto período ou ressonâncias de movimentos médios, que são fontes de instabilidades particularmente determinantes para órbitas em sistemas multi-planetários com excentricidades elevadas.

As órbitas seculares apresentadas nas Figuras 5.3 e 5.4 podem também ser representadas sobre a esfera de Pauwels, através da transformação apresentada na Equação (5.4). O resultado das esferas construídas para os casos considerados nas Figuras 5.3 e 5.4 é apresentado nas Figuras 5.5 e 5.6, respectivamente.

A partir da análise das órbitas na esfera de Pauwels, notamos que para ambos os casos, $m_1 = m_2/100$ na Figura 5.5 e $m_1 = 100m_2$ na Figura 5.6, os Modos I e II se localizam próximos aos pólos Norte e Sul, com $\cos \delta = \pm 1$. Isso faz com que a oscilação em torno dos Modos I e II esteja confinada próxima aos pólos, e também que o regime de circulação

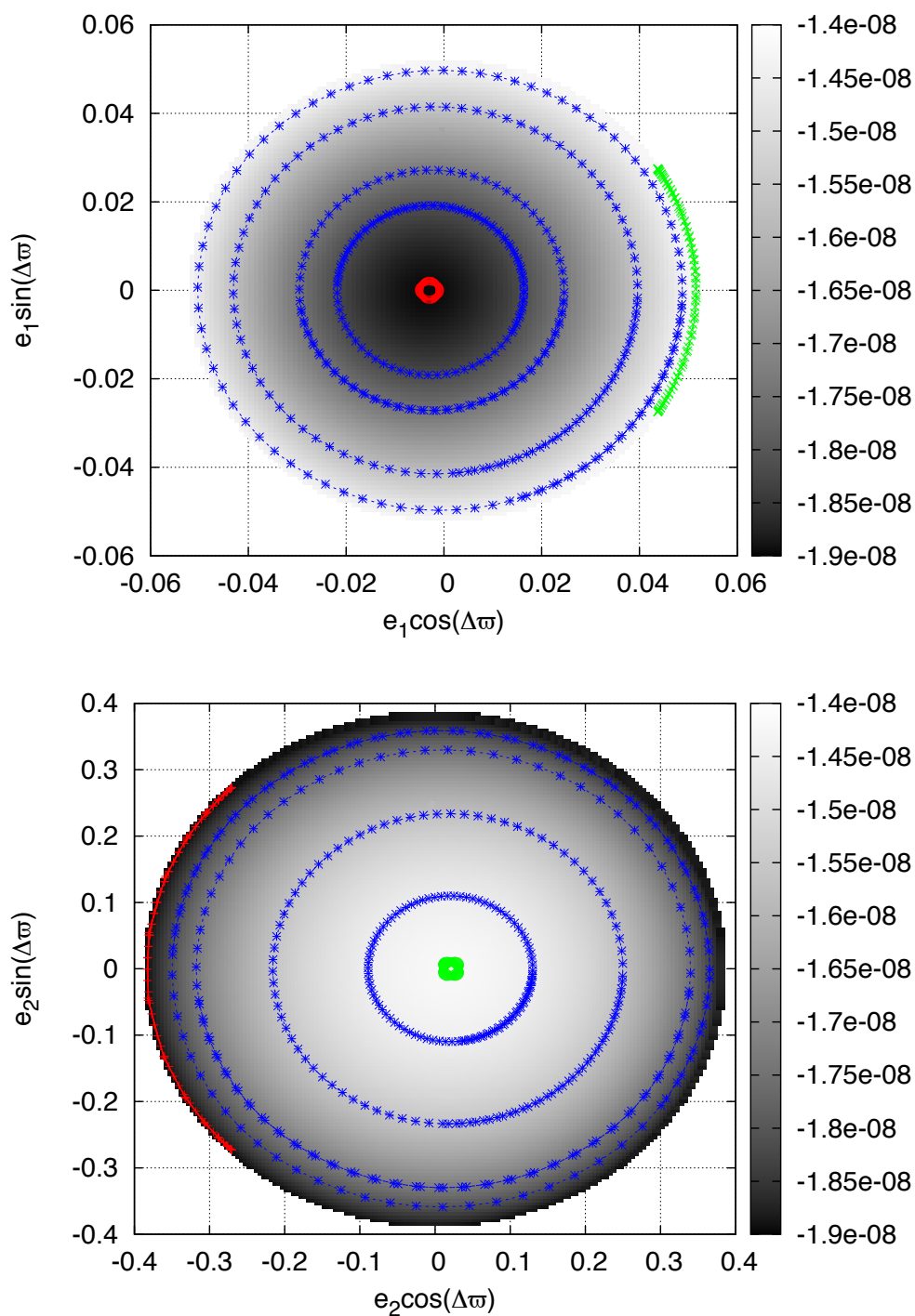


Figura 5.4: Espaço de fase construído a partir do valor de momento angular total para o sistema fictício com os parâmetros apresentados na Tabela 5.1 mas com as massas dos planetas $m_1 = 100m_2$. Na escala de cinza são apresentados os valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico e as curvas coloridas representam órbitas seculares (níveis de energia constante). A curva em verde representa uma órbita oscilando em torno do Modo I, a curva em vermelho representa uma órbita oscilando em torno do Modo II e e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula

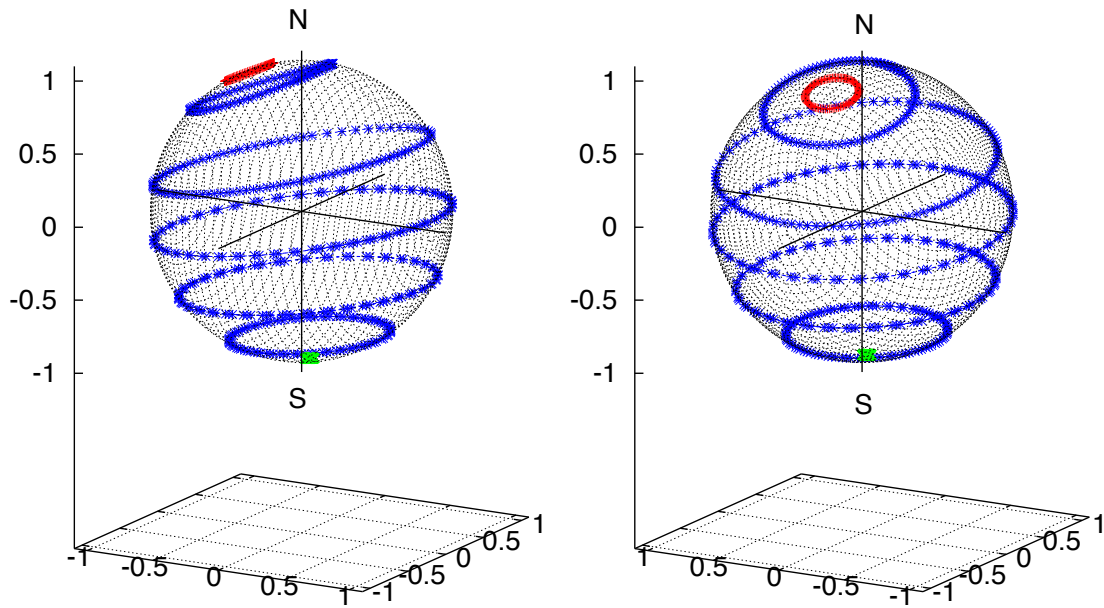


Figura 5.5: Espaço de fase para as órbitas seculares para o sistema com $m_1 = m_2/100$, na Figura 5.3, representadas sobre a esfera de Pauwels. As curvas em verde representam órbitas oscilando em torno do Modo I, as curvas em vermelho representam órbitas oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula.

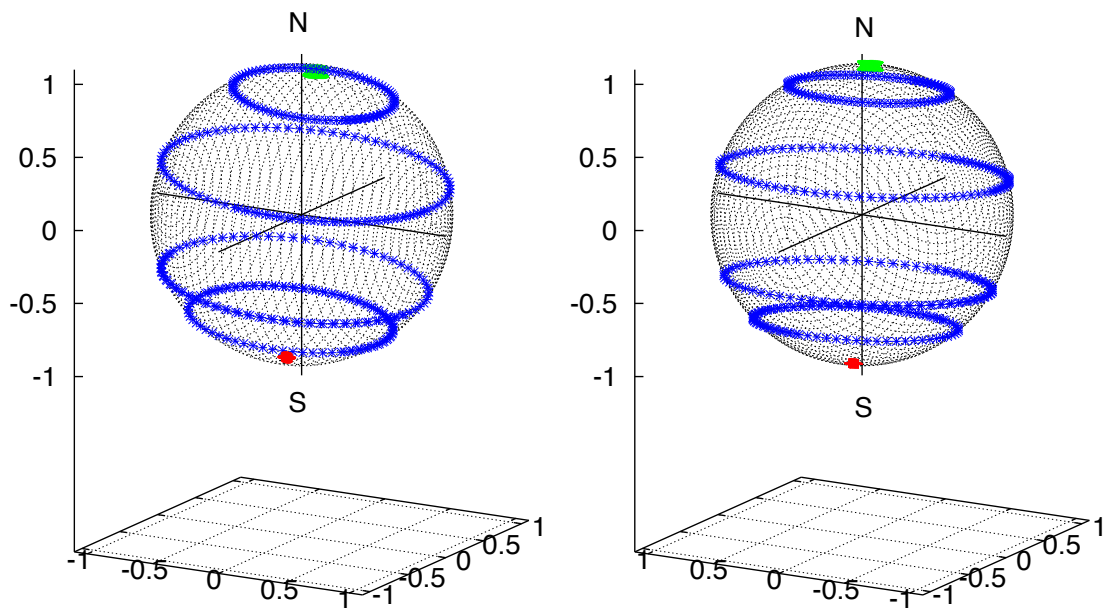


Figura 5.6: Espaço de fase para as órbitas seculares para o sistema com $m_1 = 100m_2$, na Figura 5.4, representadas sobre a esfera de Pauwels. As curvas em verde representam órbitas oscilando em torno do Modo I, as curvas em vermelho representam órbitas oscilando em torno do Modo II e as curvas em azul representam órbitas em que o ângulo $\Delta\varpi$ circula.

domine o espaço de fase na esfera. Esse resultado concorda com os resultados obtidos através da análise do espaço de fase no plano, apresentado nas Figuras 5.3 e 5.4.

Tomando o caso limite, quando $m_1 \ll m_0$ e $m_0 \sim m_2$, para órbitas planetárias tipo S em binárias, temos que $L_1 \ll L_2$. A partir da expressão para $\cos \mathcal{B}$ da Equação (5.4), e lembrando que $G_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2}$, podemos escrever

$$\cos \mathcal{B} = \frac{\frac{L_1}{L_2}(1 - 2\sqrt{1 - e_1^2}) - 1 + \frac{AM}{L_2}}{\frac{L_1}{L_2} + 1 - \frac{AM}{L_2}}. \quad (5.5)$$

Ao fazer a aproximação $L_1/L_2 \approx 0$, a Equação (5.5) nos leva a

$$\cos \mathcal{B} \approx -1, \quad (5.6)$$

ou seja, para o caso $m_1 \ll m_0$ e $m_0 \sim m_2$ para órbitas planetárias do tipo S em binárias, todas as órbitas serão localizadas próximas ao pólo Sul da esfera de Pauwels. Como foi visto nas Figuras 5.3 e 5.5, o pólo Sul da esfera de Pauwels possui as órbitas com $e_1 \approx 0$ e, portanto, a solução estacionária presente nessa região é o Modo I. Assim, podemos concluir que no caso restrito, com $m_1 \ll m_0$ e $m_0 \sim m_2$, a solução estacionária correspondente ao Modo II é degenerada.

Analogamente para o caso $m_2 \ll m_0$ e $m_0 \sim m_1$, para órbitas planetárias do tipo P em binárias, temos que $L_1 \ll L_2$. Nesse caso o planeta assume o índice 2 e, dessa maneira, a Equação (5.5) pode ser re-escrita em função da excentricidade do corpo externo e_2 , de modo que

$$\cos \mathcal{B} = \frac{\frac{L_2}{L_1}(-1 + 2\sqrt{1 - e_2^2}) + 1 - \frac{AM}{L_1}}{\frac{L_2}{L_1} + 1 - \frac{AM}{L_1}}. \quad (5.7)$$

Ao tomar o limite para esse caso $L_2/L_1 \approx 0$, temos então

$$\cos \mathcal{B} \approx 1, \quad (5.8)$$

ou seja, para o caso $m_2 \ll m_0$ e $m_0 \sim m_1$, para órbitas planetárias tipo P em binárias, todas as órbitas serão localizadas próximas ao pólo Norte da esfera de Pauwels. Assim como foi visto nas Figuras 5.4 e 5.6, essa região da esfera de Pauwels corresponde às órbitas com $e_2 \approx 0$, e a solução estacionária presente nessa região novamente é o Modo

I. De uma maneira geral, podemos concluir que no problema restrito, tanto para órbitas planetárias tipo S ou P em binárias, a solução estacionária correspondente ao Modo II será degenerada.

5.2 Determinação das Soluções Estacionárias Seculares

Como foi discutido na Seção 5.1, a solução estacionária não degenerada presente no caso de um planeta em um sistema de estrelas binárias é o Modo I, quando as linhas de pericentro das órbitas do planeta e da estrela perturbadora se encontram alinhados. Portanto, a procura das soluções estacionárias definidas pela Equação (5.3) se reduzem à resolução de

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{Sec}}}{\partial G_1} \right|_{G_{1F}, \Delta\varpi=0} = 0. \quad (5.9)$$

Para um desenvolvimento analítico da função perturbadora, como os apresentados na Seção 3.1 ou no Capítulo 4, a derivada na Equação (5.9) pode ser escrita na forma de um polinômio em potências de G_1 . Porém, a Equação (5.9) poderá ser resolvida analiticamente somente se o desenvolvimento do Hamiltoniano for truncado a baixas ordens de potência de G_1 , caso contrário só poderá ser resolvida através de métodos numéricos. Já para os modelos semi-analíticos, como o desenvolvido na Seção 3.3.1, a derivada é calculada numericamente, o que torna a solução da equação (5.9) possível somente através de métodos numéricos.

No entanto, o cálculo de derivadas numéricas é uma operação delicada de ser realizada introduzindo erros na determinação das soluções estacionárias. Um método numérico que evita o cálculo das derivadas, chamado *método geométrico*, foi introduzido em Michtchenko e Malhotra (2004). Como vimos na seção anterior, para cada valor de momento angular total, a órbita que possuir o maior valor de energia será o Modo I ($\Delta\varpi = 0$), como é representado no painel inferior da Figura 5.7.

O painel superior da Figura 5.7 ilustra os níveis do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico, calculado para o plano $e_1 \times e_2$. Os parâmetros escolhidos são: massas $m_0 = m_2 = M_\odot$, $m_1 = 1 \times 10^{-4} M_\odot$, razão de semi-eixos $a_1/a_2 = 0.1$ e o ângulo secular $\Delta\varpi = 0$. Com esses valores, podemos calcular os níveis de AM constante (linhas tracejadas) e os níveis de H_{Sec} constante (linhas cheias) no plano $e_1 \times e_2$. A coleção dos pontos de tangência dessas

curvas ao longo do mapa é, portanto, a família das soluções estacionárias para o Hamiltoniano Secular Semi-Analítico para o conjunto de parâmetros utilizados para a construção do mapa.

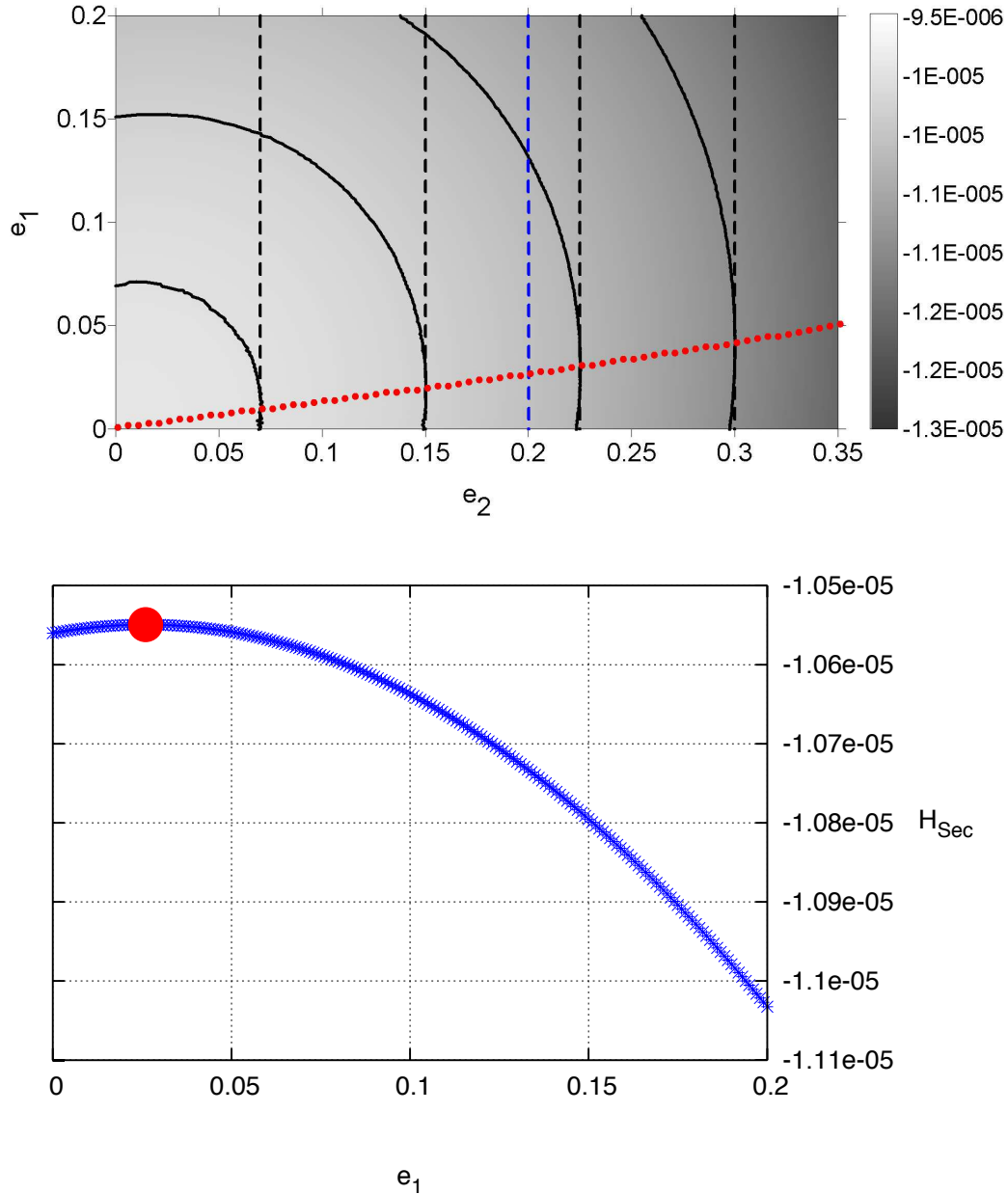


Figura 5.7: Acima: Mapa representativo com os níveis do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico para o sistema $m_0 = m_2 = M_\odot$, $m_1 = 1 \times 10^{-4} M_\odot$, com os parâmetros orbitais $a_1/a_2 = 0.1$ e $\Delta\varpi = 0$. Na escala de cinza é apresentado o Hamiltoniano Secular Semi-Analítico, e seus níveis são representados pelas linhas cheias, enquanto que as linhas tracejadas representam valores de momento angular total. A curva pontilhada vermelha representa a coleção dos pontos de tangência entre as curvas de energia e momento angular total. Abaixo: valores do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico em azul em função da excentricidade do planeta e_1 , calculados para o valor momento angular total definido por $e_1 = 0$ e $e_2 = 0.2$ (curva tracejada em azul no mapa superior), com o ponto de energia máxima representado pelo círculo vermelho.

5.3 Determinação da Frequência Secular

Com a determinação das excentricidades forçadas das soluções estacionárias seculares, a frequência secular g_s pode ser calculada. A frequência secular é definida como a frequência associada à ação G_1 presente na parte integrável do Hamiltoniano secular, como apresentado na Equação (4.18), calculada sobre a solução estacionária secular. De uma maneira geral, a frequência secular é definida como

$$g_s = \left. \frac{\partial \langle \mathcal{H}_{\text{Sec}} \rangle_{\Delta\varpi}}{\partial G_1} \right|_{G_1=G_{1F}}, \quad (5.10)$$

onde G_{1F} é o valor de G_1 calculada sobre a solução estacionária secular. Para os modelos seculares analíticos de primeira e segunda ordem, apresentados na Seção 3.1 e no Capítulo 4, a aplicação de (5.10) nos Hamiltonianos (3.19) e (4.52) nos leva, respectivamente a

$$g_{s1A} = -G^2 \sum_{l=-1}^{N_0} \mathcal{T}_l \mathcal{M}_l \mathcal{Q}_l L_1^{a_l} L_2^{b_l} e_1^{c_l} e_2^{d_l} \left(\frac{d_l \sqrt{1-e_2^2}}{e_2^2 L_2} - \frac{c_l \sqrt{1-e_1^2}}{e_1^2 L_1} \right), \quad (5.11)$$

$$g_{s2A} = g_{s1A} + \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{\substack{j=N_S+1 \\ y_j=-y_i, z_j=-z_i}}^N \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{-x_i \nu_1 - y_i \nu_2 + z_j \nu_3} \right. \\ \left. L_1^{a_i+a_j} L_2^{b_i+b_j} e_1^{c_i+c_j} e_2^{d_i+d_j} \mathcal{C}_{ij} \right\} \\ + \frac{G^4}{4} \left\{ \sum_{i=N_0+1}^N \sum_{\substack{j=N_S+1 \\ y_j=y_i, z_j=z_i}}^N \frac{\delta_i \mathcal{T}_i \mathcal{M}_i \mathcal{K}_i \mathcal{T}_j \mathcal{M}_j \mathcal{K}_j}{x_i \nu_1 + y_i \nu_2 + z_j \nu_3} \right. \\ \left. L_1^{a_i+a_j} L_2^{b_i+b_j} e_1^{c_i+c_j} e_2^{d_i+d_j} \mathcal{D}_{ij} \right\}, \quad (5.12)$$

onde \mathcal{C}_{ij} e \mathcal{D}_{ij} são dados pelas Equações (4.55) e (4.56), respectivamente, e os elementos orbitais são calculados sobre a solução estacionária secular.

Para o caso do Modelo Secular Semi-Analítico, apresentado na Seção 3.3.1, tanto o procedimento de média sobre o ângulo $\Delta\varpi$, quanto a derivada parcial do lado direito da Equação (5.10), devem ser calculados numericamente. A partir da definição do Hamiltoniano Secular Semi-Analítico (3.41), temos

$$g_{s1S} = -\frac{\partial}{\partial G_1} \left[\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e_1 \cos E_1)(1 - e_2 \cos E_2) \mathcal{R} dE_1 dE_2 d\Delta \varpi \right] \Big|_{G_1=G_{1F}}, \quad (5.13)$$

onde \mathcal{R} é a função perturbadora em sua forma exata, dada por (3.36), e as integrais e derivadas são calculadas numericamente, como descrito na Seção 3.3.1.

Para o mesmo conjunto de condições iniciais utilizados no exemplo de aplicação do método geométrico, apresentamos na Figura 5.8 os valores das frequências seculares calculadas com o modelo Secular Semi-Analítico ao longo das soluções estacionárias apresentadas na Figura 5.7.

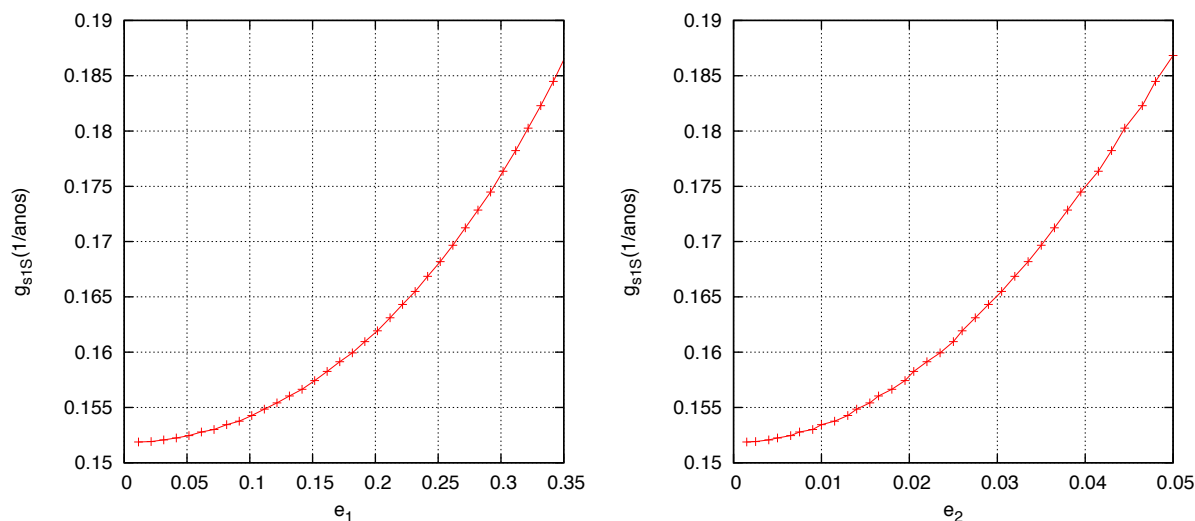


Figura 5.8: Frequências seculares do modelo calculadas a partir da Equação (5.13) para as soluções estacionárias obtidas a partir do método geométrico na Figura 5.7, em função da excentricidade do planeta (esquerda) e da estrela perturbadora (direita).

A Figura 5.8 mostra um crescimento do valor da frequência secular com as excentricidades, tanto do planeta (esquerda) quanto da estrela perturbadora (direita), o que já era esperado. Quanto maiores os valores das excentricidades, as aproximações do planeta com o perturbador serão possíveis, e as perturbações serão mais fortes. É possível notar também que, mesmo para o caso em que ambas as excentricidades são iguais a zero, a frequência secular não se anula. É importante enfatizar que esse é um efeito puramente matemático, já que para excentricidades nulas as longitudes de pericentro são indefinidas.

Ferramentas Numéricas no Estudo da Dinâmica Secular

Nos Capítulos 3 e 4 desenvolvemos os modelos seculares de primeira e segunda ordem para descrever a dinâmica secular de planetas em sistemas de estrelas binárias. De um modo geral, é de nosso interesse a comparação dos resultados dos modelos com integrações numéricas das equações exatas de movimento, que pode ser feita com comparações da evolução temporal dos elementos osciladores órbita a órbita, como foi feito ao longo dos Capítulos 3 e 4.

Conforme vimos no Capítulo 5, a dinâmica secular coplanar de planetas em estrelas binárias é determinada por duas grandezas: a excentricidade forçada e_F e a frequência secular g_s . Vimos que ambas grandezas dependem somente dos parâmetros do problema e, portanto, podem ser utilizadas para determinar características globais da dinâmica secular, independentes das condições iniciais particulares de cada órbita.

Neste capítulo, visamos desenvolver técnicas e ferramentas numéricas para determinação da excentricidade forçada e_F e da frequência secular g_s a partir de integrações numéricas das equações exatas de movimento.

6.1 Transformada de Fourier

Como foi discutido na Seção 4.2, a transformada de Fourier é uma operação que transforma uma função do espaço temporal para o espaço das frequências. Com uma série temporal integrada numericamente para as excentricidades, por exemplo, a partir de uma transformada de Fourier é possível de obter as frequências fundamentais do sistema, em particular a frequência secular a qual estamos interessados.

Para o caso de uma função discreta com N pontos espaçados com um intervalo Δ no tempo, e ainda supondo que o número de pontos do sinal N possa ser escrito como uma potência inteira de 2 (*i.e.* $N = 2^i, i \in \mathbb{N}^*$), a transformada de Fourier discreta pode ser calculada a partir do algoritmo *Fast Fourier Transform* (FFT) (Press, 2002). Por se tratar de um sinal finito no tempo, o intervalo e a resolução das frequências obtidas pela FFT dependem do espaçamento de dados Δ e do tempo total de integração $T = N\Delta$. As frequências são calculadas pela relação

$$f_n = \frac{2\pi n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}, \quad (6.1)$$

onde as frequências positivas correspondem à parte real da transformada, e as frequências negativas correspondem à parte imaginária da mesma. A partir da Equação 6.1, é possível notar que o valor máximo da frequência é $f_c = \pi/\Delta$, enquanto que o valor mínimo é $-f_c$. Esse valor de frequência é chamado de *frequência crítica* ou *frequência de Nyquist*. Caso o sinal possua uma frequência maior que a frequência crítica, o sinal dessa frequência aparecerá como um *alias* no espectro. Além disso, para o caso de um espectro de Fourier de uma função real, as amplitudes das frequências imaginárias são iguais às amplitudes das frequências reais.

Podemos concluir, portanto, que para uma melhor resolução do nosso espectro, isto é, para que tenhamos um espectro com a maior densidade de valores possíveis para as frequências, temos que tomar o maior valor possível para $T = N\Delta$. Além disso, devemos escolher o intervalo entre os pontos Δ de modo que a frequência máxima de interesse (em geral a frequência Kepleriana do corpo interno) seja menor que a frequência crítica.

Como exemplo do cálculo do espectro de Fourier, realizamos uma integração de um sistema coplanar com os parâmetros físicos $m_0 = m_2 = M_\odot$, $m_1 = 1 \times 10^{-4}M_\odot$ e os elementos orbitais iniciais $a_1 = 0.1AU$, $e_1 = 0.04$, $a_2 = 1.0AU$, $e_2 = 0.3$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$. A integração foi feita com $N = 16384 = 2^{14}$ pontos e durante $T = 200$ anos. Para a série temporal obtida da excentricidade e_1 foi calculado o espectro de Fourier, que é apresentado na Figura 6.1.

A partir do espectro apresentado na Figura 6.1, podemos identificar 3 bandas principais que compõem o sinal, cada uma correspondendo a uma das 3 frequências independentes do problema de 3 corpos geral e coplanar: a mais alta é a frequência do movimento Kepleriano do planeta, localizada aproximadamente em $f_P \approx 200 \text{ anos}^{-1}$; a intermediária

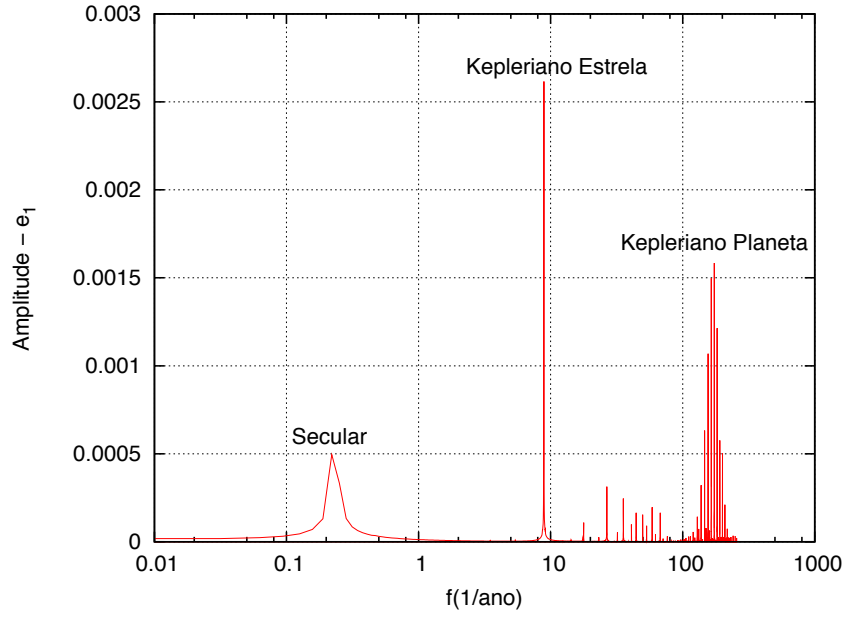


Figura 6.1: Espectro de Fourier calculado para o sinal da excentricidade e_1 .

é a frequência do movimento Kepleriano da estrela, localizada em $g_s \approx 9 \text{ anos}^{-1}$; e a mais baixa é a frequência secular, localizada em $f_E \approx 0.2 \text{ anos}^{-1}$. Cada uma das bandas contém combinações lineares do tipo $if_P + jf_E + kf_S$, $(i, j, k) \in \mathbb{Z}$.

6.2 Espectro de Potência Dinâmico

O Espectro de Potência Dinâmico (Michtchenko et al., 2002; Ferraz-Mello et al., 2005) é uma ferramenta que nos permite visualizar a evolução das frequências fundamentais de um sistema em função de um parâmetro. Para cada valor desse parâmetro (mantendo todos os outros parâmetros constantes) uma órbita é integrada e FFT-processada, como descrito na Seção 6.1. Os picos de cada espectro são identificados como máximos locais ao longo das frequências, e os significativos são escolhidos como aqueles que possuem amplitudes maiores que 5% da amplitude máxima global do espectro. Em seguida, o Espectro de Potência Dinâmico é construído apresentando os valores das frequências dos picos significativos em função de um parâmetro escolhido.

Para exemplificar a construção do Espectro de Potência Dinâmico, aplicamos o método em função do semi-eixo do planeta a_1 , para um sistema com massas $m_0 = m_2 = M_\odot$, $m_2 = 1 \times 10^{-4} M_\odot$ e mantendo fixos os parâmetros orbitais $e_1 = 0.01$, $a_2 = 1AU$, $e_2 = 0.3$ e $\Delta\varpi = 0$.

Com o intuito de realizar comparações com resultados dos modelos analíticos, é importante apresentar os espectros de potência em função de variáveis equivalentes às variáveis próprias, obtidas pelos modelos seculares (e.g., Equação (3.6), ver também Ferraz-Mello 2007), ou seja, o semi-eixo a_1 nesse caso. O semi-eixo equivalente é estimado realizando a média algébrica do valor osculador do semi-eixo a_1 ao longo de um período Kepleriano da estrela perturbadora. Mais detalhes da determinação e da diferença entre as variáveis iniciais osculadoras e as variáveis próprias serão apresentados na Seção 6.4.

O tempo de integração foi adotado $T = 500$ anos, com um número de passos $N = 16384$, o que nos dá uma frequência crítica $f_c = 102.94 \text{ anos}^{-1}$. Esse valor é menor que as frequências Keplerianas do planeta para alguns valores de a_1 , o que fará com que esses termos apareçam “espelhados” em relação à frequência de Nyquist. Entretanto, a presença desses termos não afetará a determinação da frequência secular, que é de nosso maior interesse. O resultado do Espectro de Potência Dinâmico é apresentado na Figura 6.2.

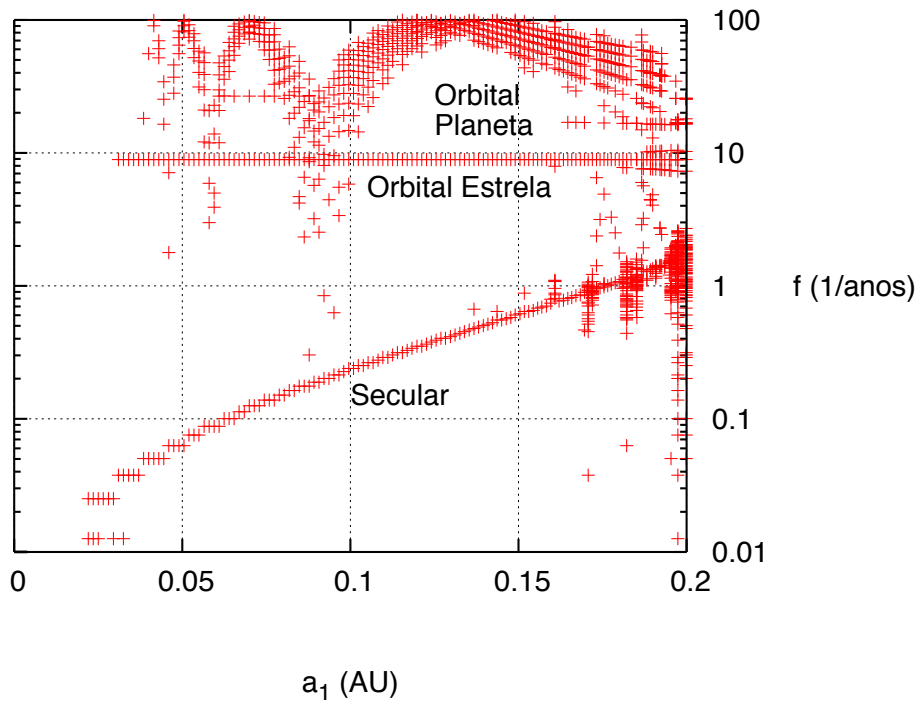


Figura 6.2: Exemplo de espectro de potência dinâmico.

Na Figura 6.2 podemos identificar 3 bandas associadas às frequências fundamentais do sistema e verificar como cada uma delas evolui em relação ao semi-eixo a_1 . Na parte inferior da figura, compreendendo o intervalo de baixas frequências (de 0.01 a 1 anos^{-1}), identificamos a componente secular g_s . Podemos notar que o valor da frequência aumenta

com o aumento do semi-eixo a_1 , o que é esperado já que, para maiores valores de a_1/a_2 , a perturbação será maior, um resultado similar ao apresentado na Figura 5.8.

Localizada no meio do espectro, em aproximadamente $f = 9 \text{ anos}^{-1}$ se encontra a frequência orbital da estrela perturbadora f_E . Como o semi-eixo da estrela a_2 e as massas foram mantidas constantes, já era um resultado esperado que essa frequência permanecesse constante ao longo do espectro. A frequência orbital do planeta f_P se encontra localizada aproximadamente no intervalo de 10 a 100 anos^{-1} . Para valores de semi-eixo $a_1 < 0.12AU$, podemos observar o efeito de *alias* das frequências superiores à frequência crítica, e para $a_1 > 0.12AU$, podemos observar que os valores da frequência Kepleriana e das combinações lineares do tipo $if_P + jf_E$, $i, j \in \mathbb{Z}$ decaem conforme dado pela terceira lei de Kepler ($f_P \propto a_1^{-3/2}$).

A Figura 6.2 ainda mostra que, para $a_1 > 0.15AU$, existem regiões com um grande espalhamento vertical de pontos, correspondendo a um número maior de picos significativos no espectro de Fourier da órbita integrada numericamente. Órbitas caracterizadas por um número elevado de picos significativos no espectro de Fourier podem ser interpretadas como altamente não-harmônicas. As causas desse movimento não-harmônico podem ser possivelmente associadas à presença de ressonâncias de movimentos médios na região. Apresentamos na Figura 6.3 o espectro dinâmico, da Figura 6.2 em detalhe, no intervalo $0.15AU < a_1 < 0.2AU$, assim como as posições nominais de algumas das principais ressonâncias de movimentos médios presentes nesse intervalo, representadas pelas linhas tracejadas em azul.

A partir da Figura 6.3, podemos perceber que, realmente, o espalhamento vertical dos pontos no espectro dinâmico pode ser associado com a presença de algumas das ressonâncias de movimentos médios, nesse caso em particular, com as ressonâncias de menor ordem 8:1, 9:1 e 10:1. É importante enfatizar que, sendo um problema complexo, cada ressonância deve ser estudada individualmente para uma compreensão da dinâmica nessa região do espaço de parâmetros. No entanto, a partir dos valores de a_1 os quais começamos a observar o espalhamento vertical no espectro dinâmico, podemos assumir que a dinâmica secular já não é mais predominante, e portanto está fora do escopo de nosso trabalho.

Definindo g_s como a frequência de maior amplitude, podemos isolar a banda secular do espectro dinâmico, que é apresentada na Figura 6.4.

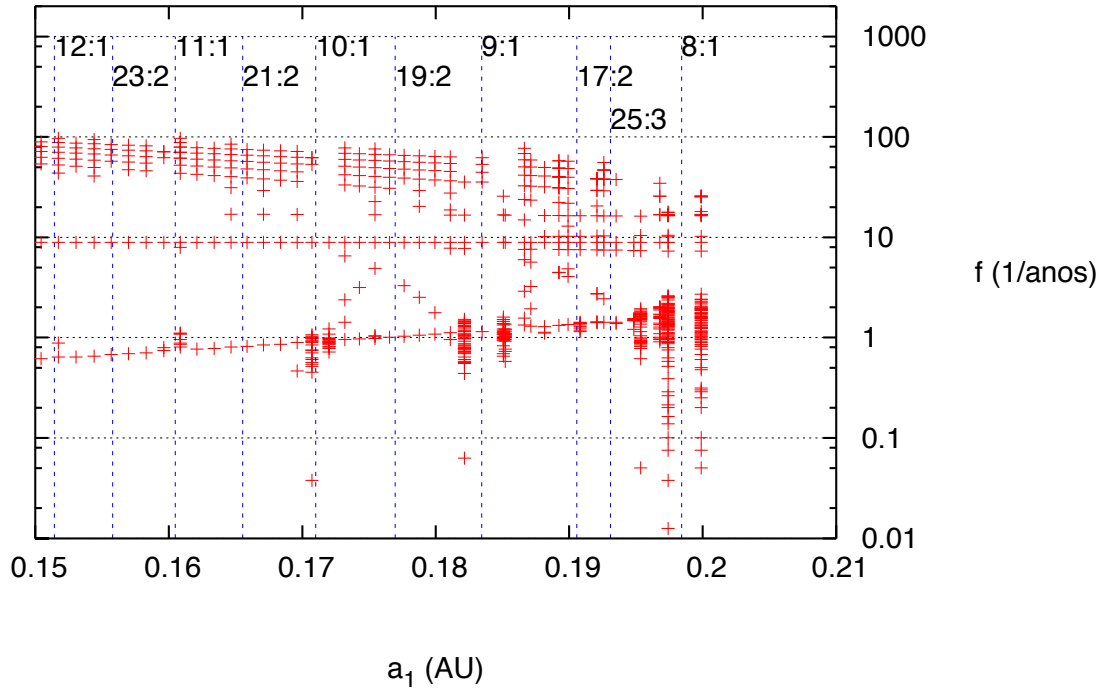


Figura 6.3: Detalhes do espectro dinâmico apresentado na Figura 6.2 na região $0.15AU < a_1 < 0.21AU$. As linhas tracejadas em azul representam as posições de ressonâncias de movimentos médios presentes no intervalo.

6.3 Determinação Numérica do Modo Forçado

Supondo uma órbita integrada a partir de um conjunto de condições iniciais próximo à solução estacionária do Modo I, com $\Delta\varpi_{\text{inicial}} = 0$, a excentricidade forçada secular pode ser estimada como a amplitude do termo de frequência nula no espectro de Fourier calculado para a excentricidade do planeta (Giuppone et al., 2011). Esse termo pode ser calculado diretamente como a média algébrica da série temporal dessa excentricidade, na forma

$$e_{1F} = \langle e_1(t) \rangle_T = \frac{\sum_{i=1}^N e_1(t_i) \Delta}{T}, \quad (6.2)$$

onde o número de pontos da integração N e o intervalo de tempo entre os pontos Δ são tais que o tempo total de integração $T = N\Delta$ seja longo o suficiente para englobar ao menos um período secular do sistema.

Esse método pode ser utilizado para a construção da família de soluções estacionárias em função de um parâmetro, como por exemplo a razão de semi-eixos a_1/a_2 , e mantendo

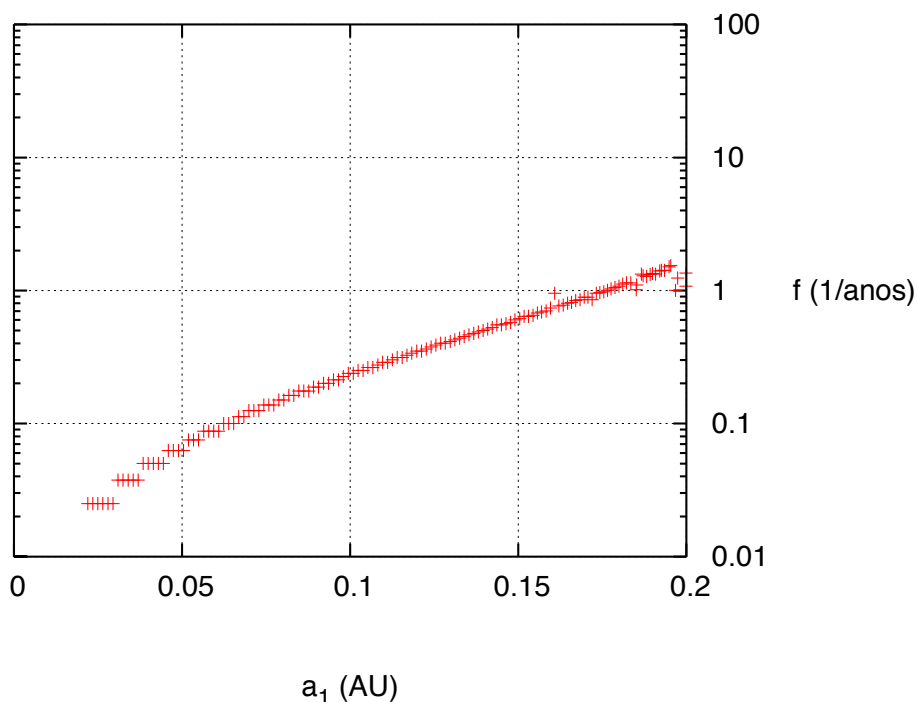


Figura 6.4: Exemplo do resultado do isolamento da banda secular do espectro de potência dinâmico apresentado na Figura 6.2.

todos os outros parâmetros constantes. Para a construção dessa família, partimos de um valor inicial de a_1/a_2 suficientemente pequeno e tomamos a excentricidade inicial $e_1 = 0$. Com esses parâmetros, calculamos o valor da excentricidade forçada e_{1F} a partir da Equação 6.2.

Para o ponto seguinte da curva, aumentamos o valor de a_1/a_2 em um intervalo δ_a , mantendo os outros parâmetros ainda constantes, e utilizando o valor inicial da excentricidade e'_1 como o valor da mesma obtido para o ponto anterior e_{1F} . Com esse novo conjunto de parâmetros, calculamos o valor da excentricidade forçada e'_{1F} para a razão de semi-eixos $(a_1/a_2)' = a_1/a_2 + \delta_a$ utilizando a Equação 6.2.

Assumindo que o intervalo δ_a seja suficientemente pequeno, os valores das excentricidades forçadas e_{1F} e e'_{1F} serão próximos, satisfazendo, assim, a condição de que a órbita integrada seja próxima à solução estacionária. Finalmente, podemos repetir esse procedimento ao longo de um intervalo de a_1/a_2 , e assim, determinar numericamente a família de soluções estacionárias para um dado conjunto de parâmetros.

Esse procedimento, no entanto, deixa de ser válido quando consideramos as órbitas nas

regiões mais perturbadas do espaço de parâmetros, com valores mais elevados de a_1/a_2 , e_2 ou m_2 . Nessas regiões as oscilações de curto período e_1 possuem amplitudes elevadas, comparáveis aos valores das excentricidades seculares forçadas. Tais oscilações de curto período acabam sendo contabilizadas no cálculo da média na Equação (6.2), e o valor de e_{1F} obtido dessa maneira não corresponderá apenas à excentricidade secular forçada.

Uma modificação possível no procedimento para se tentar isolar a excentricidade secular forçada dos termos oscilatórios de curto período e ressonantes é re-definir a Equação (6.2) para a forma

$$e_{1F} = \langle e_1(t) \cos[\Delta\varpi(t)] \rangle_T = \frac{\sum_{i=1}^N e_1(t_i) \cos[\Delta\varpi(t_i)] \Delta}{T}. \quad (6.3)$$

Para os casos em que os termos seculares são dominantes sobre os termos de curto período (i.e., a amplitude das oscilações de curto período menor que e_F), o ângulo $\Delta\varpi$ oscilará em torno de 0 com uma amplitude baixa, o que fará com que o resultado obtido por ambas as equações (6.2) e (6.3) coincidam. Já nos casos em que as oscilações de curto período sejam dominantes sobre os termos seculares (i.e., a amplitude das oscilações de curto período da ordem ou maior que e_F), o ângulo secular possuirá amplitudes maiores, podendo até circular, o que fará com que os resultados entre ambas as equações (6.2) e (6.3) sejam diferentes.

Para exemplificar a diferença entre os métodos dados pelas Equações (6.2) e (6.3), integramos as equações exatas obtidas para conjuntos de condições iniciais, com parâmetros físicos $m_0 = m_2 = 1M_\odot$, $m_1 = 10^{-4}M_\odot$ e parâmetros orbitais $a_2 = 1AU$, $e_2 = 0.3$, $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$, mas com $a_1 = 0.1$ e $e_1 = 0.04$ para o primeiro conjunto e $a_1 = 0.16$ e $e_1 = 0.07$ para o segundo conjunto de parâmetros iniciais. Ambas as órbitas integradas se localizam próximas ao Modo I, com a primeira em uma região menos perturbada do espaço de parâmetros que a segunda. Na Figura 6.5 podemos ver a evolução temporal de e_1 e de $\Delta\varpi$ para os dois conjuntos de condições iniciais ao longo de aproximadamente um período secular.

A partir da Figura 6.5 podemos notar dois comportamentos bem distintos causados pelos diferentes níveis de perturbações para diferentes valores de semi-eixo maior do planeta. Para $a_1 = 0.1AU$, nos planos superiores, o ângulo $\Delta\varpi$ segue oscilando em torno de 0 com uma amplitude menor que 0.5 rad, e a excentricidade e_1 possui oscilações de curto período

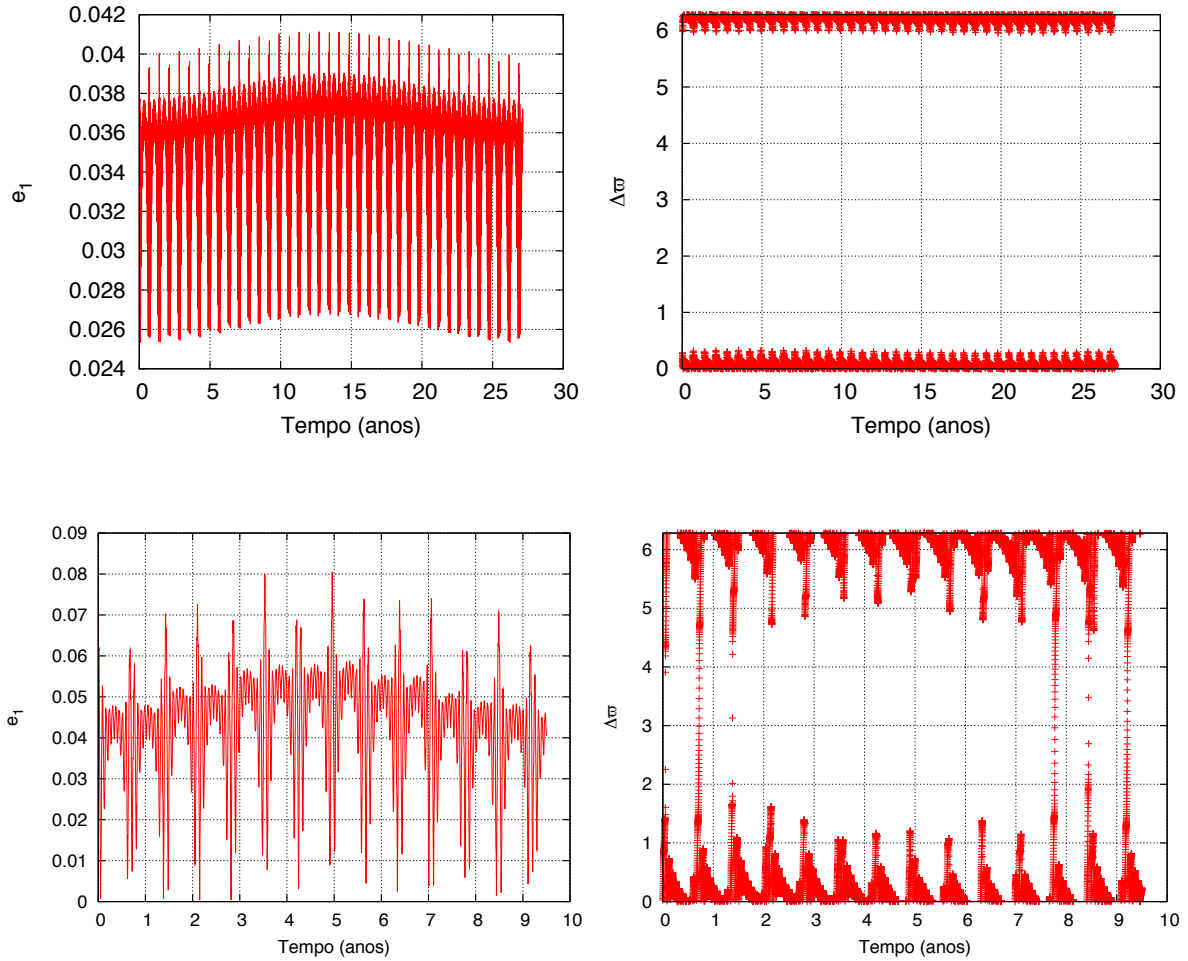


Figura 6.5: Evolução temporal da excentricidade e_1 (esquerda) e do ângulo secular $\Delta\pi$ (direita) obtidas através integração das equações exatas de Newton (vermelho) para o primeiro conjunto de condições iniciais (topo) e o segundo conjunto de condições iniciais (abaixo).

com amplitudes menores que 0.015. Já para $a_1 = 0.16AU$, nos planos inferiores, podemos notar que em muitos instantes o ângulo $\Delta\pi$ passa por uma fase circulatoria, ainda que seu comportamento seja predominantemente oscilatório em torno de 0. Além disso, podemos notar que a excentricidade e_1 possui oscilações de curto período da ordem de ~ 0.05 .

As mesmas órbitas são representadas também no plano $e_1 \cos(\Delta\pi) \times e_1 \sin(\Delta\pi)$, na Figura 6.6. Na mesma figura, são apresentados os resultados obtidos dos dois procedimentos de obtenção da solução estacionária secular, definidos pelas equações (6.2) e (6.3).

Podemos notar a partir da Figura 6.6 que, para o caso em que $a_1 = 0.1AU$ (plano superior), a órbita é confinada ao planisfério $e_1 \cos(\Delta\pi) > 0$ e possui uma forma confinada em uma circunferência aproximada de 0.015 de diâmetro, causada principalmente pela evolução de curto período. Além disso, podemos perceber que ambos os valores das excentricidades forçadas para essa órbita calculada por ambos os procedimentos de média

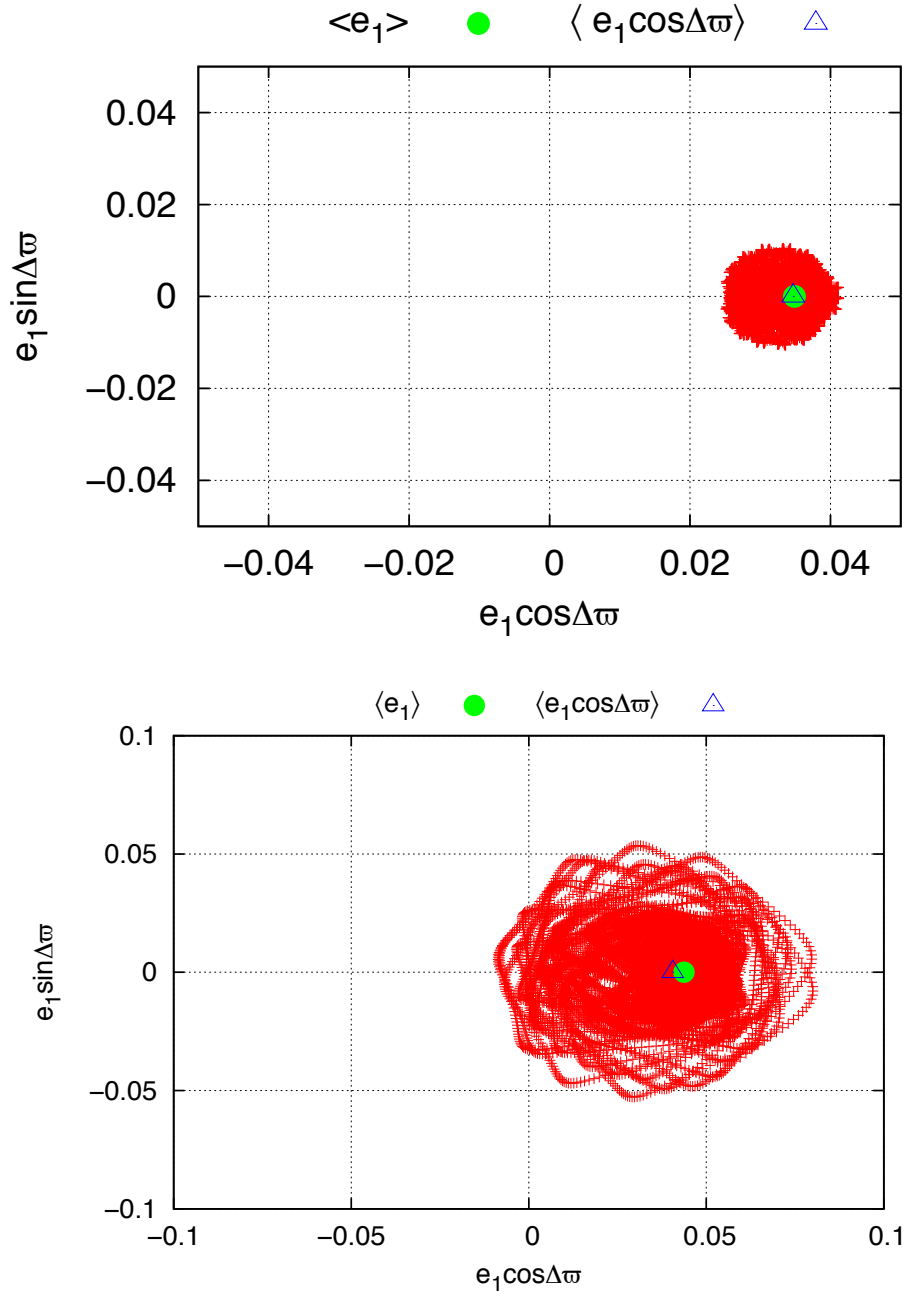


Figura 6.6: Evolução das órbitas nos planos $e_1 \cos(\Delta \varpi) \times e_1 \sin(\Delta \varpi)$ para o primeiro conjunto (plano superior) e para o segundo conjunto (plano inferior) de condições iniciais. Os círculos em verde representam os valores obtidos através da média definida pela Equação (6.2), enquanto que os triângulos em azul representam os valores obtidos pela Equação (6.3).

foi de $e_{1F} \approx 0.035$, como já era esperado.

Já para o caso em que $a_1 = 0.16AU$ (plano inferior), podemos notar que a órbita ocupa uma região muito maior no espaço de fase, em muitos momentos cruzando o eixo $e_1 \cos(\Delta \varpi) = 0$. Isso faz com que os valores obtidos por cada procedimento de obtenção da solução estacionária sejam bastante diferentes: para o método definido pela Equação

(6.2) chegamos em $e_{1F} \approx 0.044$ (círculo em verde), enquanto que para o método definido pela Equação (6.3) chegamos em $e_{1F} \approx 0.040$ (triângulo em azul). Notamos também que a amplitude dos termos de curto período, de ~ 0.05 , é maior que a excentricidade forçada secular obtida por qualquer um dos métodos e é a responsável pelos episódios de circulação do ângulo $\Delta\varpi$ que observamos na Figura 6.5.

É necessário enfatizar que oscilações de curto período estão presentes nas integrações e introduzem incertezas na estimativa do valor da excentricidade forçada. Podemos utilizar as amplitudes das oscilações de curto período para estimar os intervalos de confiança na determinação numérica da solução estacionária secular. Essa estimativa é feita calculando os valores máximo e mínimo da excentricidade osculadora do planeta durante um período Kepleriano da estrela perturbadora. Se a amplitude das oscilações de curto período for maior que o valor da própria excentricidade forçada secular significa que o valor obtido pelo método não será completamente confiável.

Para exemplificar o cálculo de uma família de soluções estacionárias seculares, aplicamos o método em função do semi-eixo do planeta a_1 , para um sistema com massas $m_0 = m_2 = M_\odot$, $m_1 = 1 \times 10^{-4} M_\odot$ e mantendo fixos os parâmetros orbitais $a_2 = 1AU$, $e_2 = 0.3$ e as variáveis angulares iniciais $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$. O resultado é apresentado pela curva em vermelho na Figura 6.7, que representa a família de soluções estacionárias em função do valor do semi-eixo a_1 equivalente ao valor próprio. Na mesma figura também são representadas as amplitudes de oscilação de curto período de e_1 por meio das barras tracejadas em preto: o limite superior representa o valor máximo atingido por e_1 durante um período Kepleriano da estrela perturbadora, e o limite inferior representa o valor mínimo de e_1 no mesmo período.

A Figura 6.7 mostra que para pequenos valores de a_1 as amplitudes dos termos de curto período são menores, como já era esperado. Para $a_1 < 0.14AU$ podemos notar também que a barra correspondente ao valor máximo das oscilações de curto período se sobrepõe com a curva das soluções estacionárias seculares. Isso se deve ao fato de que a fase inicial dos ângulos rápidos terem sido escolhidas como $M_1 = M_2 = 0$. Caso sejam considerados outros valores iniciais para M_1 e M_2 veremos um deslocamento das barras apresentadas na Figura 6.7, mas com a curva em vermelho localizada na mesma posição no plano.

A partir de $a_1 \approx 0.13AU$, a barra correspondente ao valor mínimo das oscilações de curto período, atinge o valor $e_1 \approx 0$, o que significa que a amplitude das oscilações de curto

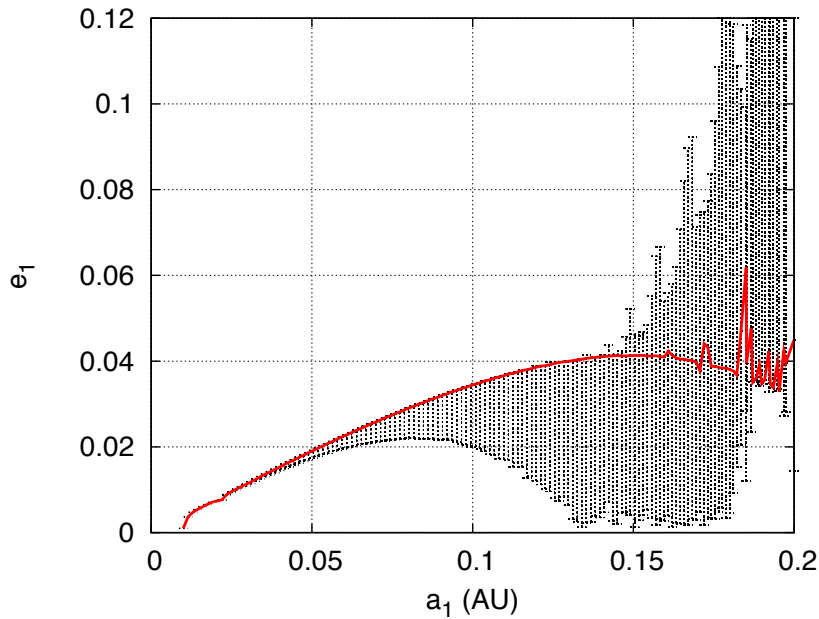


Figura 6.7: Exemplo de resultado obtido para a família de soluções estacionárias do Modo I a partir de integrações das equações exatas de movimento em função do semi-eixo próprio a_1 em vermelho, com as amplitudes das oscilações de curto período representadas pelas barras tracejadas em preto.

período possui um valor próximo ao valor da excentricidade forçada. Esse, portanto, é um indicativo de que a partir desse valor de semi-eixo as oscilações de curto período podem influenciar no valor determinado da solução estacionária secular.

Para $a_1 > 0.15AU$ percebemos que a curva da solução estacionária passa a apresentar variações abruptas no valor da excentricidade forçada. Além disso, para o mesmo intervalo percebemos que a barra correspondente ao valor máximo das oscilações de curto período passa a atingir valores maiores que a excentricidade forçada. Essa mudança no comportamento em apenas um período Kepleriano sugere a presença de um novo efeito dinâmico. Na Figura 6.8 apresentamos a curva do Modo I em detalhes na região $0.15AU < a_1 < 0.21AU$, assim como as posições nominais de algumas das principais ressonâncias de movimentos médios presentes nesse intervalo, representadas pelas linhas verticais tracejadas em azul.

A Figura 6.8 mostra que as regiões de variação abrupta da curva das soluções estacionárias se localizam próximas às posições nominais das ressonâncias de movimentos médios de menor ordem 10:1 e 9:1, além das variações abruptas cobrirem o intervalo entre as ressonâncias 9:1 e 8:1. Essas são as mesmas ressonâncias de movimentos médios que foram identificadas no espectro dinâmico, na Figura 6.3, o que é um indício que as va-

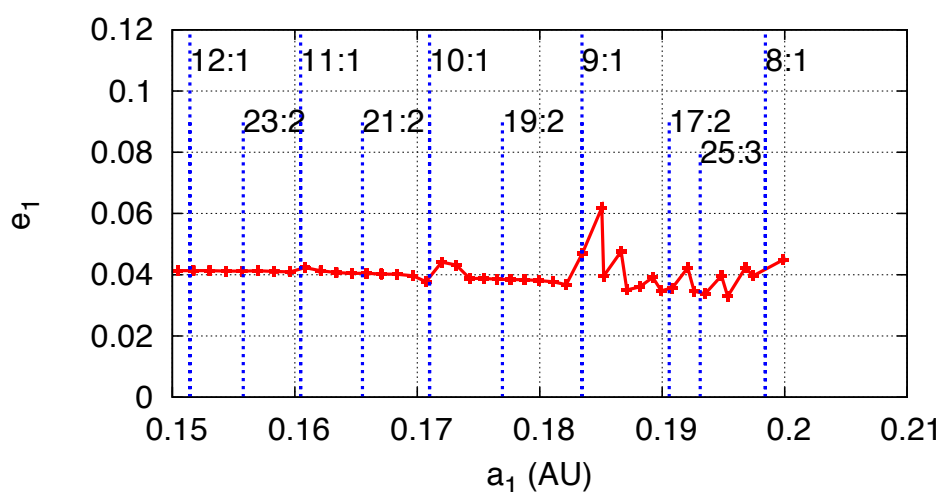


Figura 6.8: Detalhes da curva das excentricidades forçadas do Modo I apresentado na Figura 6.7 na região $0.15AU < a_1 < 0.21AU$. As linhas tracejadas em azul representam as posições de ressonâncias de movimentos médios presentes no intervalo.

riações observada da curva das soluções estacionárias pode estar associada à presença de ressonâncias de movimentos médios na região. Podemos concluir então que as variações abruptas na curva das soluções estacionárias caracterizam uma região do espaço de fase na qual o regime de movimento não é regido pela dinâmica secular e, portanto, é uma região fora do interesse do estudo desse trabalho.

6.4 Mapa Dinâmico - Número Espectral

A análise do espectro de Fourier das séries temporais obtidas a partir das integrações das equações exatas de movimento nos permite uma outra maneira de se fazer a caracterização do movimento, com a determinação do *Número Espectral* (Michtchenko et al., 2002; Ferraz-Mello et al., 2005). O número espectral de uma órbita é definido como sendo o número de picos significativos de um espectro de Fourier da excentricidade do planeta obtido através de integrações numéricas das equações exatas de movimento. Do mesmo modo que foi feito na Seção 6.2, definimos os picos significativos como aqueles os quais possuem uma amplitude de ao menos 5% do valor da maior amplitude do espectro.

Para o caso de uma órbita regular, as frequências fundamentais do movimento são constantes ao longo do tempo. Portanto, no espectro de Fourier do sinal temporal obtido a partir da integração das equações exatas de movimento, as linhas do espectro são bem

definidas e o espectro possui um número pequeno de picos. Já para o caso de uma órbita não-harmônica, as frequências fundamentais variam no tempo, o que faz com que os picos no espectro não sejam bem definidos e, portanto, o espectro de Fourier apresenta número espectral grande.

Além da determinação da estabilidade de uma órbita pelo do método do número espectral, podemos identificar diferentes movimentos de órbitas regulares. Um desses movimentos consiste em pequenas oscilações em torno das soluções estacionárias seculares. Por ser um movimento quase-harmônico, é caracterizado por um número espectral pequeno quando comparado com o número espectral obtido para órbitas afastadas das soluções estacionárias.

Como a aplicação do método do número espectral se faz órbita a órbita, a melhor maneira de visualizar o resultado é por meio da construção de um *mapa dinâmico*. Nesse mapa uma grade bidimensional de condições iniciais é coberta, mantendo os outros parâmetros orbitais iniciais constantes. Para cada condição inicial dessa grade é feita a integração das equações exatas de movimento, e para cada série temporal da excentricidade do planeta e_1 resultante é calculado o espectro de Fourier, por meio do algoritmo da FFT (Press, 2002). Finalmente, para cada espectro de Fourier é calculado o número espectral adotando uma amplitude mínima para os picos significativos de 5% sobre a amplitude máxima do espectro.

Para exemplificar a construção de um mapa dinâmico, exploramos o plano de condições iniciais de elementos orbitais $e_1 \times a_1$ de um planeta hipotético em torno da estrela A do sistema binário α Centauri AB. Cada uma das integrações foi feita assumindo o caso coplanar e com os parâmetros físicos $m_0 = 1.1M_\odot$, $m_1 = 10^{-4}M_\odot$ e $m_2 = 0.934M_\odot$, e parâmetros orbitais $a_2 = 23.4AU$, $e_2 = 0.518$ e $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$. Cada uma das órbitas foi integrada por $T = 10^4$ anos, que equivale aproximadamente a 125 períodos orbitais da estrela perturbadora.

Para cada espectro, foi adotado um número espectral máximo de 800 picos, de modo que caso um espectro de uma órbita possua mais que 800 picos significativos, a essa órbita é atribuído o número espectral de 800 e assumido que essa órbita é caótica. Da mesma maneira, caso a integração de uma órbita seja interrompida devido a uma colisão ou à ejeção do planeta do sistema, não é possível a aplicação da FFT, e a essa órbita também é atribuído o número espectral 800. O mapa dinâmico resultante é apresentado na Figura

6.9, com o logaritmo do número espectral apresentado na escala de cores.

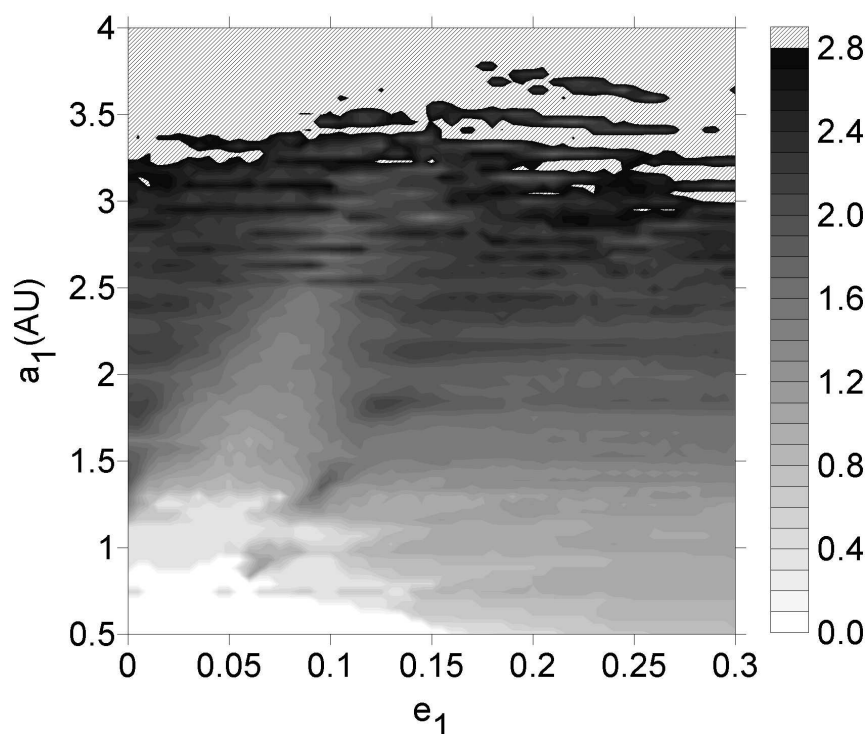


Figura 6.9: Mapa dinâmico para um planeta orbitando α Centauri A para o caso planar construído em função dos elementos orbitais iniciais. A escala de cores representa o logaritmo do número espectral, onde os tons mais claros representam órbitas regulares e os tons mais escuros representam órbitas mais instáveis. A textura em listras na diagonal na parte superior do mapa corresponde a órbitas que não sobreviveram ao tempo total de integração.

A Figura 6.9 mostra que, para valores de semi-eixo até $a_1 \sim 2.5AU$, todas as órbitas apresentam um comportamento regular, independente da excentricidade. A partir de $a_1 \sim 2.5AU$, aparecem faixas horizontais de tons mais escuros de cinza, até finalmente atingirmos os limites de estabilidade do movimento, em $a_1 \sim 3.2AU$. Essas faixas que também aumentam de densidade conforme aumentamos o semi-eixo a_1 , estão associadas a ressonâncias de movimentos médios de alta ordem, discutidas nas Figuras 6.3 e 6.8.

Embora frequentemente associadas a regiões de caos e instabilidades, podemos perceber que para valores iniciais de excentricidade entre $e_1 \sim 0.05$ e $e_1 \sim 0.25$ as ressonâncias de movimentos médios criam pequenas ilhas de estabilidade no plano paramétrico, protegendo as órbitas em regiões em que o movimento é predominantemente instável. Entretanto, é importante ressaltar que o comportamento dinâmico em cada ressonância possui suas particularidades e, para um estudo aprofundado dessa região do espaço de parâmetros, cada ressonância precisa ser estudada individualmente.

Notamos uma região em branco no canto inferior esquerdo do mapa, correspondendo aos parâmetros iniciais $a_1 < 1AU$ e $e_1 < 0.1$. Essa é a região que contém sistemas hierárquicos com fracas perturbações mútuas, o que resulta em no aumento dos períodos seculares. Assim, as órbitas dessa região possuem períodos seculares maiores que o de integração adotado, de 10^4 anos, e portanto impossíveis de serem resolvidos no espectro de Fourier.

É possível notar também do mapa dinâmico que existe uma região delimitada aproximadamente em $0.5AU < a_1 < 2.5AU$ e $0 < e_1 < 0.1$ que possui uma tonalidade mais clara. Conforme discutido anteriormente, essa região corresponde a movimentos harmônicos próximos à família de soluções estacionárias do Modo I, resultando em espectros de Fourier com um número espectral menor.

Para realizar a comparação da curva das soluções estacionárias obtida pelo mapa dinâmico com as soluções obtidas pelo método apresentado na Seção 6.3 é necessária a transformação das coordenadas do mapa dinâmico, de osculadoras iniciais para equivalentes a variáveis próprias. O procedimento para essa transformação é o mesmo utilizado para a determinação dos valores iniciais das integrações dos modelos ao longo dos Capítulos 3 e 4: durante um período Kepleriano da estrela perturbadora, se toma a média da excentricidade e_1 e do semi-eixo a_1 . Para ilustrar a importância dessa transformação, apresentamos na Figura 6.10 um mapa construído, numa grade de elementos iniciais $e_1 \times a_1$ que apresenta na escala de cores o valor médio de e_1 após 1 período Kepleriano da estrela perturbadora.

A Figura 6.10 mostra que, para $a_1 < 1.5AU$, praticamente não há diferença entre os valores iniciais e os valores médios da excentricidade e_1 . Já para valores de semi-eixo maiores que $1.5AU$ podemos notar uma diferença crescente com a_1 entre os valores iniciais e os análogos aos próprios das excentricidade. Por exemplo, para $a_1 = 3AU$, uma órbita inicialmente circular tem o valor análogo ao próprio de $e_1 \approx 0.075$, e para o mesmo valor de semi-eixo, uma órbita com uma excentricidade inicial de $e_1 = 0.15$ tem o valor análogo ao próprio $e_1 \approx 0.1$.

Outra conclusão que pode ser tirada da Figura 6.10 é que, ao construirmos uma grade homogênea em elementos iniciais, teremos uma grade não-homogênea em elementos próprios. Portanto, quando os resultados do mapa dinâmico são apresentados em elementos próprios, uma região do mapa não possuirá equivalência em relação aos elementos iniciais e portanto não apresentará informações a respeito da dinâmica.

Finalmente, a Figura 6.11 mostra o mapa dinâmico para o mesmo conjunto de inte-

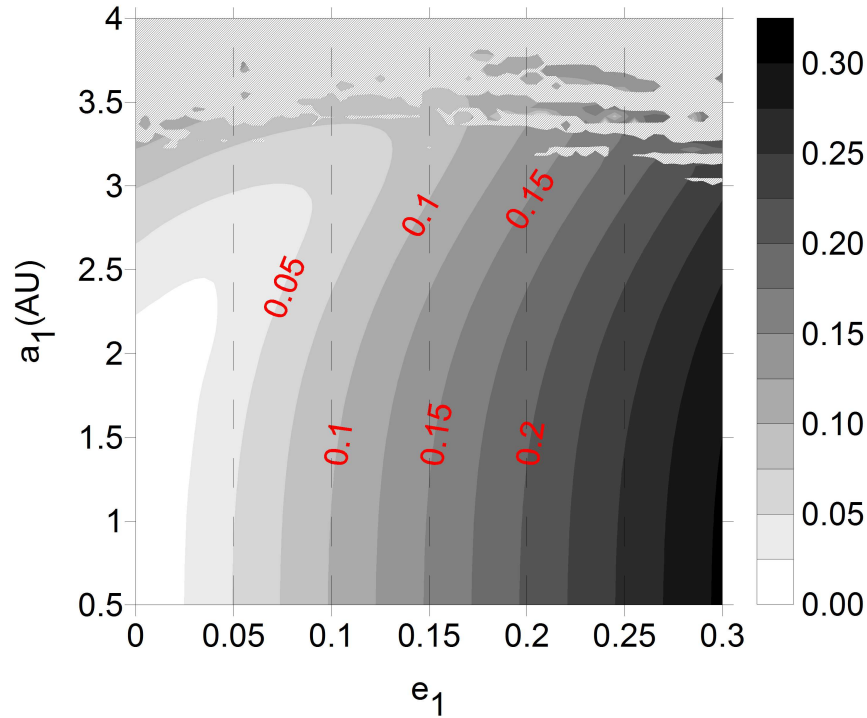


Figura 6.10: Mapa ilustrando a diferença entre os valores iniciais osciladores das excentricidades e_1 , no eixo x , e os valores médios das excentricidades e_1 após 1 período Kepleriano da estrela perturbadora na escala de cores. A textura em listras na diagonal na parte superior do mapa corresponde a órbitas que não sobreviveram ao tempo total de integração.

grações, mas apresentado no plano dos elementos equivalentes aos próprios $e_1 \times a_1$. No mesmo mapa, também apresentamos a curva da solução estacionária secular obtida através do método apresentado na Seção 6.3.

A Figura 6.11 mostra que a região preenchida pela textura quadriculada em cinza-escuro, na região superior esquerda do mapa, não possui informação, conforme já era esperado. Órbitas com baixas excentricidades têm as mesmas rapidamente excitadas a um valor maior devido às interações de curto período provocadas pela estrela perturbadora, um comportamento que também pode ser observado na Figura 6.7. Essa é uma deficiência técnica do método, que não consegue preencher todo o espaço de parâmetros devido à presença dos termos ressonantes e de curto período.

Também podemos notar da Figura 6.11 que existe uma boa concordância entre a curva em vermelho das soluções estacionárias seculares com a região do mapa dinâmico correspondente à mesma solução. Notamos ainda que a curva em vermelho começa a apresentar uma dispersão aleatória de seus pontos em aproximadamente $a_1 \approx 2.5AU$, que é a mesma região que podemos identificar no mapa dinâmico como o início da presença das

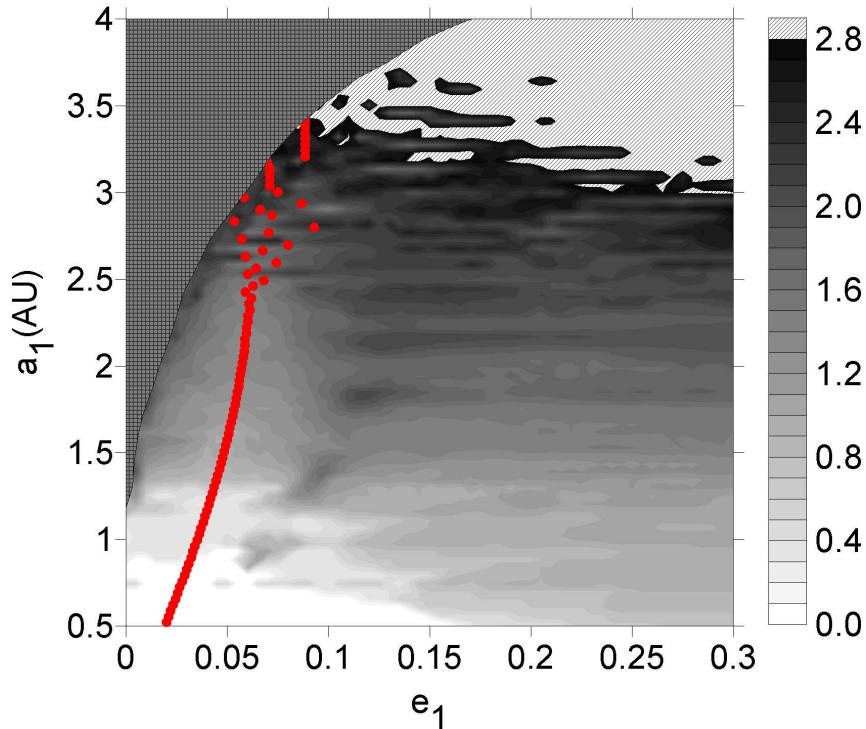


Figura 6.11: Mapa dinâmico para um planeta orbitando α Centauri A para o caso planar, construído em função dos elementos equivalentes aos próprios e_1 e a_1 . A escala de cores representa o logaritmo do número espectral, onde os tons mais claros representam órbitas regulares e os tons mais escuros representam órbitas mais instáveis. Os pontos em vermelho representam a curva das soluções estacionárias obtida através do método apresentado na Seção 6.3. A textura em listras na diagonal na parte superior direita do mapa corresponde a órbitas que não sobreviveram ao tempo total de integração, enquanto que a textura quadriculada em cinza-escuro na parte superior esquerda do mapa corresponde à região vazia no espaço de parâmetros.

ressonâncias de movimentos médios. Podemos concluir que, em relação à determinação das soluções estacionárias seculares, ambas as ferramentas produzem resultados equivalentes.

Podemos concluir ainda que, dependendo dos parâmetros de um sistema estudado, a região no espaço de parâmetros vazia devido aos termos de curto período pode se sobrepor à solução estacionária secular. Isso significa que, para esse caso, ambos os métodos numéricos não serão capazes de determinar com precisão a posição da solução estacionária secular no espaço paramétrico. Além disso, devido aos altos valores de amplitude das oscilações de curto período, é possível concluir também que para esses casos o regime de movimento predominante na região não é secular.

Aplicação e Comparação dos Modelos Desenvolvidos na Caracterização da Dinâmica Secular

Os modelos e técnicas desenvolvidos e descritos nos capítulos anteriores podem ser aplicados para o estudo da dinâmica secular de órbitas planetárias tipo S em estrelas binárias. Como foi visto no Capítulo 5, o problema secular coplanar possui apenas 1 grau de liberdade, associado com a evolução temporal da excentricidade planetária e_1 e o ângulo secular $\Delta\varpi$. Vimos que a evolução temporal dessas variáveis se dá em torno das soluções estacionárias do problema secular, definidas pelas excentricidades forçadas e_F e pelo ângulo $\Delta\varpi = 0$. Além disso, uma frequência secular própria g_s descreve a oscilação de e_1 e $\Delta\varpi$ em na vizinhança das soluções seculares. Mostramos que as grandezas e_F e g_s não dependem das condições iniciais, mas apenas dos parâmetros do sistema, tais como as massas m_0 , m_1 e m_2 , a razão de semi-eixos a_1/a_2 e o momento angular total do sistema.

Neste capítulo estudamos aspectos gerais do problema no espaço definido pelos parâmetros do sistema. Esse estudo é realizado com a construção de planos paramétricos, apresentando a dependência de e_F e g_s ao longo dos parâmetros do sistema, utilizando os modelos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4 e também as integrações diretas das equações exatas de movimento. Os resultados dos diferentes modelos serão comparados entre si utilizando as técnicas e ferramentas desenvolvidas nos Capítulos 5 e 6. Além disso, serão investigados os domínios de aplicabilidade de cada modelo desenvolvido.

7.1 Construção dos Planos Paramétricos

Como foi discutido no Capítulo 5, uma solução estacionária secular é determinada pelas grandezas e_F e g_s , que dependem apenas dos valores das massas dos corpos, dos semi-

eixos e do momento angular total AM . Temos, portanto, um espaço paramétrico com três dimensões para serem exploradas. Para a apresentação dos resultados, dividiremos nosso espaço paramétrico em planos, apresentando a dependência de e_F e g_s em função de a_1/a_2 , e cada plano será construído para valores diferentes da razão de massas m_2/m_0 e da excentricidade da estrela perturbadora e_2 .

Na construção dos planos, manteremos constantes as massas da estrela central $m_0 = M_\odot$ e do planeta $m_1 = 10^{-4}M_\odot$, assim como o semi-eixo maior da estrela perturbadora $a_2 = 1AU$. As massas da estrela perturbadora serão tomadas ao longo do intervalo $0.1M_\odot \leq m_2 \leq 10M_\odot$ e a excentricidade da estrela perturbadora no intervalo $0.1 \leq e_2 \leq 0.5$. A razão de semi-eixos a_1/a_2 varia no intervalo desde $a_1/a_2 = 0.01AU$ até o maior valor com uma órbita estável, determinado pelo critério *MAcD* (Andrade-Ines e Michtchenko, 2014).

Em cada plano, serão apresentadas as curvas que representam as excentricidades das soluções estacionárias e as frequências seculares obtidas através dos seis diferentes modelos:

1. O modelo Secular Analítico de Primeira Ordem, desenvolvido na Seção 3.1, com os valores das excentricidades forçadas obtidos pelo uso do método geométrico, apresentado na Seção 5.2 e a frequência secular dada pela Equação (5.11);
2. O modelo Secular de Primeira Ordem de Heppenheimer (1978), apresentado na Seção 3.2, com os valores das excentricidades forçadas e das frequências dados diretamente pelas Equações (3.29) e (3.28), respectivamente;
3. O modelo Secular de Primeira Ordem Semi-Analítico, desenvolvido na Seção 3.3.1, com os valores das excentricidades forçadas obtidos pelo uso do método geométrico, apresentado na Seção 5.2 e a frequência secular dada pela Equação (5.13);
4. O modelo Semi-Secular Semi-Analítico de Primeira Ordem, desenvolvido na Seção 3.3.2, com os valores das excentricidades forçadas e das frequências seculares obtidos a partir da aplicação dos métodos numéricos apresentados nas Seções 6.3 e 6.2, respectivamente, a partir da integração numérica das equações de movimento do modelo.
5. O modelo Secular Analítico de Segunda Ordem, desenvolvido no Capítulo 4, com os valores das excentricidades forçadas obtidos pelo uso do método geométrico apresentado na Seção 5.2 e a frequência secular dada pela Equação (5.12);

6. As equações exatas de movimento de Newton, com os valores das excentricidades forçadas e das frequências seculares obtidos a partir da aplicação dos métodos numéricos apresentados nas Seções 6.3 e 6.2, respectivamente, a partir da integração numérica das equações exatas de movimento.

A Figura 7.1 mostra as famílias de soluções estacionárias e as frequências seculares calculadas com os modelos descritos acima para três casos característicos, avaliando a dependência com as excentricidades, dadas por $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.3$ e $e_2 = 0.5$, e mantendo a massa da estrela perturbadora fixa em $m_2 = 1M_\odot$. Na Figura 7.2 são apresentados os resultados obtidos para outros três casos característicos, mas dessa vez avaliando a dependência em relação às massas, dadas por $m_2 = 0.1M_\odot$, $m_2 = 1M_\odot$ e $m_2 = 10M_\odot$, e mantendo a excentricidade fixa em $e_2 = 0.3$. As famílias de curvas para os sistemas com excentricidade do perturbador dadas por $e_2 = \{0.1, 0.3, 0.5\}$ e as massas do perturbador dadas por $m_2 = \{0.1, 0.5, 1, 2, 10\}M_\odot$ são apresentados em sua forma completa no Apêndice A.

Ambos os modelos Seculares Analítico e Semi-Analítico de Primeira Ordem apresentaram resultados coincidentes para as famílias de soluções estacionárias, assim como foi verificado na Seção 3.3.1, nas Figuras 3.5 e 3.6. Dessa forma, novamente para facilitar a visualização, as curvas de ambos os modelos são representadas apenas pela curva do Modelo Secular Analítico de Primeira ordem.

Ambas as Figuras 7.1 e 7.2 mostram que, para pequenos valores de a_1/a_2 , as famílias obtidas utilizando todos os modelos coincidem, o que já era esperado. A Figura 7.2 ainda mostra que quanto menor a massa do perturbador, maior o intervalo da razão de semi-eixos a_1/a_2 em os resultados para todos os modelos coincidem. Para o caso em que $m_2 = 0.1M_\odot$ (no topo) todas as curvas coincidem para até aproximadamente $a_1/a_2 \approx 0.15$, enquanto que para o caso $m_2 = 2M_\odot$ (abaixo) a coincidência ocorre somente até $a_1/a_2 \approx 0.05$.

A Figura 7.1 mostra que, quanto menor a excentricidade do perturbador e_2 , menores são os valores obtidos para as excentricidades forçadas. Além disso, tomando um valor fixo de a_1/a_2 , podemos perceber que quanto maior a excentricidade e_2 , maiores são os valores das frequências seculares obtidos por cada modelo.

É possível notar que o Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) apresenta os resultados mais próximos da solução obtida numericamente através das equações exatas de movimento (em vermelho). No entanto, é possível perceber que ainda há um

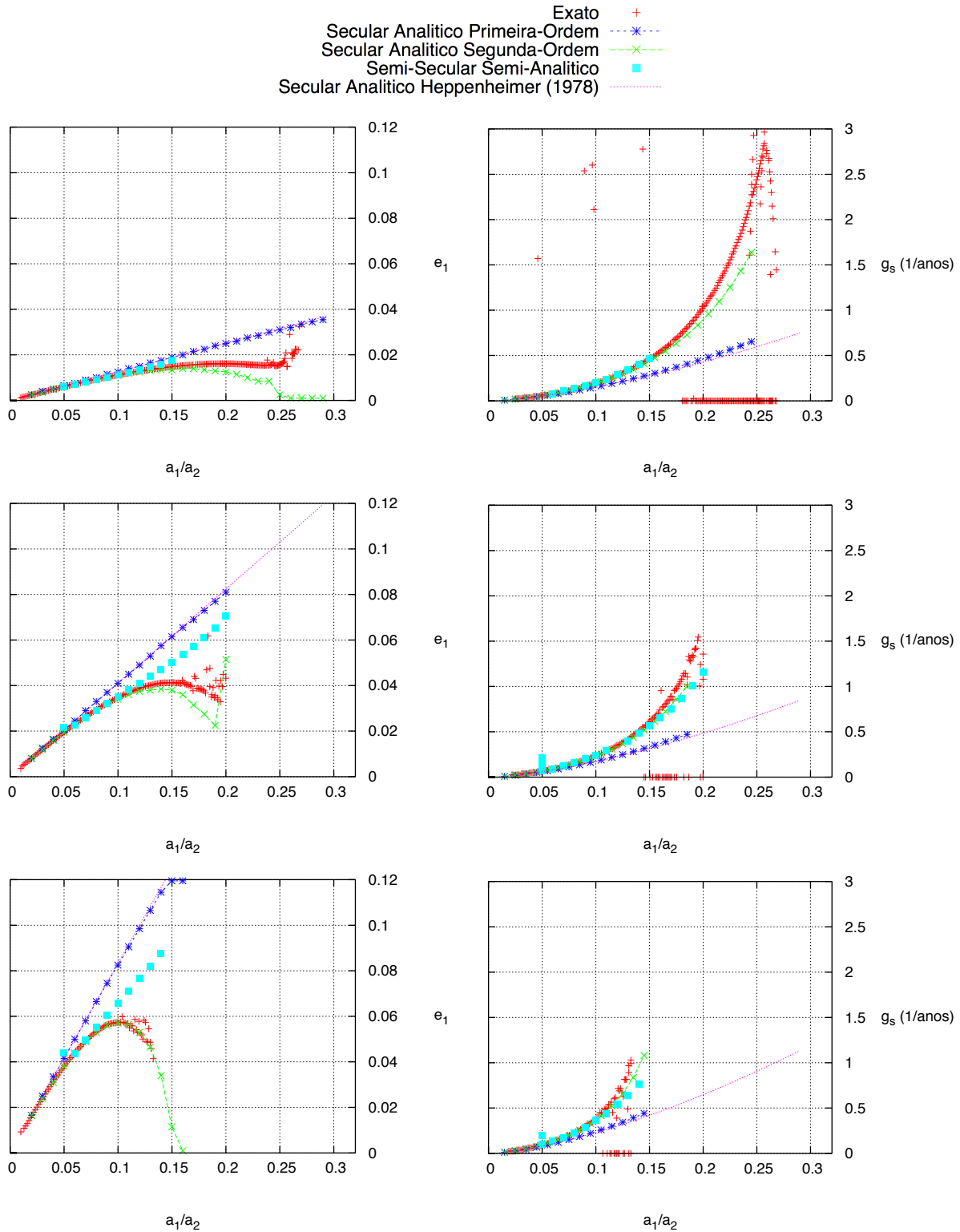


Figura 7.1: Famílias das soluções estacionárias (coluna esquerda) e frequências seculares (coluna direita) calculadas para os diferentes modelos (ver texto) para $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo), com a massa da estrela perturbadora fixa em $m_2 = 1M_\odot$.

desvio entre os resultados de ambos os modelos, como por exemplo nos planos superiores da Figura 7.1, para $a_1/a_2 > 0.2$. Esse desvio será discutido na Seção 7.2, logo adiante.

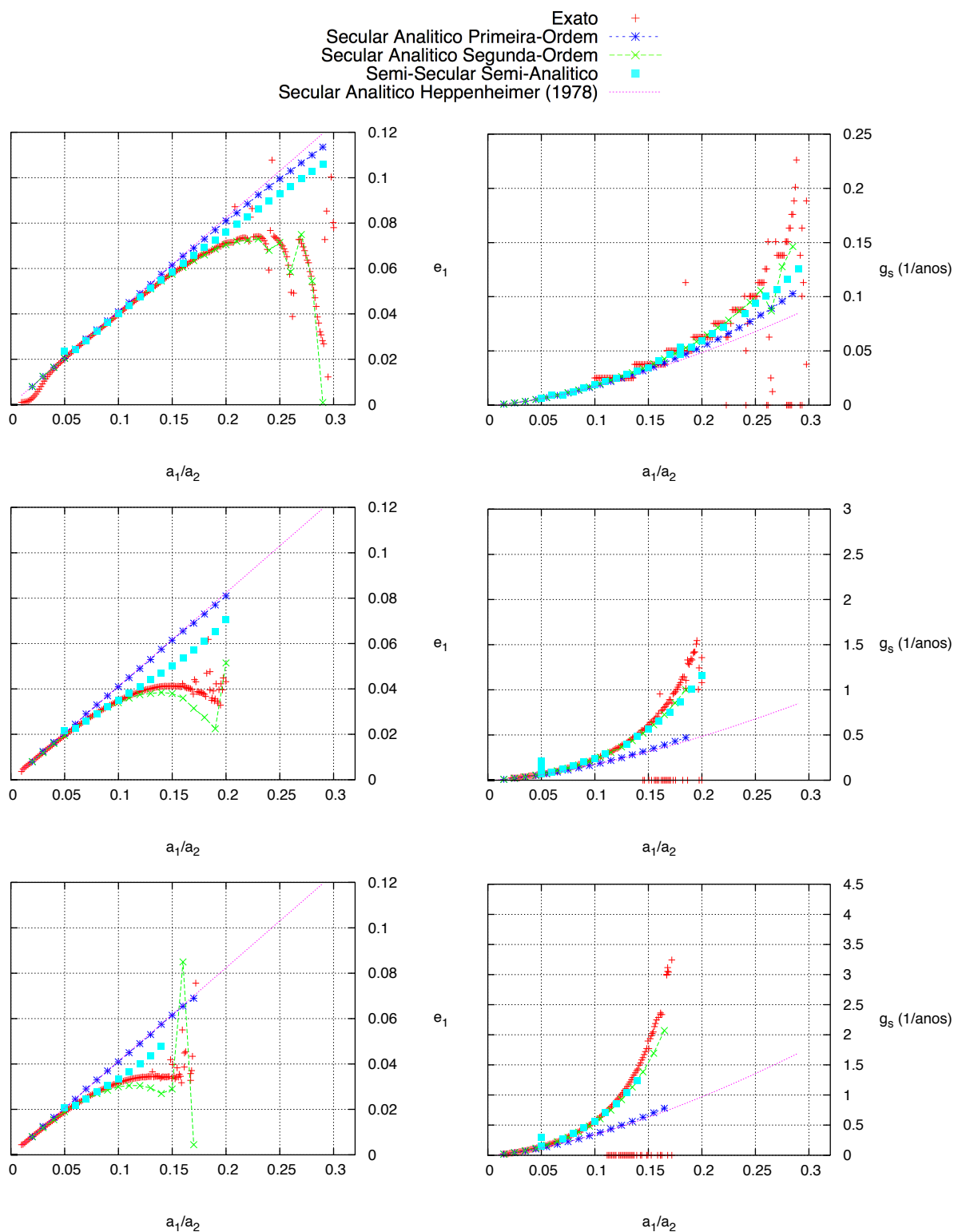


Figura 7.2: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares (coluna direita) calculadas para os diferentes modelos (ver texto) para $m_2 = 0.1M_\odot$ (topo), $m_2 = 1M_\odot$ (meio) e $m_2 = 2M_\odot$ (abaixo), com a excentricidade da estrela perturbadora fixa em $e_2 = 0.3$.

Comparando os resultados dos modelos de primeira ordem, podemos perceber que todos apresentam um comportamento aproximadamente linear para a excentricidade forçada. O

modelo de Heppenheimer (1978) (em magenta) apresenta o maior desvio em relação aos outros modelos, o que já era esperado devido à simplicidade do modelo. O modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul escuro), também apresenta um grande desvio para valores maiores da razão de semi-eixos mesmo para o caso de menor massa do perturbador (planos superiores da Figura 7.2). Como já foi discutido anteriormente, esse desvio já era esperado devido à limitação da teoria da média de primeira ordem. No entanto, ambos os modelos, e também o modelo Secular Semi-Analítico de Primeira Ordem, possuem uma grande vantagem de serem facilmente implementados e de rápido cálculo e podem ser utilizados para estudos de sistemas denominados hierárquicos ($a_1/a_2 \ll 1$).

Já os resultados do modelo Semi-Secular Semi-Analítico (em azul claro) apresenta uma melhora significativa sobre os resultados obtidos pelos outros modelos de primeira ordem, o que pode ser principalmente notado no cálculo das frequências seculares, na coluna direita de ambas as figuras. No entanto, é possível notar ainda um desvio significativo sobre o modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e a curva obtida através das equações exatas de movimento (em vermelho). O modelo Semi-Secular é um modelo complexo de se trabalhar e exige um grande tempo de processamento computacional. Portanto concluímos que o uso do modelo Semi-Secular não se justifica, uma vez que o modelo Secular Analítico de Segunda Ordem possui complexidade de implementação comparável mas com melhores resultados.

Dessa forma, podemos reduzir o número de modelos de nossa análise para apenas três: o Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem, o Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem e a solução numérica obtida através das integrações exatas de movimento.

7.2 *Influência das Oscilações de Curto Período*

Como foi apresentado na Seção 6.3, a determinação numérica das soluções estacionárias é influenciada pelas oscilações de curto período. Portanto, para uma comparação apropriada dos resultados dos diferentes modelos, devemos levar em conta a influência das oscilações de curto período na análise da curva obtida através das equações exatas.

Nesta seção apresentaremos as famílias de soluções estacionárias obtidas pelo modelos Seculares Analíticos de Primeira e de Segunda Ordem e a curva das soluções estacionárias obtidas através das integrações das equações exatas de movimento. Acompanhando a curva

das soluções exatas estão barras tracejadas em preto, que representam os valores máximos (barras superiores) e mínimos (barras inferiores) atingidos pela excentricidade do planeta durante um período Kepleriano da estrela perturbadora, conforme descrito na Seção 6.3.

Na Figura 7.3 apresentamos três planos característicos, onde podemos analisar as famílias de soluções estacionárias como funções de a_1/a_2 . Os valores de excentricidade são fixos em $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.3$ e $e_2 = 0.5$, com a massa do perturbador fixa em $m_2 = 0.1M_\odot$. Já na Figura 7.4 apresentamos os planos com as soluções estacionárias em função das massas $m_2 = 0.1M_\odot$, $m_2 = 1M_\odot$ e $m_2 = 10M_\odot$, mantendo a excentricidade fixa em $e_2 = 0.3$. As famílias obtidas para os sistemas com excentricidade do perturbador dadas por $e_2 = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ e as massas do perturbador dadas por $m_2 = \{0.1, 0.5, 1, 2, 10\}M_\odot$ são apresentados em sua forma completa no Apêndice B.

Ambas as Figuras 7.3 e 7.4 mostram que, a partir de um certo valor de a_1/a_2 , o valor mínimo da excentricidade osculadora (representada pela barra tracejada em preto abaixo da curva em vermelho) chega em $e_1 = 0$. Isso significa que, para essas órbitas, as oscilações de curto período são iguais ou maiores que o valor da excentricidade forçada determinada pelo método numérico (em vermelho), como foi discutido na Seção 6.3. Além disso, podemos notar que para um plano com m_2 e e_2 fixos, quanto maior a razão de semi-eixos a_1/a_2 , maiores as amplitudes das oscilações de curto período, o que é esperado, já que com o aumento de a_1/a_2 a distância mútua entre o planeta e a estrela perturbadora diminui.

Para os casos apresentados nos dois planos superiores da Figura 7.3 (com massa fixa em $m_2 = 1M_\odot$ e excentricidades $e_2 = 0.1$ e $e_2 = 0.3$), podemos notar novamente um desvio entre as curvas obtidas pelo modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e a solução obtida através das equações exatas de movimento (em vermelho). Esse desvio pode estar associado a limitações no desenvolvimento do modelo Secular de Segunda Ordem ou a regimes de movimento não-seculares presentes na solução obtida através das equações exatas de movimento, tais como oscilações de curto período ou ressonâncias de movimentos médios.

No plano superior da Figura 7.3, em particular, podemos notar que o desvio entre as famílias obtidas através do modelo Secular de Segunda Ordem e do método numérico acontece a partir de $a_1/a_2 \approx 0.17$. Para o mesmo caso, percebemos que as variações abruptas na curva em vermelho acontecem a partir de $a_1 \approx 0.23$. Como foi discutido na

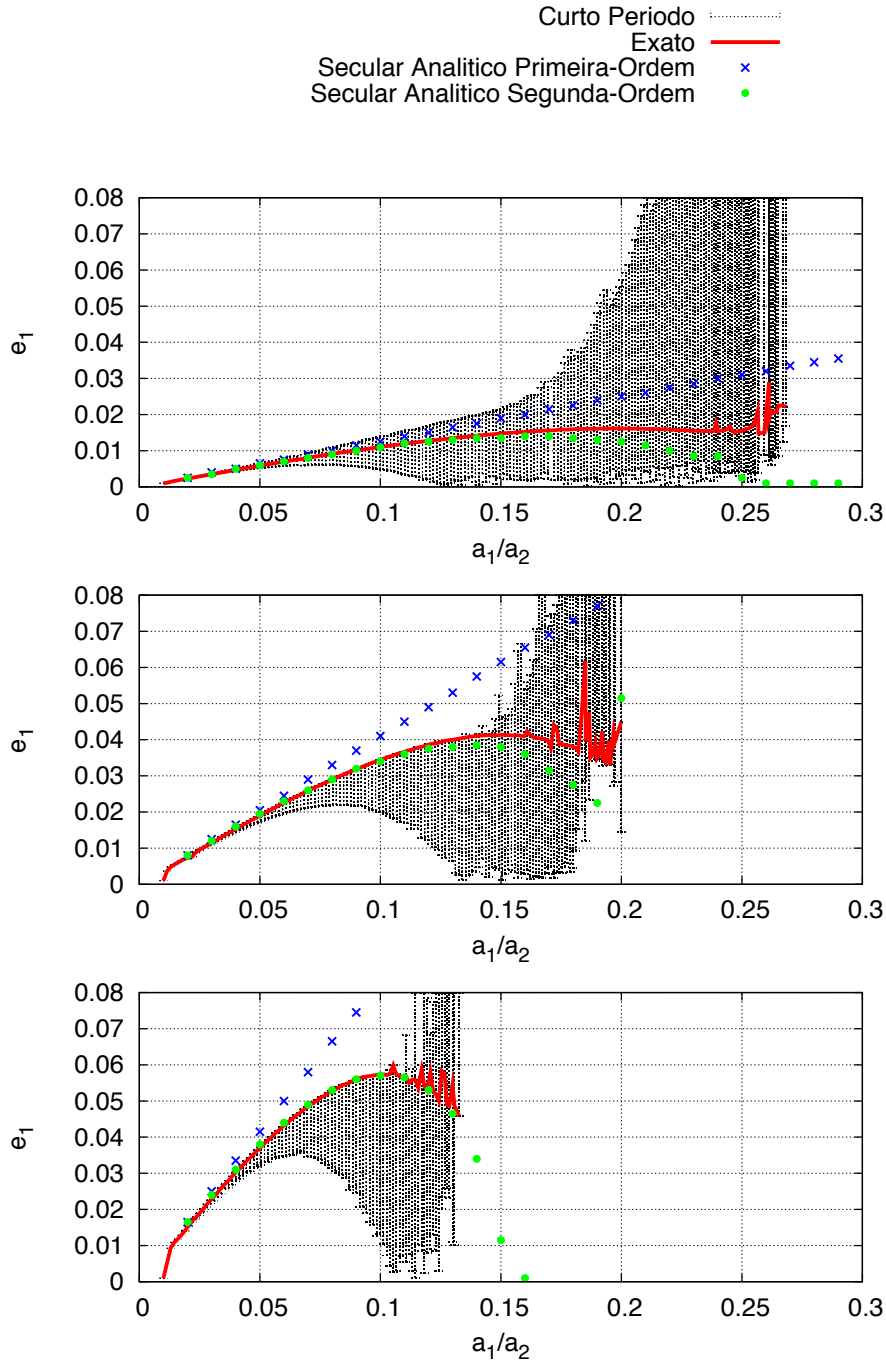


Figura 7.3: Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto para $m_2 = 1M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio), e $e_2 = 0.5$ (abaixo).

Seção 6.3, tais variações estão associadas às interferências de ressonâncias de movimentos médios no procedimento de obtenção da solução estacionária e indicam que o movimento nessa região não é dominado pela dinâmica secular.

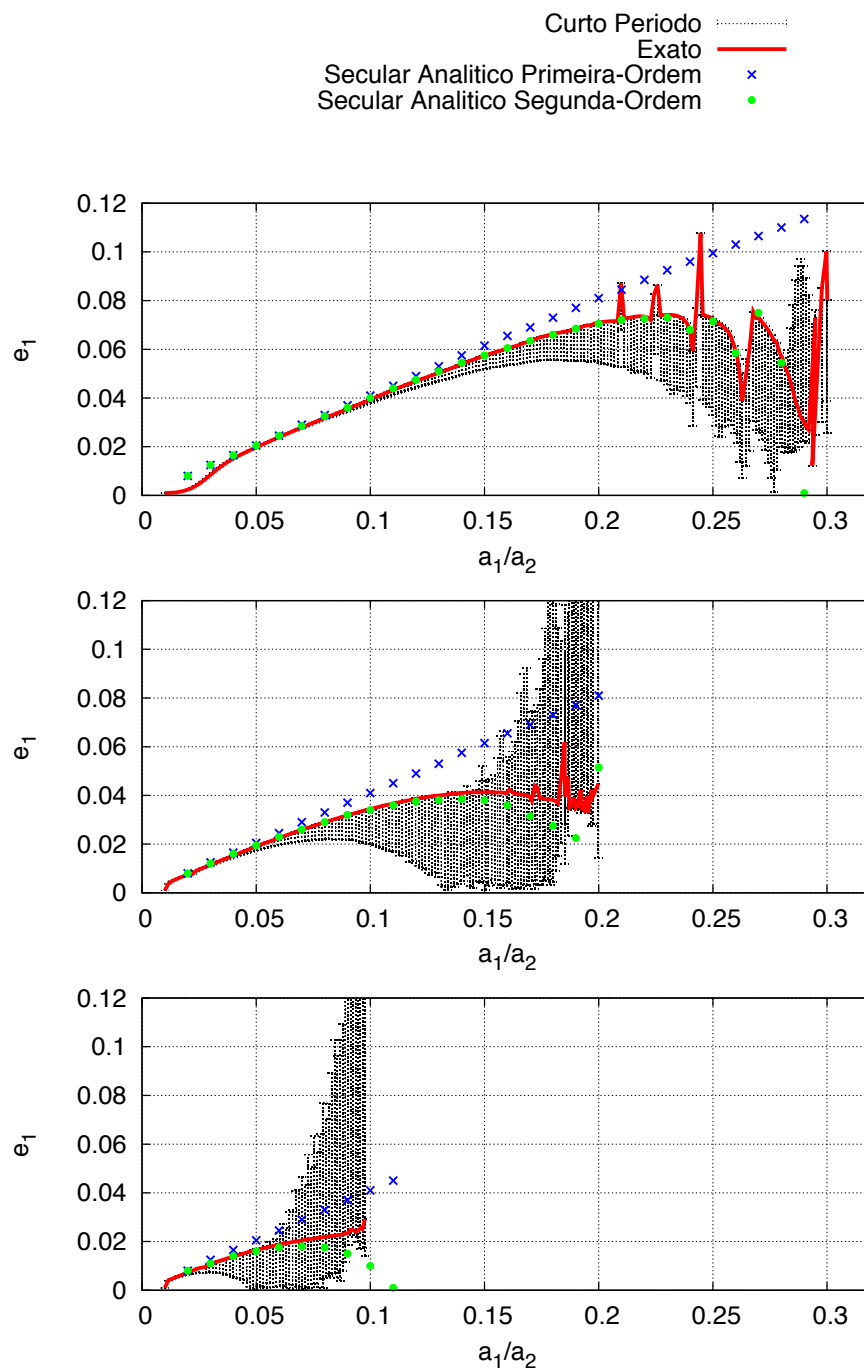


Figura 7.4: Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em um período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto para $e_2 = 0.3$ e $m_2 = 0.1M_\odot$ (topo), $m_2 = 1M_\odot$ (meio), e $m_2 = 10M_\odot$ (abaixo).

Ainda para o plano superior da Figura 7.3, vemos que o desvio observado entre as famílias obtidas através do modelo Secular de Segunda Ordem e do método numérico, para o intervalo de razão de semi-eixos $0.17 < a_1/a_2 < 0.23$, não pode ser atribuído, a princípio,

à presença de ressonâncias de movimentos médios. No entanto, podemos perceber que esse intervalo se localiza em uma região em que as amplitudes das oscilações de curto período da excentricidade são maiores que o valor das excentricidades forçadas determinada pelo método numérico. Portanto, o desvio observado pode ser causado pelas limitações técnicas do método numérico.

Esse é um efeito que pode ser observado também nos outros planos nas Figuras 7.3 e 7.4. Os casos que apresentam um desvio entre as soluções, obtidas através do método numérico e do modelo de segunda ordem, que não pode ser associado a ressonâncias de movimentos médios sempre se localizam em uma região do espaço de parâmetros em que as oscilações de curto período possuem amplitudes maiores que a própria excentricidade forçada.

É possível notar ainda nos casos em que não há desvio entre as famílias obtidas através do modelo Secular de Segunda Ordem e do método numérico (no plano inferior da Figura 7.3 e no plano superior da Figura 7.4) que a amplitude das oscilações de curto período somente atinge o valor da excentricidade forçada na região dominada pela dinâmica não-secular.

O resultado proporcionado por essa análise evidencia a complexidade da dinâmica nessa região do espaço de parâmetros, em que as oscilações de curto período e as ressonâncias de movimentos médios desempenham um papel mais importante que a evolução secular e devem ser estudadas separadamente.

7.3 Limites de Aplicabilidade das Teorias Seculares

Nesta seção, estimamos os limites de aplicabilidade dos modelos apresentados nos capítulos anteriores. Os limites foram avaliados para os modelos Seculares de Primeira e Segunda Ordem por comparações das famílias de soluções estacionárias entre ambos e com a solução obtida numericamente. Definimos também limites que apontam características da dinâmica de planetas em binárias a partir das integrações das equações exatas, como o limite de estabilidade e o momento em que as oscilações de curto período superam a excentricidade secular forçada.

Na Figura 7.5, é apresentado um exemplo gráfico dos limites característicos, definidos da seguinte forma:

- PO** - Razão de semi-eixos a_1/a_2 em que a diferença entre as soluções obtidas através dos modelos Seculares Analíticos de Primeira e Segunda Ordem supera 10% sobre o valor da excentricidade forçada dada pelo modelo de Segunda Ordem;
- SO** - Razão de semi-eixos a_1/a_2 em que a diferença entre as soluções obtidas através modelo Secular Analítico de Segunda Ordem e das integrações das equações exatas supera 10% sobre o valor da excentricidade dada pelo modelo de Segunda Ordem;
- Num** - Razão de semi-eixos a_1/a_2 em que é possível se verificar as variações abruptas na família de soluções obtida através das integrações das equações exatas, indicativo da região do espaço de parâmetros em que a dinâmica secular não é mais predominante;
- SP** - Razão de semi-eixos a_1/a_2 em que as amplitudes dos termos de curto período atingem o valor da excentricidade forçada, o que é um indicativo da influência das oscilações de curto período na determinação numérica da solução estacionária;
- Ins** - Razão de semi-eixos a_1/a_2 a partir da qual as integrações das equações exatas resultaram em uma colisão ou uma expulsão do planeta do sistema de binárias;

Na Figura 7.5 ilustramos os limites descritos acima para um plano construído com os parâmetros do perturbador $m_2 = 1M_\odot$ e $e_2 = 0.2$. As famílias obtidas através dos modelos Seculares Analíticos de Primeira e Segunda ordem são representadas pelos pontos em azul e verde, respectivamente, enquanto que a família de soluções estacionárias obtida através das integrações exatas é representada pela curva em vermelho. Os valores mínimos e máximos atingidos pela excentricidade do planeta durante um período Kepleriano da estrela perturbadora são representados pelas barras tracejadas em preto em torno da curva em vermelho, conforme descrito na Seção 6.3.

As linhas verticais representam os limites definidos acima:

1. Em azul, em $a_1/a_2 \approx 0.08$, temos o limite de aplicabilidade do modelo de Primeira Ordem (**PO**). Ou seja, para $a_1/a_2 < 0.08$ temos a região do espaço de parâmetros em que a aplicação do modelo Secular de Primeira Ordem é válida;
2. Em preto, em $a_1/a_2 \approx 0.13$, temos o limite definido para a influência dos termos de curto período (**SP**). Ou seja, para $a_1/a_2 > 0.13$, as oscilações de curto período passam

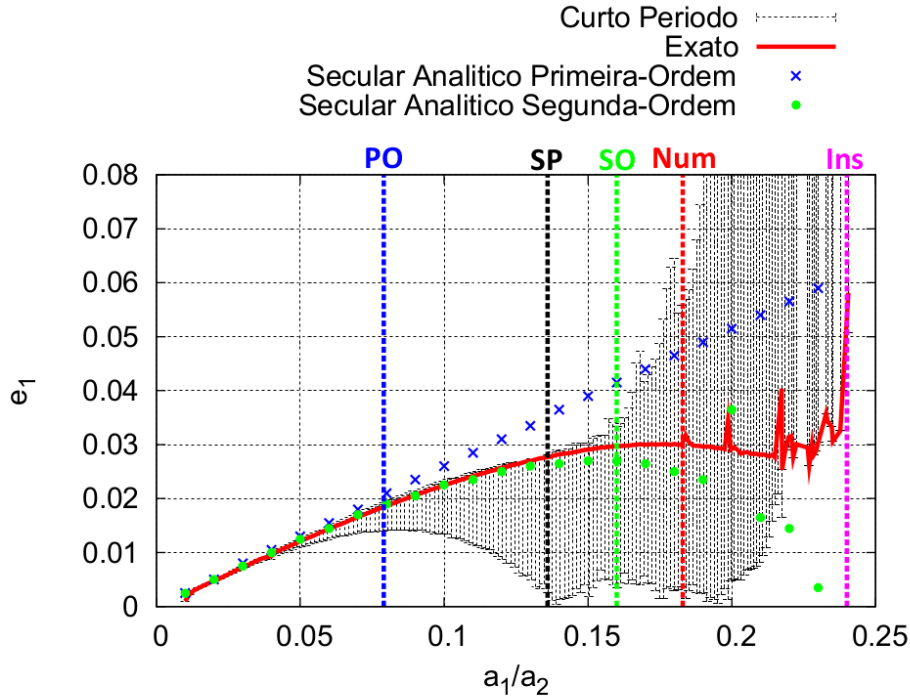


Figura 7.5: Curvas das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto para o caso $m_2 = 1M_\odot$ e $e_2 = 0.2$. As linhas tracejadas na vertical representam os limites de aplicabilidade do modelo Secular de Primeira Ordem (PO), do modelo Secular de Segunda Ordem (SO), do método numérico (Num) e também da estimativa de influência dos termos de curto período (SP) e da instabilidade (Ins).

a desempenhar um papel significativo na determinação das soluções estacionárias a partir das equações exatas de movimento e também na evolução dinâmica do sistema;

3. Em verde, em $a_1/a_2 \approx 0.16$, temos o limite de aplicabilidade do modelo de Segunda Ordem (**SO**). Ou seja, para $a_1/a_2 < 0.16$ temos a região do espaço de parâmetros em que a aplicação do modelo Secular de Segunda Ordem é válida;
4. Em vermelho, em $a_1/a_2 \approx 0.18$, temos o limite definido pela identificação da presença das ressonâncias de movimentos médios (**Num**). Ou seja, para $a_1/a_2 > 0.18$ temos a região do espaço de parâmetros em que a dinâmica ressonante passa a desempenhar um papel importante na evolução dinâmica do sistema;
5. Em magenta, para $a_1/a_2 \approx 0.24$, temos o limite de estabilidade (**Ins**). Ou seja, para $a_1/a_2 > 0.24$ todas as órbitas são instáveis;

É importante enfatizar que os limites definidos acima foram obtidos para uma confi-

guração inicial específica, em que o planeta e o perturbador se posicionam inicialmente nos pericentros de suas órbitas cujas linhas pericentricas estão alinhadas, ou $M_1 = M_2 = \Delta\varpi = 0$. Esses valores foram escolhidos porque os limites **PO** e **SO** não mostram dependência com a configuração inicial. Porém, os outros limites dependem dessa configuração, por exemplo, caso o planeta possua uma órbita de excentricidade inicial maior que a excentricidade forçada, os limites **Ins** e **Num** são deslocados para razões de semi-eixos a_1/a_2 menores.

Determinamos os limites de aplicabilidade calculando as famílias de soluções estacionárias para os valores de excentricidade do perturbador dadas por $e_2 = \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ e as massas do perturbador dadas por $m_2 = \{0.1, 0.5, 1, 2, 10\}M_\odot$ (todas apresentadas no Apêndice B). Os resultados obtidos são sumarizados nos planos paramétricos nas Figuras 7.6 e 7.7.

Na Figura 7.6 apresentamos cinco planos paramétricos no espaço $m_2/m_0 \times a_1/a_2$, cada um construído para um diferente valor da excentricidade e_2 . Na Figura 7.7, apresentamos os cinco planos paramétricos no espaço $e_2 \times a_1/a_2$, construídos para diferentes valores da razão de massas m_2/m_0 . Em ambas as figuras, adicionamos os limites de estabilidade definidos pelo critério *MAcD* (Andrade-Ines e Michtchenko, 2014), que representam limites superiores de estabilidade, e em cuja região no espaço de parâmetros existem apenas órbitas instáveis.

A interpretação das Figuras 7.6 e 7.7 pode ser feita da seguinte forma:

1. A área em azul nos planos corresponde aos conjuntos de parâmetros em que a aplicação dos modelos de Primeira e Segunda Ordem é válida;
2. A área em verde nos planos corresponde aos conjuntos de parâmetros para os quais a aplicação do modelo de Primeira Ordem já não é válida e a do modelo de Segunda Ordem sim;
3. Os conjuntos de parâmetros localizados acima das curvas em preto correspondem a regiões em que as oscilações de curto período possuem amplitudes maiores que as excentricidades forçadas e, portanto, influenciam diretamente no resultado da determinação da solução estacionária a partir das integrações exatas;
4. Os conjuntos de parâmetros localizados acima das curvas em vermelho correspondem a domínios do comportamento não-secular do espaço de parâmetros;

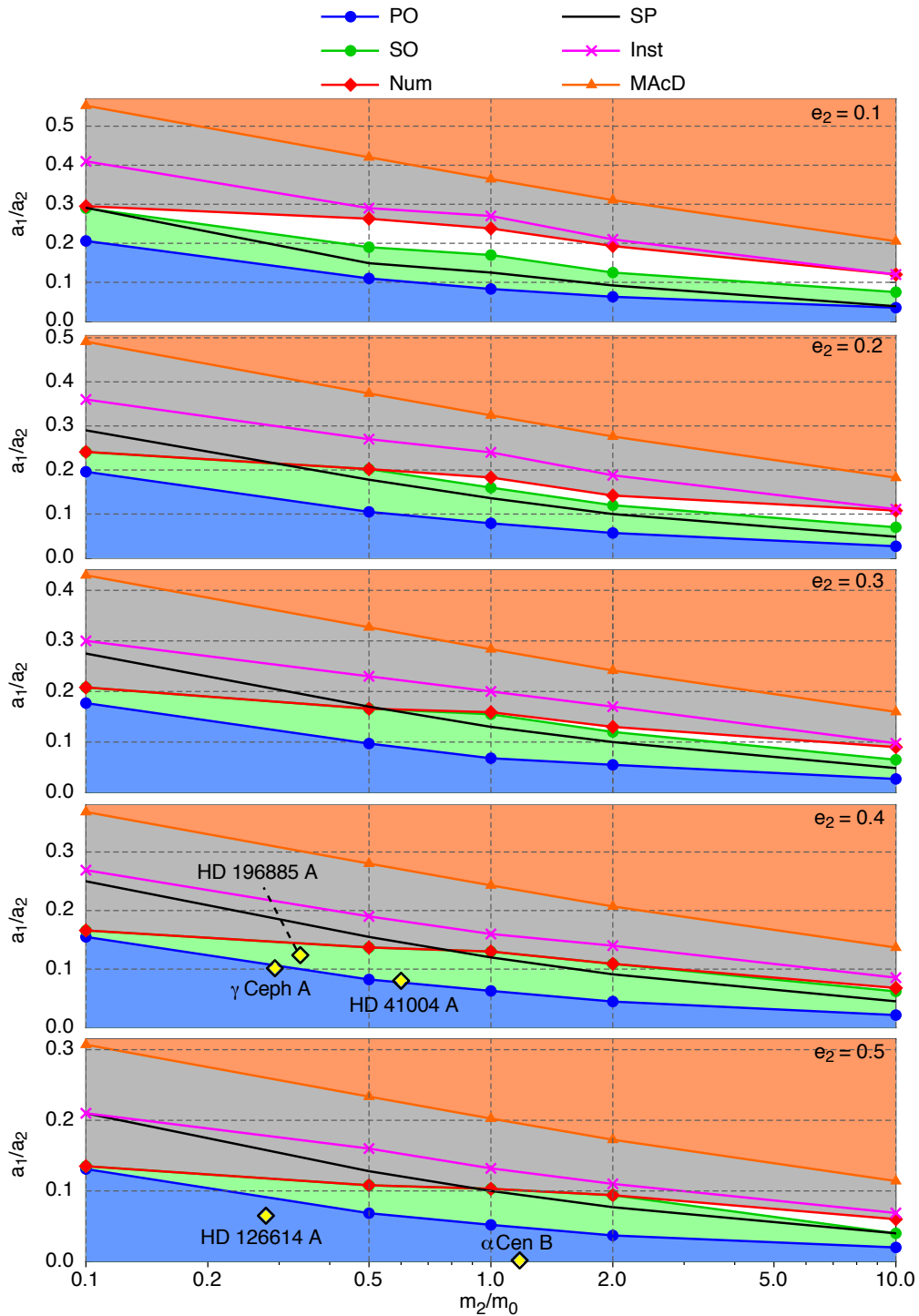


Figura 7.6: Limites de aplicabilidade das teorias de Primeira Ordem (área em azul), de Segunda Ordem (área em verde), do método numérico (curva em vermelho), assim como a estimativa da influência dos termos de curto período (curva em preto) e da instabilidade das simulações (curva em magenta) em função das razões de massas m_0/m_2 e para as excentricidades e_2 nos diferentes planos. A área em laranja representa a região de instabilidade determinada pelo critério *MAcD* (Andrade-Ines e Michtchenko, 2014), enquanto que a área em cinza representa a área com possíveis instabilidades. Os pontos em amarelo são representações dos planetas em sistemas binários, dados pela Tabela 7.1 e discutidos na Seção 7.4.

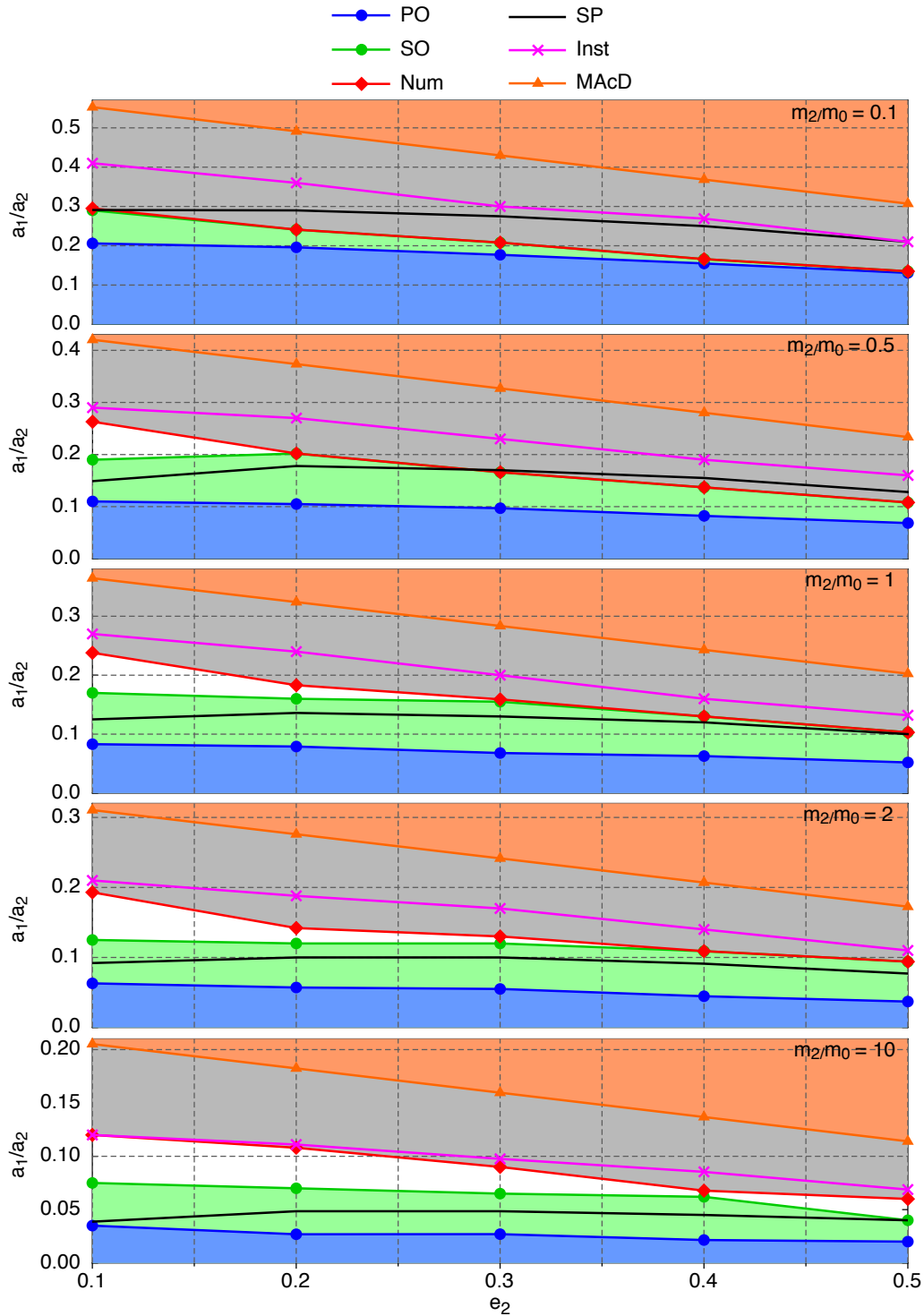


Figura 7.7: Limites de aplicabilidade das teorias de Primeira Ordem (área em azul), de Segunda Ordem (área em verde), do método numérico (curva em vermelho), assim como a estimativa da influência dos termos de curto período (curva em preto) e da instabilidade das simulações (curva em magenta) em função das excentricidades e_2 e para as razões de massas m_0/m_2 nos diferentes planos. A área em laranja representa a região de instabilidade determinada pelo critério *MAcD* (Andrade-Ines e Michtchenko, 2014), enquanto que a área em cinza representa a área com possíveis instabilidades.

5. Os conjuntos de parâmetros localizados acima das curvas em magenta correspondem a domínios instáveis atingidos durante a construção das famílias de soluções estacionárias;
6. A área em cinza nos planos corresponde a regiões de transição no espaço de parâmetros em que co-existem órbitas estáveis e instáveis, devido à presença de ressonâncias de movimentos médios de alta ordem na região;
7. A área em laranja nos planos corresponde a domínios de instabilidade, onde todas as órbitas são instáveis, resultando em expulsões do planeta do sistema ou em colisões do planeta com alguma das estrelas;
8. A área em branco nos planos corresponde a regiões no espaço de parâmetros em que verificamos uma divergência entre as soluções obtidas pelo modelo de segunda ordem e as soluções obtidas através das integrações das equações exatas, mas ainda sem a influência das ressonâncias de movimentos médios.

Em ambas as Figuras 7.6 e 7.7, nos casos em que a curva-limite do comportamento não-secular (curva em vermelho) coincide com os limites de aplicabilidade dos modelos de primeira (curva em azul) ou segunda ordem (curva em verde), significa que os respectivos modelos são capazes de descrever a solução obtida através da integração das equações exatas por todo o plano paramétrico dominado somente pela dinâmica secular.

As regiões em branco localizadas entre as curvas em verde e em vermelho, nos diferentes planos de ambas as figuras, correspondem aos parâmetros em que verificamos uma divergência entre as soluções obtidas pelo modelo de segunda ordem e as soluções obtidas através das integrações das equações exatas. No entanto, podemos perceber que as regiões em branco sempre se localizam em áreas nos planos paramétricos acima das curvas em preto, que correspondem a regiões em que as oscilações de curto período interferem no procedimento de obtenção das soluções numéricas, o que já foi possível verificar na Seção 7.2.

Comparando os diferentes planos da Figura 7.6 vemos que quanto menor a excentricidade do perturbador, maior é a região em branco localizada entre as curvas em verde e vermelho. Esse já era um resultado esperado, pois quanto menor a excentricidade do perturbador, menor a excentricidade forçada no planeta, e portanto é necessária uma

menor amplitude de oscilações de curto período para interferir na obtenção das soluções estacionárias através do método numérico.

A partir de ambas as Figuras 7.6 e 7.7, podemos perceber que, quanto menor a massa do perturbador, maior a área do espaço de parâmetros que corresponde ao regime de aplicabilidade das teorias de primeira ordem (área em azul). Por exemplo, para o plano na Figura 7.7 com $m_2/m_0 = 0.1$, notamos que na área abaixo da curva limite da dinâmica não-secular (em vermelho) o modelo de Primeira Ordem (em azul) cobre uma região maior do espaço de parâmetros que o modelo de segunda ordem (em verde). Já para o plano com $m_2/m_0 = 1$, podemos perceber que aproximadamente metade da área abaixo da curva limite da dinâmica secular (em vermelho) corresponde aos parâmetros que devem ser descritos somente pelo modelo de Segunda Ordem. No entanto, é importante enfatizar que para todos os valores de massas e excentricidades do perturbador considerados, existe sempre um valor de semi-eixo em que o modelo de Primeira Ordem pode ser aplicado sem restrições.

Por outro lado, analisando a influência da excentricidade do perturbador e_2 , na Figura 7.7, notamos que a área de aplicabilidade do modelo de Primeira Ordem é praticamente constante em cada plano, o que mostra que o valor da massa do perturbador tem uma influência maior na dinâmica planetária que a excentricidade da estrela perturbadora.

Nos planos de ambas as Figuras, notamos a presença de uma área em cinza, localizada entre a curva limite da dinâmica não-secular (em vermelho) e o limite de estabilidade dado pelo critério *MAcD* (Andrade-Ines e Michtchenko, 2014). Conforme já foi descrito, essa é uma região em que é possível encontrar tanto parâmetros de órbitas estáveis quanto órbitas instáveis. Isso se deve à presença de ressonâncias de movimentos médios na região, interferindo na dinâmica do planeta. Portanto, para uma determinação da dinâmica e da estabilidade da região, é necessário um estudo mais detalhado, com modelos analíticos ressonantes ou ferramentas numéricas mais completas (como o mapa dinâmico, apresentado na Seção 6.4). Como já foi mencionado, o estudo da dinâmica ressonante não é parte do escopo deste trabalho, mas é uma interessante perspectiva de continuidade.

7.4 Aplicação - Sistemas Detectados

Os planos construídos nas Figuras 7.6 e 7.7 permitem determinar qual a melhor abordagem para o tratamento de casos específicos como, por exemplo, o estudo da dinâmica secular dos planetas detectados em estrelas binárias. Apresentamos na Tabela 7.1 os parâmetros físicos e orbitais de planetas em órbitas tipo S em sistemas binários com separação menor que 50 AU .

Estrela	$m_0(M_\odot)$	$m_2(M_\odot)$	m_2/m_0	$a_1(AU)$	$a_2(AU)$	a_1/a_2	e_1	e_2
α Centauri B	0.934	1.10	1.18	0.04	23.4	1.71×10^{-3}	0.0	0.518
γ Cephei A	1.40	0.410	0.293	2.05	20.2	0.101	0.05	0.41
HD 41004 A	0.700	0.420	0.600	1.60	20.0	0.0762	0.48	0.40
HD 196885 A	1.33	0.450	0.338	2.60	21.0	0.124	0.41	0.42
HD 126614 A	1.15	0.320	0.278	2.35	36.2	0.0649	0.30	≤ 0.6

Tabela 7.1 - Parâmetros físicos e orbitais de planetas em órbitas tipo S em sistemas binários com separação menor que 50 AU (Pourbaix, 1999; Roell et al., 2012; Dumusque et al., 2012).

Apresentamos na Figura 7.6 a localização dos 5 sistemas da Tabela 7.1, com símbolos em amarelo. Para isso, aproximamos os valores das excentricidades das binárias para $e_2 = 0.5$, nos sistemas α Centauri B e HD 126614 A, e para $e_2 = 0.4$, nos os sistemas γ Cephei A, HD 41004 A e HD 196885 A.

Os dois planos inferiores da Figura 7.6 mostram que os planetas de α Centauri B e HD 126614 se localizam completamente imersos na área em azul, onde o modelo de Primeira Ordem é capaz de descrever adequadamente a dinâmica secular. Podemos ver também que o sistema HD 196885 A se localiza na região em verde, onde somente o modelo de Segunda Ordem é capaz de descrever adequadamente a dinâmica na região. Finalmente, 2 sistemas se encontram na região limítrofe entre as regiões em verde e azul, (HD 41004 A e γ Cephei A), que corresponde ao limite de validade dos modelos de primeira ordem.

A análise da estabilidade planetária por intermédio desses mapas deve ser feita com restrições. Os limites de estabilidade apresentados foram obtidos para excentricidades planetárias iniciais próximas às soluções estacionárias, que em geral possuem valores $e_1 < 0.1$. No entanto, para o caso dos sistemas HD 41004, HD 196885 e HD 126614, notamos que essa condição não é satisfeita, conforme os dados apresentados na Tabela 7.1. A excentricidade planetária desempenha um papel essencial na estabilidade dinâmica do planeta em estrelas binárias e deve ser estudada em mais detalhes. Um estudo detalhado deste

problema foi realizado para o caso particular do sistema α Centauri AB, conforme pode ser visto em Andrade-Ines e Michtchenko (2014) (ver Apêndice C).

Para verificar a qualidade da previsão feita através da análise da Figura 7.7, calculamos as famílias de soluções estacionárias e as frequências seculares para os sistemas apresentados na Tabela 7.1. Essas famílias são apresentadas em função do semi-eixo do planeta a_1 , utilizando novamente os modelos seculares de primeira e segunda ordem, além do método numérico e as estimativas das oscilações de curto período. Os resultados são apresentados nas Figuras de 7.8 a 7.12.

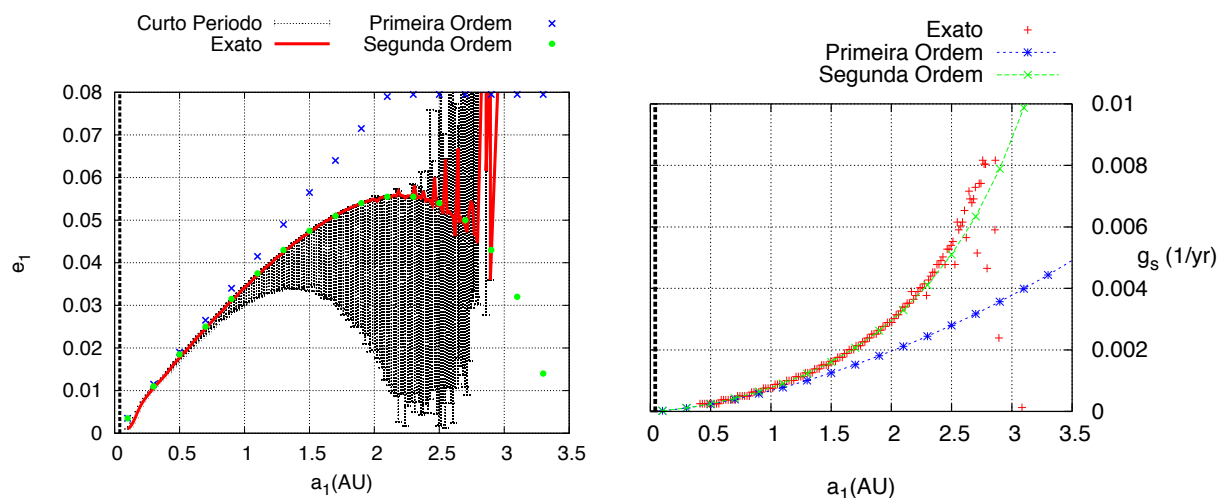


Figura 7.8: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para órbitas em torno da estrela α Centauri B. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 1.71 \times 10^{-3} AU$), dado pela Tabela 7.1.

A partir do plano esquerdo da Figura 7.8, podemos perceber que o planeta (linha vertical em preto) está em um valor de semi-eixo muito próximo à estrela α Centauri B (a estrela central desse sistema), em uma região em que todos os modelos apresentados coincidem, o que já era esperado da análise da Figura 7.7. O mesmo pode ser verificado para o planeta do sistema HD 126614 A, com o semi-eixo representado pela linha vertical em preto na Figura 7.9, embora o valor do semi-eixo do planeta já esteja mais próximo ao limite de aplicabilidade dos modelos de primeira ordem.

Analisando as famílias de soluções estacionárias para o planeta do sistema HD 196885 A, representado pela linha vertical em preto na Figura 7.10, podemos notar já uma diferença significativa entre os resultados obtidos pelos modelos de primeira (em azul) e segunda

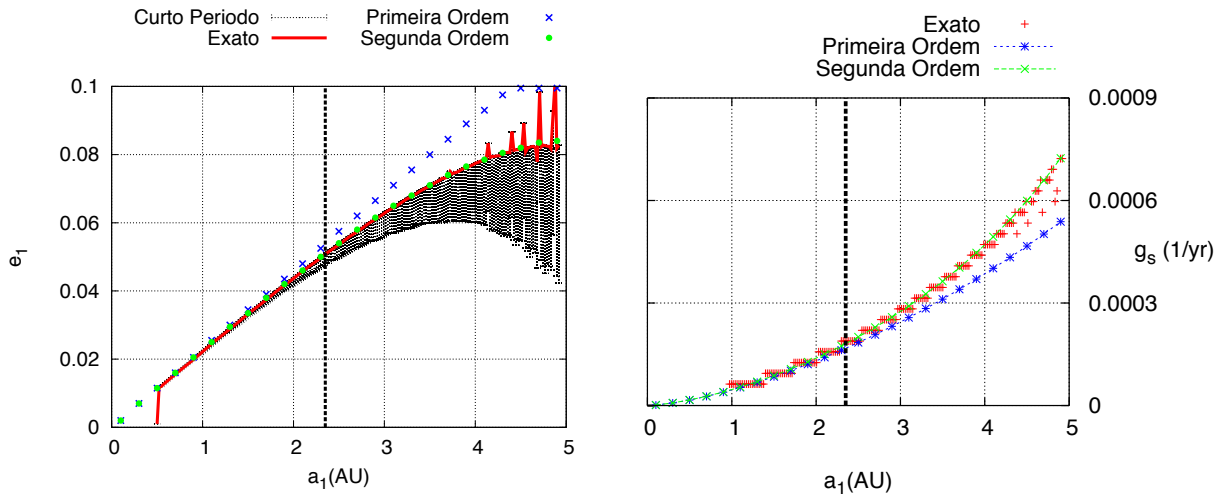


Figura 7.9: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para para órbitas em torno da estrela HD 126614 A. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 2.35AU$), dado pela Tabela 7.1.

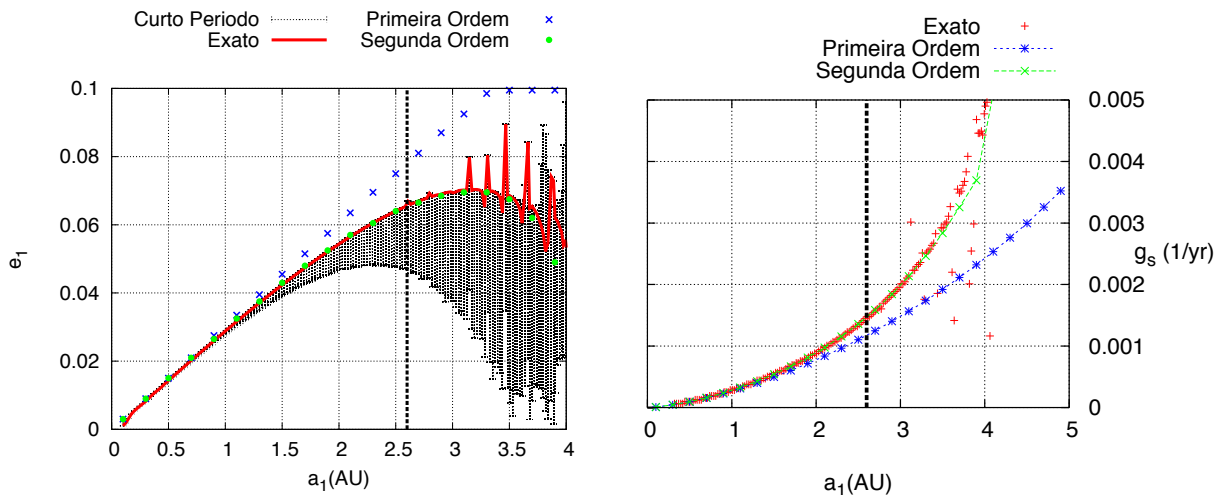


Figura 7.10: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para para órbitas em torno da estrela HD 196885 A. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 2.60AU$), dado pela Tabela 7.1.

ordem (em verde). Novamente, esse resultado concorda com o obtido da análise da Figura 7.6, em que é possível localizar o sistema sobre a região em verde no espaço de parâmetros, indicando que o estudo desse sistema deve ser feito com o modelo de segunda ordem.

Para os planetas nos sistemas γ Cephei e HD 41004, representados pelas linhas verticais em preto nas Figuras 7.11 e 7.12, podemos perceber que a diferença entre as excentrici-

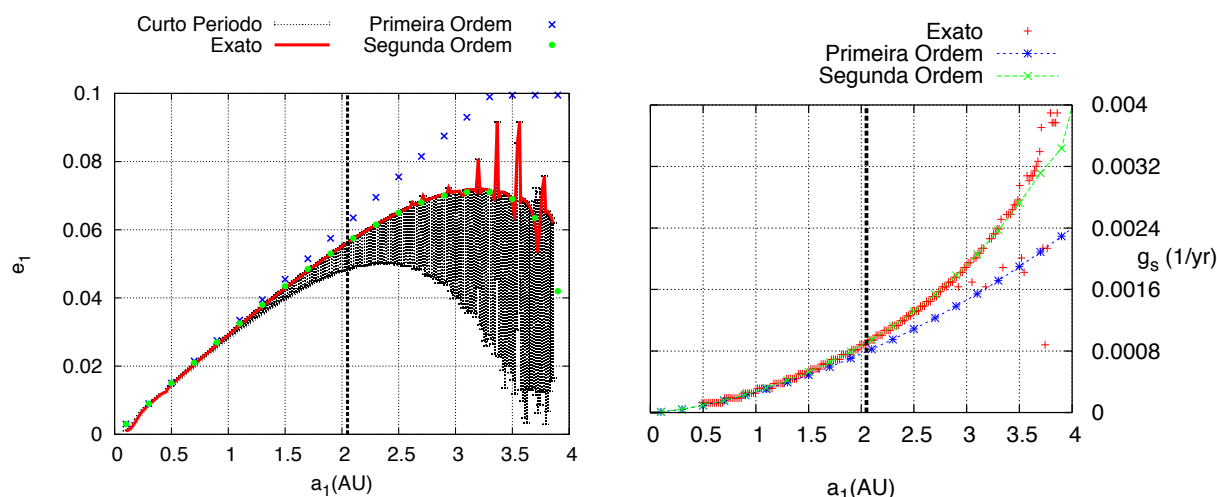


Figura 7.11: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para para órbitas em torno da estrela γ Cephei A. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 2.05AU$), dado pela Tabela 7.1.

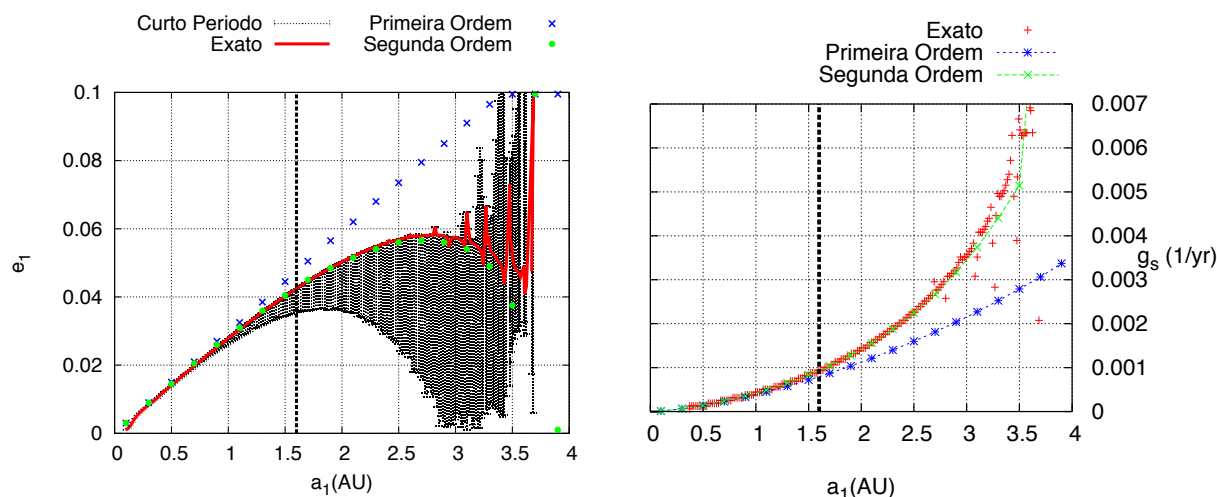


Figura 7.12: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e das frequências seculares (direita) obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) para para órbitas em torno da estrela HD 41004 A. A linha tracejada em preto representa o valor do semi-eixo correspondente ao valor estimado da posição do planeta ($a_1 = 1.60AU$), dado pela Tabela 7.1.

dades forçadas obtidas pelos modelos de primeira (em azul) e segunda ordem (em verde) é da ordem de 0.06, para ambos os casos. Essa diferença equivale a aproximadamente 10% do valor da excentricidade forçada de segunda ordem, que foi o valor utilizado como parâmetro para determinação do regime de aplicabilidade do modelo de primeira ordem. Esse resultado confirma novamente o que foi obtido na análise da Figura 7.6, em que lo-

calizamos os pontos correspondentes aos sistemas γ Cephei e HD 41004 sobre a linha em azul.

A partir da Tabela 7.1, podemos notar que as estrelas do sistema α Centauri AB possuem massas próximas à massa solar. Sendo o sistema estelar mais próximo ao Sistema Solar, é um alvo de grande interesse para a busca de exoplanetas. Uma questão que é levantada sobre esse sistema é com relação à habitabilidade e a influência da companhia binária na Zona Habitável (Kasting et al., 1993). Por ser um sistema com componentes estelares similares ao Sol, as zonas habitáveis em torno de cada estrela devem se localizar em torno de $a_1 \approx 1AU$. A partir da Figura 7.8, podemos perceber que, para esse valor de semi-eixo, os modelos de primeira ordem são capazes de descrever a dinâmica secular do sistema.

Estudos das Zonas Habitáveis consideram, em geral, as órbitas dos planetas circulares, mesmo em estudos aplicados na determinação das Zonas Habitáveis em sistemas binários (Forgan, 2012; Kaltenegger e Haghighipour, 2013). No entanto das Figura 7.8, podemos perceber que, para órbitas em torno de $a_1 \approx 1AU$, o planeta terá a excentricidade forçada de $e_1 \approx 0.035$, o que mostra que a hipótese da circularidade das órbitas não é satisfeita. No artigo Andrade-Ines e Michtchenko (2014) realizamos um estudo da influência da evolução dinâmica de planetas fictícios nas Zonas Habitáveis do sistema α Centauri AB, utilizando modelos e técnicas desenvolvidos no presente trabalho. Os resultados obtidos podem ser verificados no artigo, que é apresentado no Apêndice C.

Conclusões e Perspectivas Futuras

Neste trabalho, apresentamos um estudo da dinâmica secular de planetas em órbitas tipo S em estrelas binárias. Realizamos esse estudo por meio do desenvolvimento de modelos analíticos e semi-analíticos de primeira e segunda ordem. Mostramos que cada modelo desenvolvido possui suas vantagens e limitações, que englobam tanto a qualidade dos seus resultados obtidos quanto as suas complexidades.

O estudo de propriedades básicas do problema mostrou que a dinâmica secular coplanar de planetas em estrelas binárias é determinada, de uma maneira geral, por duas grandezas: a excentricidade forçada e_F e a frequência secular g_s . Ambas grandezas dependem somente dos parâmetros do problema e, portanto, pudemos utilizá-las para determinar as características globais da dinâmica secular e comparar os resultados dos diferentes modelos.

Desenvolvemos também técnicas numéricas para a obtenção das famílias das excentricidades forçadas das soluções estacionárias e das frequências seculares através de integrações exatas das equações de movimento. Por meio da análise das amplitudes de oscilação de curto período, foi possível estimar os limites de aplicabilidade dessas técnicas, onde efeitos adicionais presentes na dinâmica planetária se tornam importantes, tais como ressonâncias de movimentos médios.

A partir da comparação das famílias de soluções estacionárias, obtidas para cada modelo, com os resultados das integrações das equações exatas de movimento, pudemos determinar as características da dinâmica planetária e estimar o limite de aplicabilidade para cada modelo no espaço de parâmetros $(a_1/a_2, e_2, m_2/m_0)$. Com os dados obtidos através dessa análise, construímos planos paramétricos que apresentam os valores limites a_1/a_2 de aplicabilidade de cada modelo em função da excentricidade e_2 e da razão de massas m_2/m_0 . Com isso, estimamos qual o modelo mais adequado para o estudo de um sistema

com um dado conjunto de parâmetros físicos e orbitais.

Os regimes de aplicabilidade dos diferentes modelos também foram testados para cinco planetas detectados em órbitas tipo S em estrelas binárias. Verificamos que a dinâmica secular pode ser descrita adequadamente por modelos de primeira ordem para os planetas em torno de α Centauri B e HD 126614 A. Já para o planeta em torno de HD 196885 A, concluímos que sua dinâmica só pode ser descrita adequadamente pelo modelo Secular Analítico de Segunda Ordem. Verificamos também que os planetas nos sistemas HD 41004 A e γ Cephei A se encontram na região do espaço de parâmetros limítrofe de validade entre os modelos de Primeira e Segunda Ordem, e a escolha do modelo mais adequado depende da precisão necessária no cálculo de e_F e g_s .

Ainda que tenhamos atingido os objetivos estabelecidos no projeto inicial, esse trabalho nos deixa com muitas possibilidades de continuidade:

- Possível simplificação do desenvolvimento da função perturbadora para a construção do modelo de Segunda Ordem, de modo a obter uma solução similar mas com um número menor de termos, de modo a facilitar a aplicação;
- Desenvolvimento do modelo semi-analítico de segunda ordem para a modelagem do movimento planetário em estrelas binárias. Isso poderia ser feito com a alteração no procedimento da média de primeira ordem, ou com a aplicação de métodos numéricos para a solução da equação Homológica;
- Extensão para o caso tri-dimensional, estudo da influência dos termos de Segunda Ordem na ressonância de Lidov-Kozai;
- Estudo de ressonâncias de movimentos médios na região de movimento planetário em estrelas binárias;
- Estudo da dinâmica secular de planetas em órbitas do tipo P em estrelas circumbinárias.

Referências Bibliográficas

- Abt H. A., The frequencies of binaries on the main sequence, *AJ*, 1979, vol. 84, p. 1591
- Andrade-Ines E., Michtchenko T. A., Dynamical stability of terrestrial planets in the binary α Centauri system, *MNRAS*, 2014, vol. 444, p. 2167
- Barnes R., Greenberg R., Extrasolar Planetary Systems Near a Secular Separatrix, *ApJ*, 2006, vol. 638, p. 478
- Beaugé C., Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Planetary Masses and Orbital Parameters from Radial Velocity Measurements, 2007, p. 1
- Boss A. P., Gas Giant Protoplanets Formed by Disk Instability in Binary Star Systems, *ApJ*, 2006, vol. 641, p. 1148
- Brouwer D., Clemence G. M., *Methods of celestial mechanics*, 1961
- Butkov E., *Física Matemática. Lct*, 1988, 1988
- Desidera S., Barbieri M., Properties of planets in binary systems. The role of binary separation, *A&A*, 2007, vol. 462, p. 345
- Doyle L. R., Carter J. A., Fabrycky D. C., Slawson R. W., Howell S. B., Winn J. N., Orosz J. A., Prsa A., Welsh W. F., e 40 outros autores. Kepler-16: A Transiting Circumbinary Planet, *Science*, 2011, vol. 333, p. 1602
- Duchêne G., Kraus A., Stellar Multiplicity, *ARA&A*, 2013, vol. 51, p. 269

- Dumusque X., Pepe F., Lovis C., Ségransan D., Sahlmann J., Benz W., Bouchy F., Mayor M., Queloz D., Santos N., Udry S., An Earth-mass planet orbiting α Centauri B, *Nature*, 2012, vol. 491, p. 207
- Duquennoy A., Mayor M., How Many Single Stars Among Solar Type Stars?. In *Bioastronomy: The Search for Extraterrestrial Life - The Exploration Broadens*, vol. 390 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 1991, p. 39
- Dvorak R., Numerical experiments on planetary orbits in double stars, *Celestial Mechanics*, 1984, vol. 34, p. 369
- Eggenberger A., Udry S., Chauvin G., Beuzit J.-L., Lagrange A.-M., Ségransan D., Mayor M., The impact of stellar duplicity on planet occurrence and properties. I. Observational results of a VLT/NACO search for stellar companions to 130 nearby stars with and without planets, *A&A*, 2007, vol. 474, p. 273
- Eggenberger A., Udry S., Mayor M., Statistical properties of exoplanets. III. Planet properties and stellar multiplicity, *A&A*, 2004, vol. 417, p. 353
- Eggl S., Pilat-Lohinger E., Funk B., Georgakarakos N., Haghighipour N., Circumstellar habitable zones of binary-star systems in the solar neighbourhood, *MNRAS*, 2013, vol. 428, p. 3104
- Everhart E., An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, *Astrophysics and Space Science Library*. Volume 115, 1985., p.185, 1985, p. 185
- Ferraz-Mello S., ed., 2007 *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance* vol. 345 of *Astrophysics and Space Science Library*
- Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N., Extrasolar Planetary Systems. In *Chaos and Stability in Planetary Systems*, vol. 683 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 2005, p. 219
- Ford E. B., Kozinsky B., Rasio F. A., Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems, *ApJ*, 2000, vol. 535, p. 385

- Forgan D., Oscillations in the habitable zone around α Centauri B, *MNRAS*, 2012, vol. 422, p. 1241
- Giuppone C. A., Leiva A. M., Correa-Otto J., Beaugé C., Secular dynamics of planetesimals in tight binary systems: application to γ -Cephei, *A&A*, 2011, vol. 530, p. A103+
- Haghighipour N., Dynamical Stability and Habitability of the γ Cephei Binary-Planetary System, *ApJ*, 2006, vol. 644, p. 543
- Hatzes A. P., Cochran W. D., Endl M., McArthur B., Paulson D. B., Walker G. A. H., Campbell B., Yang S., A Planetary Companion to γ Cephei A, *ApJ*, 2003, vol. 599, p. 1383
- Heppenheimer T. A., On the formation of planets in binary star systems, *A&A*, 1978, vol. 65, p. 421
- Holman M. J., Wiegert P. A., Long-Term Stability of Planets in Binary Systems, *AJ*, 1999, vol. 117, p. 621
- Hori G., Theory of General Perturbation with Unspecified Canonical Variable, *PASJ*, 1966, vol. 18, p. 287
- Hughes S., The Computation of Tables of Hansen Coefficients, *Celestial Mechanics*, 1981, vol. 25, p. 101
- Kaltenegger L., Haghighipour N., Calculating the Habitable Zone of Binary Star Systems. I. S-type Binaries, *ApJ*, 2013, vol. 777, p. 165
- Kasting J. F., Whitmire D. P., Reynolds R. T., Habitable Zones around Main Sequence Stars, *Icarus*, 1993, vol. 101, p. 108
- Kaula W. M., Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite, *AJ*, 1962, vol. 67, p. 300
- Klioner S. A., Numerical Fourier Expansions of the Planetary Disturbing Function, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2000, vol. 77, p. 215
- Laskar J., Boué G., Explicit expansion of the three-body disturbing function for arbitrary eccentricities and inclinations, *A&A*, 2010, vol. 522, p. A60+

- Mathieu R. D., Pre-Main-Sequence Binary Stars, *ARA&A*, 1994, vol. 32, p. 465
- Mathieu R. D., Ghez A. M., Jensen E. L. N., Simon M., Young Binary Stars and Associated Disks, *Protostars and Planets IV*, 2000, pp 703–+
- Michtchenko T. A., Lazzaro D., Ferraz-Mello S., Roig F., Origin of the Basaltic Asteroid 1459 Magnya: A Dynamical and Mineralogical Study of the Outer Main Belt, *Icarus*, 2002, vol. 158, p. 343
- Michtchenko T. A., Malhotra R., Secular dynamics of the three-body problem: application to the ν Andromedae planetary system, *Icarus*, 2004, vol. 168, p. 237
- Michtchenko T. A., Rodríguez A., Modelling the secular evolution of migrating planet pairs, *MNRAS*, 2011, vol. 415, p. 2275
- Murray C. D., Dermott S. F., *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 1999
- Nelson A. F., Planet Formation is Unlikely in Equal-Mass Binary Systems with $A \sim 50$ AU, *ApJ*, 2000, vol. 537, p. L65
- Pauwels T., Secular orbit-orbit resonance between two satellites with non-zero masses, *Celestial Mechanics*, 1983, vol. 30, p. 229
- Plummer H. C. K., *An introductory treatise on dynamical astronomy*, 1918
- Pourbaix D., α Centauri Revisited: When the Spectroscopic and the Astrometric Mass Ratios Become Consistent. In *IAU Colloq. 170: Precise Stellar Radial Velocities*, vol. 185 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 1999, p. 340
- Press W. H., *Numerical recipes in C++ : the art of scientific computing*. Numerical recipes in C++ : the art of scientific computing by William H. Press. xxviii, 1,002 p. : ill. ; 26 cm. Includes bibliographical references and index. ISBN : 0521750334, 2002
- Raghavan D., McAlister H. A., Henry T. J., Latham D. W., Marcy G. W., Mason B. D., Gies D. R., White R. J., ten Brummelaar T. A., *A Survey of Stellar Families: Multiplicity of Solar-type Stars*, *ApJS*, 2010, vol. 190, p. 1
- Roell T., Neuhäuser R., Seifahrt A., Mugrauer M., Extrasolar planets in stellar multiple systems, *A&A*, 2012, vol. 542, p. A92

-
- Terquem C., Papaloizou J. C. B., Dynamical relaxation and the orbits of low-mass extra-solar planets, MNRAS, 2002, vol. 332, p. L39
- Thebault P., Haghighipour N., Planet formation in Binaries, ArXiv e-prints, 2014
- Thébaud P., Marzari F., Scholl H., Planet formation in the habitable zone of α Centauri B, MNRAS, 2009, vol. 393, p. L21
- Whittaker E. T., Watson G. N., A course of modern analysis, 1963

Apêndice

Soluções Estacionárias e Frequências Seculares Calculadas para os Modelos Desenvolvidos

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para o cálculo das excentricidades forçadas seculares e_F e das frequências seculares g_s a partir dos modelos Secular Analítico de Heppenheimer (1978), Secular Analítico de Primeira Ordem, Semi-Secular Semi-Analítico de Primeira Ordem, Secular Analítico de Segunda Ordem e a família de soluções estacionárias obtida através da integração das equações exatas de movimento, complementando as Figuras 7.1 e 7.2.

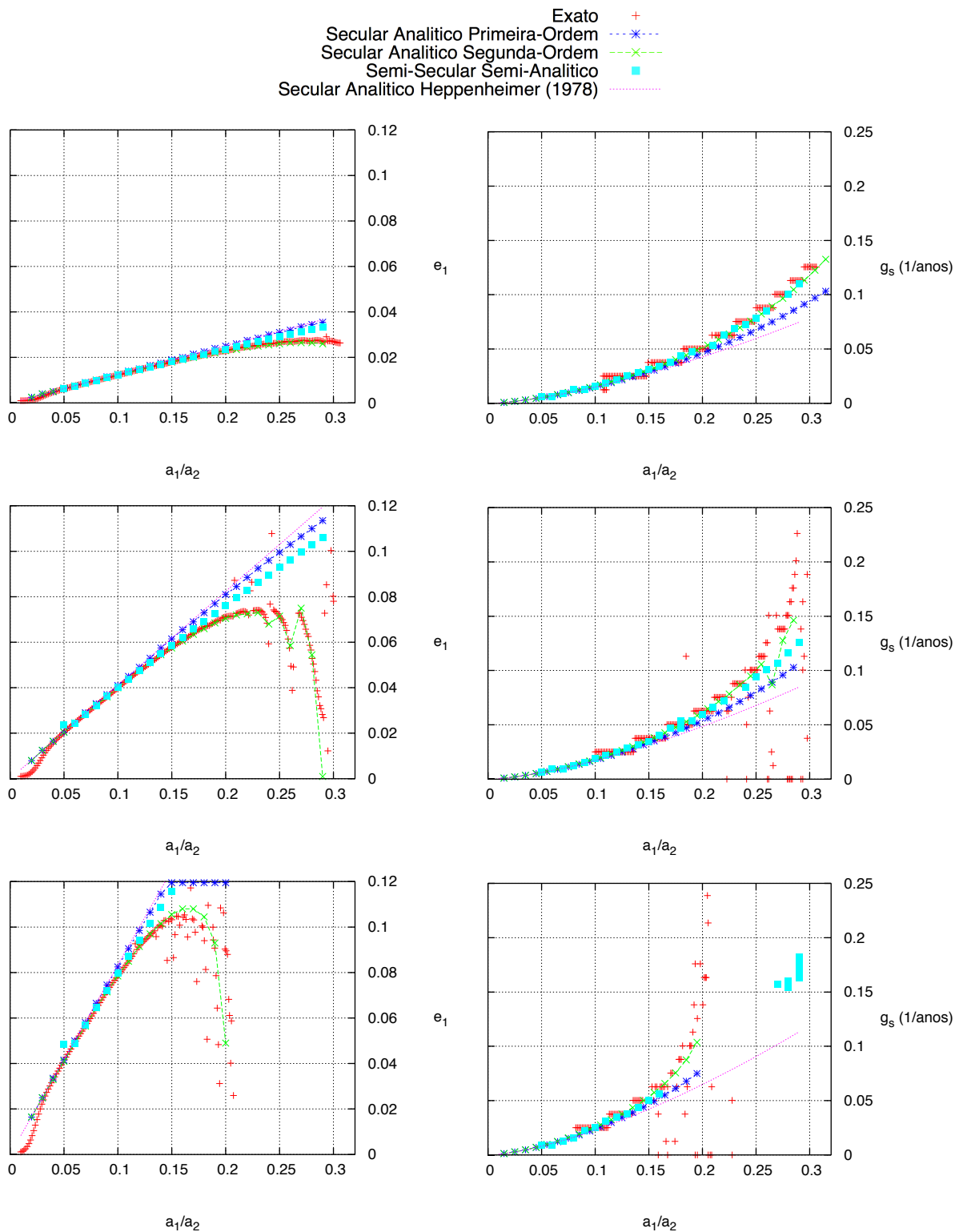


Figura A.1: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 0.1M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).

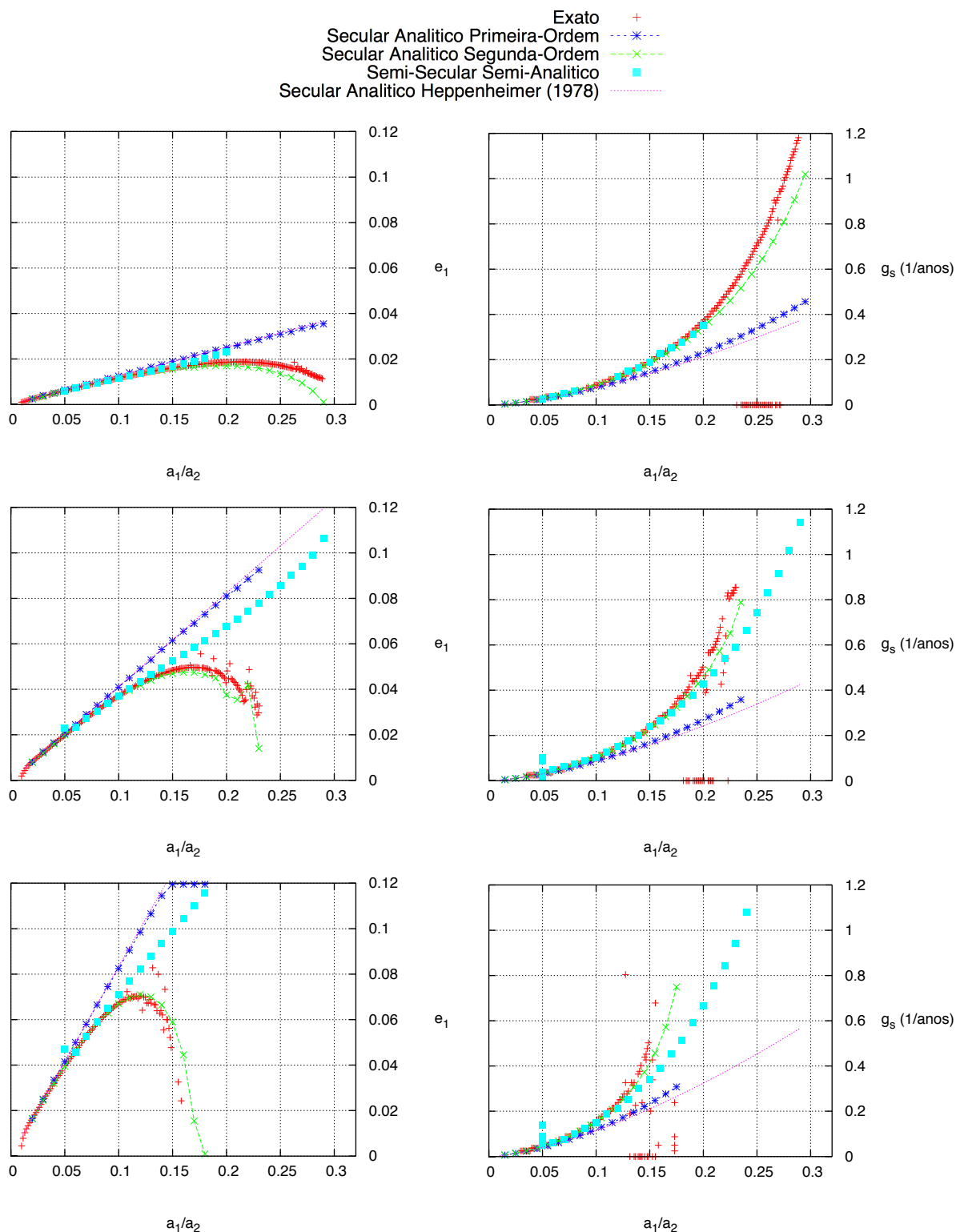


Figura A.2: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 0.5M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).

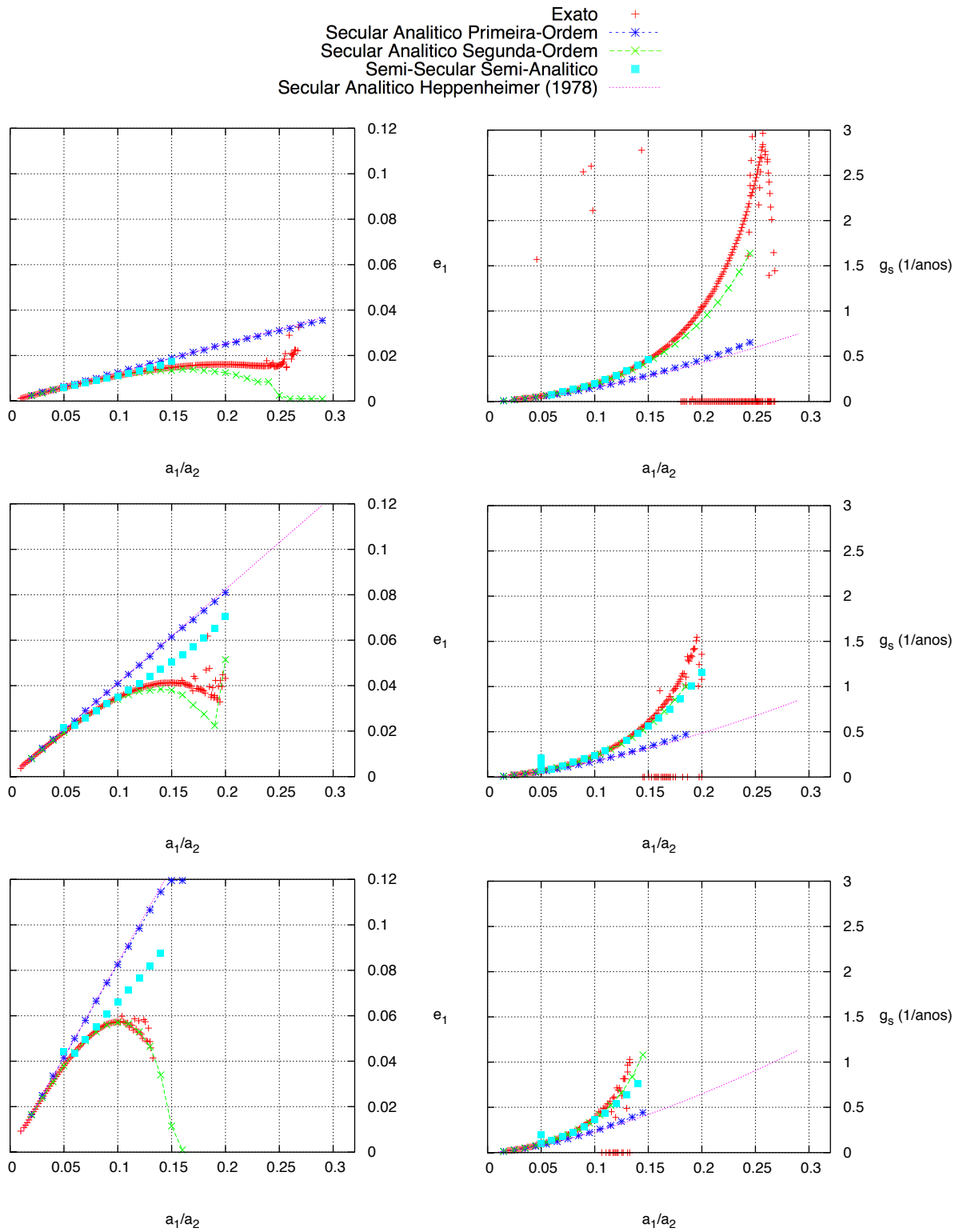


Figura A.3: Curvas das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 1M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).

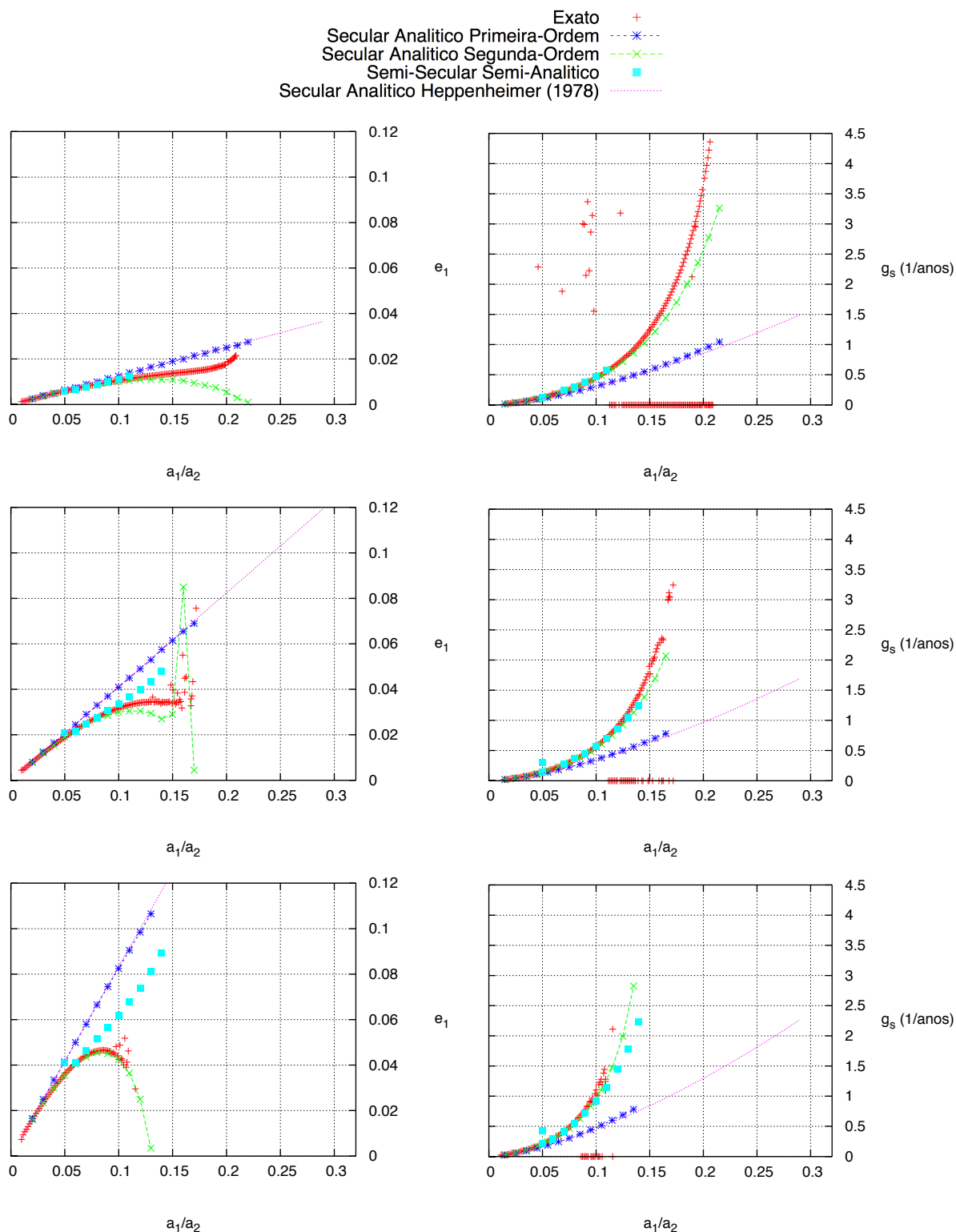


Figura A.4: Família das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 2M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).

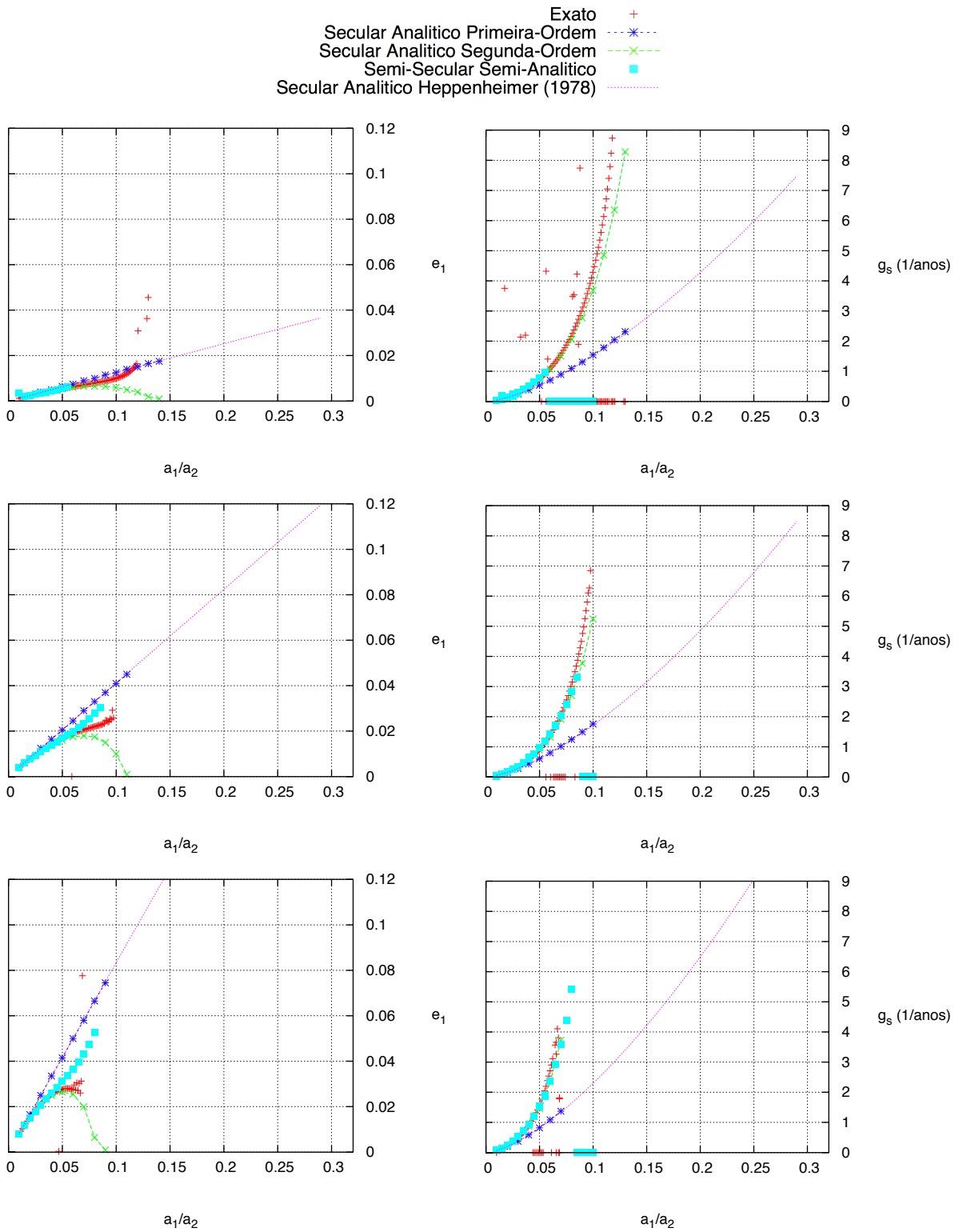


Figura A.5: Famílias das soluções estacionárias (esquerda) e frequências seculares calculadas para os diferentes modelos para $m_2 = 10M_\odot$ e $e_2 = 0.1$ (topo), $e_2 = 0.3$ (meio) e $e_1 = 0.5$ (abaixo).

Famílias de Soluções Estacionárias do Problema Secular Planar de Três Corpos

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para o cálculo das excentricidades forçadas seculares e_F a partir dos modelos Secular Analítico de Primeira Ordem, Secular Analítico de Segunda Ordem e as famílias das soluções estacionárias obtidas numericamente a partir das equações exatas de movimento. Também estão representadas as amplitudes das oscilações de curto período, utilizadas para a construção das Figuras 7.6 e 7.7 com o método exemplificado na Figura 7.5.

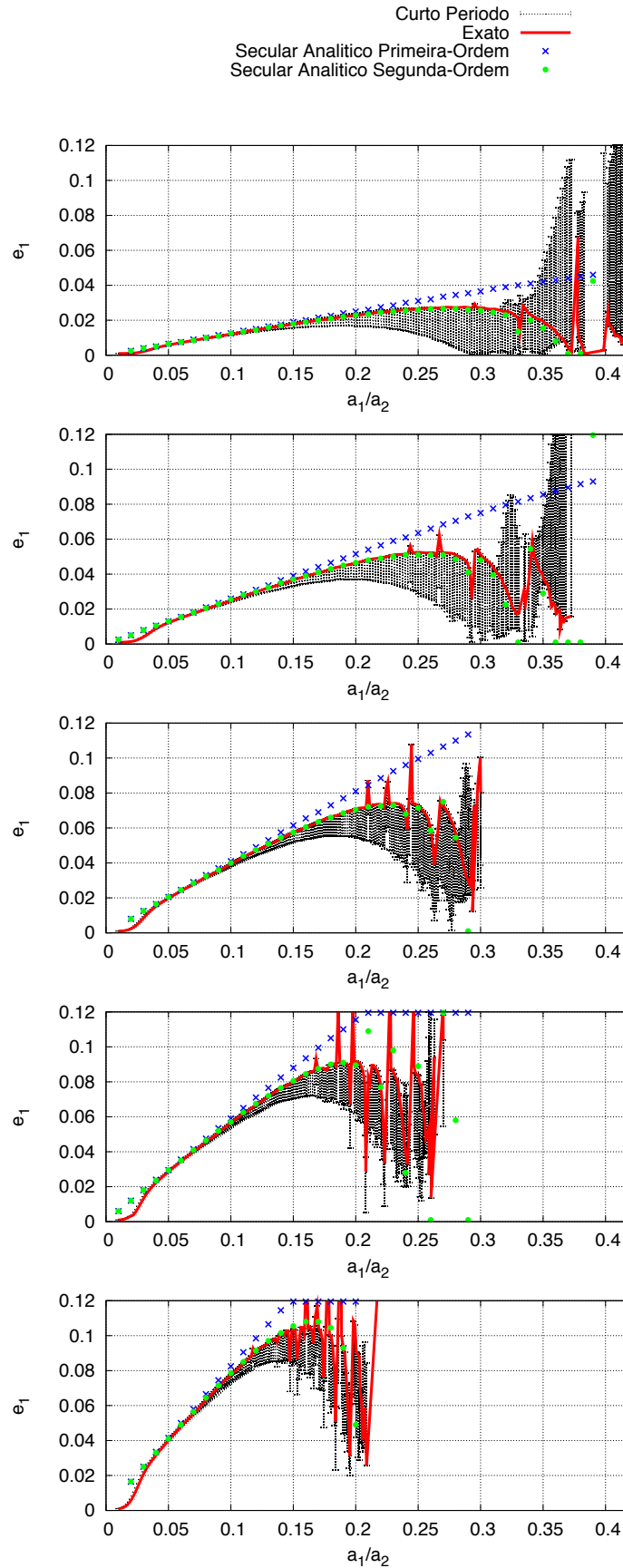


Figura B.1: Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde) e pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 0.1M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$.

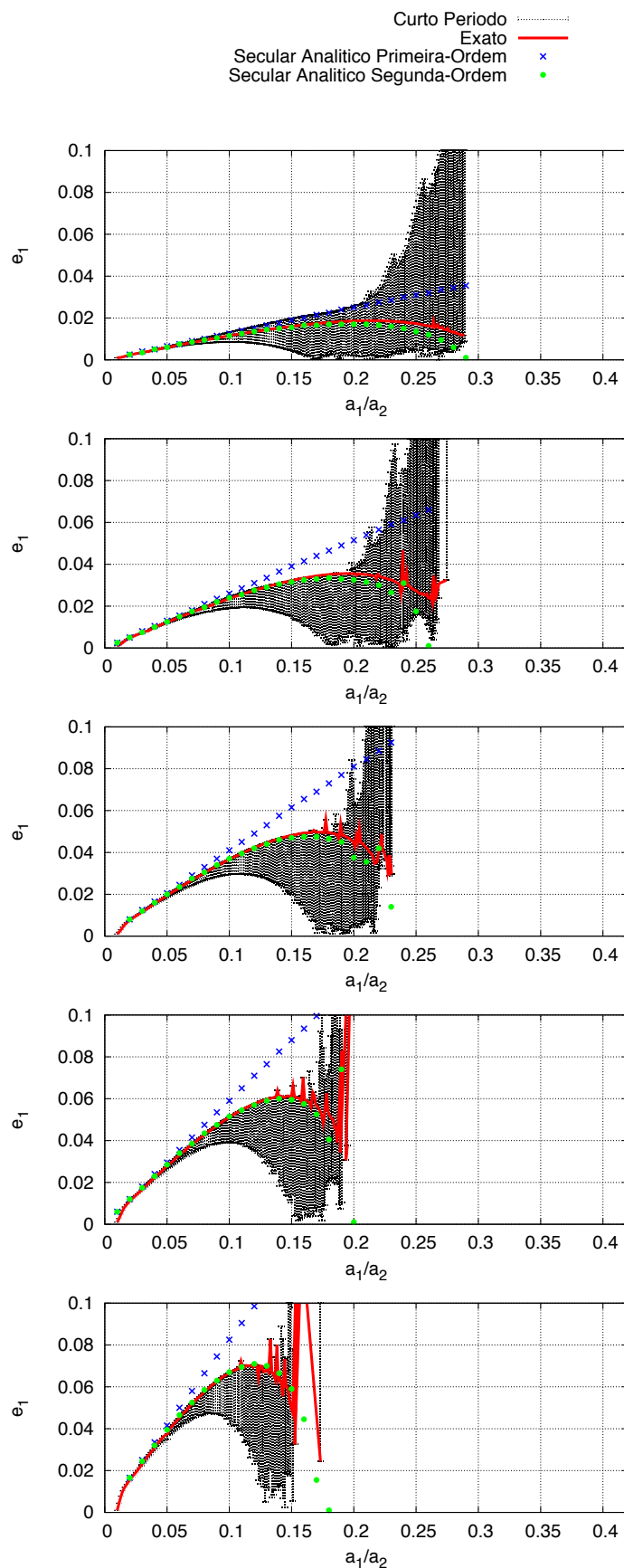


Figura B.2: Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 0.5M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$.

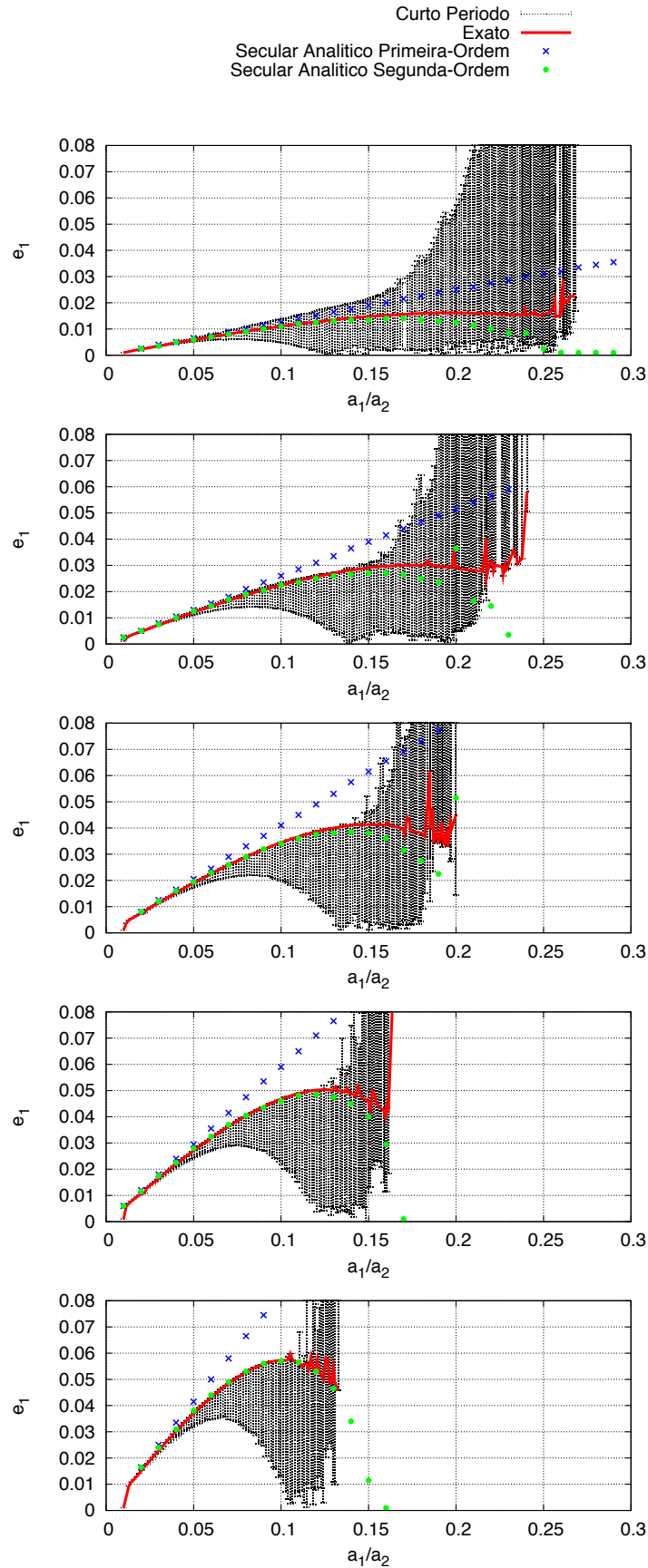


Figura B.3: Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 1M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$.

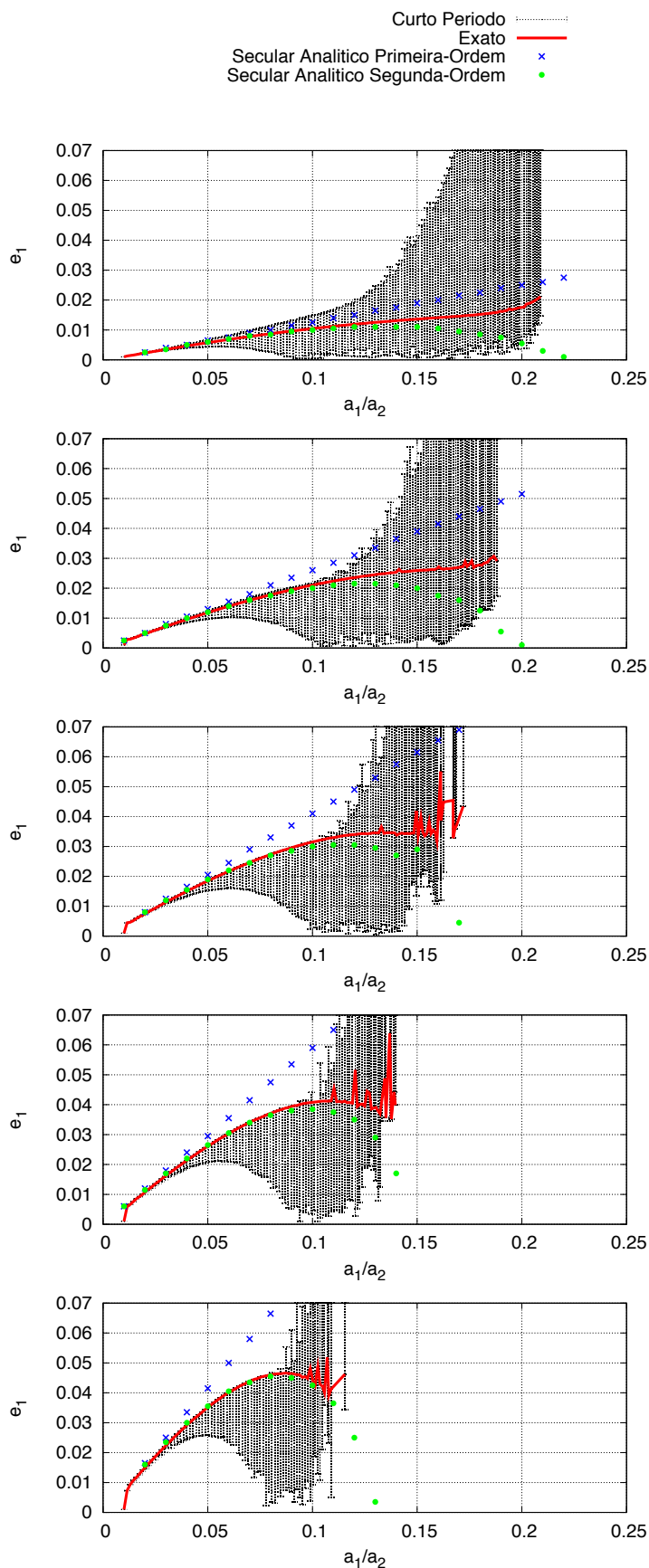


Figura B.4: Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 2M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$.

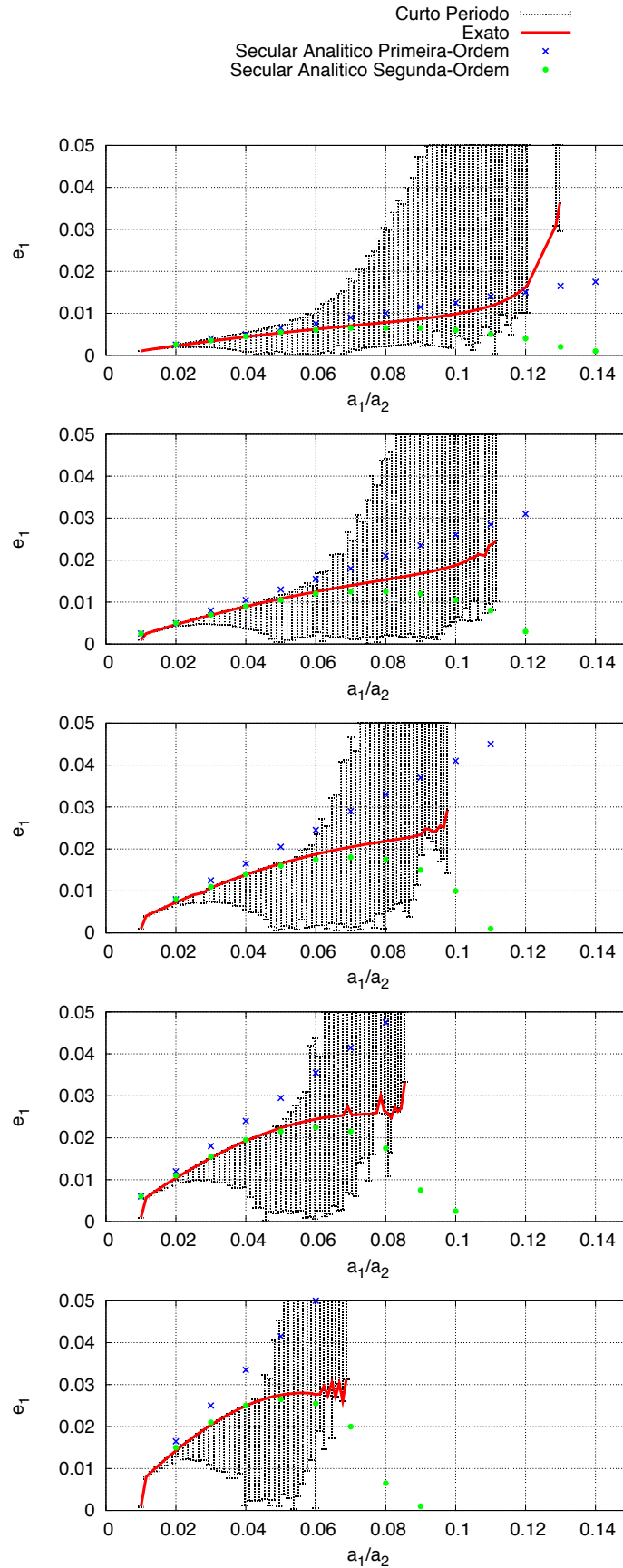


Figura B.5: Famílias das soluções estacionárias obtidas pelo Modelo Secular Analítico de Primeira Ordem (em azul), pelo Modelo Secular Analítico de Segunda Ordem (em verde), pelo método a partir das integrações das equações exatas de movimento (em vermelho) e as excentricidades máxima e mínima atingida pelo planeta em 1 período Kepleriano da estrela perturbadora, representadas pelas barras em preto. De cima para baixo os resultados para $m_2 = 10M_\odot$ e as excentricidades $e_2 = 0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_2 = 0.3$, $e_2 = 0.4$ e $e_2 = 0.5$.

Estudo da Estabilidade Dinâmica de Planetas Terrestres no Sistema α Centauri AB

Neste capítulo apresentamos o trabalho intitulado *Dynamical stability of terrestrial planets in the binary α Centauri System*, onde foi realizado o estudo da estabilidade e da evolução dinâmica de planetas no sistema α Centauri AB, publicado na revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, na referência Andrade-Ines e Michtchenko (2014).

Dynamical stability of terrestrial planets in the binary α Centauri system

E. Andrade-Ines[★] and T. A. Michtchenko

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, USP, Rua do Matão 1226, 05508-090 São Paulo, Brazil

Accepted 2014 August 5. Received 2014 August 1; in original form 2013 October 28

ABSTRACT

In this paper, we investigate whether hypothetical Earth-like planets have high probability of remaining on stable orbits inside the habitable zones around the stars A and B of α Centauri, for lengths of time compatible with the evolution of life. We introduce a stability criterion based on the solution of the restricted three-body problem and apply it to the α Centauri system. In this way, we determine the regions of the short-term stability of the satellite-type planetary orbits, in both planar and three-dimensional cases. We also study the long-term stability of hypothetical planets through the dynamical mapping of the habitable zones of the stars. The topology of the maps is analysed using the semi-analytical secular Hamiltonian model and possible processes responsible for long-lasting instabilities are identified. We verify that the planetary motion inside the habitable zones is regular, regardless of high eccentricities, for inclinations smaller than 40° . We show that the variation of the orbital distance of the planet located in the habitable zones of the binary is comparable to that of Earth, if the planet is close to the Mode I stationary solution. This result brings positive expectations for finding habitable planets in binary stars.

Key words: celestial mechanics – planets and satellites: dynamical evolution and stability – planets and satellites: individual: α Centauri – binaries: general.

1 INTRODUCTION

About 50 per cent of the known main-sequence stars belong to the class of binary or multiple stellar systems (Abt 1979; Duquennoy & Mayor 1991; Raghavan et al. 2010). Due to inherent difficulties in monitoring the radial velocities of multistar systems, these systems have been mostly ignored by researchers performing searches for extrasolar planets. However, in last years, due to improving precision and advances of detection methods, binaries have become increasingly interesting targets of planet searches, and several research programmes looking for planets in binary systems are in progress.

The α Centauri binary is of special interest. Being the closest stellar system to the Sun, as well as composed of two stars very similar to the Sun, it has been always a major target for extrasolar planet surveys, although it was not until recently that a putative planet has been found orbiting around α Centauri B with a period of 3.236 d (Dumusque et al. 2012; for an opposing view see Hatzes 2013). Furthermore, studies of the planet formation suggest that more planets around the star B may exist, particularly inside the *Habitable Zone* (HZ; Guedes et al. 2008; Thébault, Marzari & Scholl 2009). Although these planets are yet to be discovered in binary systems, recent works have shown that terrestrial planets can form and have a stable orbit around a star of a binary in a

close S-type system, depending on the binary orbital and physical parameters (Haghighipour 2006; Haghighipour & Raymond 2007; Quintana et al. 2007; Eggl et al. 2013; Kaltenegger & Haghighipour 2013).

The high mass of the disturbing stellar companion and the frequent high eccentricity/inclination of its relative orbit make the perturbation theories based on classical Lagrangian expansions inapplicable in this case. A possible approximation is the expansion of the disturbing function using the Legendre polynomials (Heppenheimer 1978; Ford, Kozinsky & Rasio 2000; Laskar & Boué 2010). However, although this development avoids the constraints due to the high eccentricities and inclinations, its convergence is very slow, allowing its application only in the case of hierarchical systems (Nelson 2000; Boss 2006; Haghighipour 2006; Thébault et al. 2009; Eggl et al. 2013).

An alternative to overcome the problem is the extension of a perturbation theory up to second order in the disturber mass. This was done in Giuppone et al. (2011), where the developed model was applied to the γ Cephei binary system. Although the results obtained have shown an improvement over the first-order model, the authors have emphasized that the model was not workable due to its high complexity; thus they preferred the use of empiric correction terms, specific for the γ Cephei configuration.

In this work, we perform a study of the stability of the planetary motion in binary systems combining the analytical and numerical approaches. For this, the stability concept is separated into the short-term stability and the long-term stability. The short-term stability

[★]E-mail: eduardo.andradeines@iag.usp.br

is based on the Hill criterion, which does not require any kind of expansion and averaging of the disturbing function. In such a way, it does not introduce the constraints on neither the mass of the disturbing body nor the eccentricity/inclination of its orbit.

The Hill criterion is a powerful approach, which has been used for over a century (Hill 1878); an in-depth review of its applications can be found in Szebehely (1984). Analytical approaches based on the Hill stability concept have been developed in Marchal & Bozis (1982) and Gladman (1993), among others, also as some empirical relations between stable orbits and the physical parameters of the binary (Graziani & Black 1981; Black 1982; Pendleton & Black 1983; Rabl & Dvorak 1988; Holman & Wiegert 1999). In our paper, we develop a variation of the Hill approach, referring to it as Maximum Apocentric Distance (or MAcD-criterion), and apply it to the α Centauri stars A and B. To simplify the applications of the method, we present the explicit formula for the maximal apocentric distances as a function of the physical and orbital parameters of the stellar binary.

The study of the long-term stability of a binary-planet system (of the order of the lifetime of the stars) is done for the satellite-type (S-type) planetary motion, when the planet revolves around one of the stellar components (Dvorak, Froeschle & Froeschle 1986). The planet motion is modelled semi-analytically in the frame of the secular three-body problem (Michtchenko, Ferraz-Mello & Beaugé 2006) and applied to the α Centauri hypothetical Earth-like planets placed in the HZs of the stars A and B. The topology of the phase space is investigated, without any restriction on the magnitude of the eccentricities and inclinations of the planets. The boundaries of the secular stability of the system, as a function of the masses and the orbital parameters of the planets, are then obtained. Notwithstanding the averaging being done at first order in masses, the relatively large separation between the stars allows a good agreement of the analytical results with those obtained numerically. The direct numerical investigations are done through the dynamical mapping of the regions of habitability of both stars in the α Centauri system.

The physical and orbital parameters of the α Centauri binary used in this paper were taken from Pourbaix et al. (2002). They are the masses of the components A and B, $m_A = 1.105 \pm 0.0070 M_\odot$ and $m_B = 0.934 \pm 0.0061 M_\odot$, respectively, and the eccentricity $e = 0.518 \pm 0.0013$ and the semimajor axis $a = 17.57 \pm 0.022$ arcsec (or $a = 23.4 \pm 0.03$ au, if the parallax of 746.8 ± 1.2 mas is adopted) of the relative orbit.

This paper is structured as in the following. In the next section, we study the short-term stability of the system, introducing a stability criterion and applying it to both the planar and 3D cases for planets on S-type orbits. In Section 3, we study the long-term stability, applying the semi-analytical 3D model and comparing the results to those obtained through dynamical mapping. In Section 4, we investigate whether the planets remain inside the HZ around the central star, regardless of large amplitudes of short-term oscillations provoked by the stellar companion. Finally, the summary is given in Section 5.

2 SHORT-TERM DYNAMICAL STABILITY

In this section, we introduce the stability criterion for S-type planetary orbits in binary star systems based on the concept of the Hill stability (Marchal & Bozis 1982; Gladman 1993, among others) and apply it to both the planar and 3D motions of the fictitious planets in the α Centauri system.

2.1 Planar model

Our approach is based on the classical solution of the restricted three-body problem and, in particular, on the zero-velocity surface method. Zero-velocity surfaces are levels of the $S(\mathbf{r})$ -function defined by the position of the planet with respect to the two stars (Marchal & Bozis 1982). The position vectors are defined with respect to the centre of mass of the system in the non-inertial rotating reference frame, in which the two stars always lie along the x -axis.

Let us consider a system composed by two stars, 1 and 2, and a planet p . The $S(\mathbf{r})$ -function, also known as Jacobi integral or relative energy, can be written as

$$S(\mathbf{r}_p) = \sum_i \frac{m_i}{M} \left[\frac{(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i)^2}{d^2} + \frac{2d}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i|} \right], \quad (1)$$

where m_i and \mathbf{r}_i ($i = 1, 2$) are the stellar masses and the position vectors and \mathbf{r}_p is the position vector of the planet; M is the total mass of the system and $d = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Fig. 1 shows the positions of the stars m_1 and m_2 separated by the distance d . In the rotating frame, the function $S(\mathbf{r}_p)$ allows five equilibrium solutions (three colinear and two triangular Lagrangian points), all located in the plane of the motion of the stars, which will be chosen as a reference plane. For our purpose, the co-linear solutions, and, particularly, L_1 solution, are of special interest. These solutions are located on the x -axis and their coordinates can be obtained searching for singular points on the surface (equation 1), where the vectors \mathbf{r} are just replaced by scalar x -component of the corresponding body.

It should be noted that the expression (1) was developed in the uniformly rotating reference frame, when two stars move on circular orbits around the baricenter of the system and their mutual distance d is unchanged. To apply it to the case when the stars have elliptic orbits, it is reasonable to adopt a minimal value for d , when the stars are at the pericentre of their relative orbit. In this configuration, the perturbations on the S-like planetary orbit are maximal and possible instabilities may appear.

Fig. 1 shows the projection of one zero-velocity surface on the reference plane (red curve); the surface was calculated using the orbital elements of the α Centauri binary and the minimal distance between the stars. This level holds the Lagrangian solution L_1 , which appears as a singular saddle-like point on the x -axis. The same level intersects the x -axis at two other points; the positions of these points, x_{cr}^i , can be calculated from the condition

$$S(x_{cr}^i) - S(x_{L_1}) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

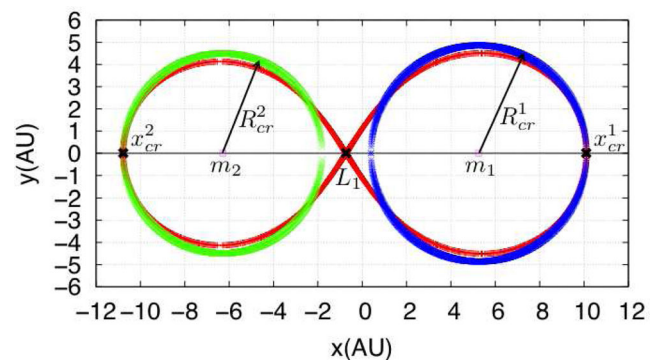


Figure 1. Zero-velocity curve corresponding to the Lagrangian L_1 solution (red curve), obtained for the stars at the pericentre of their relative orbit. The circumferences of stability, of radii R_{cr}^1 around m_1 , and R_{cr}^2 around m_2 , are shown by blue and green curves, respectively.

We assume that these intersections define a sphere of stability around each star. By definition, the sphere of stability is centred on the corresponding star and its radius is given by $R_{\text{cr}}^i = |x_{\text{cr}}^i - x_i|$, where x_{cr}^i is the abscissa of the closest to the star intersection, while the abscissa of the star is x_i . The projections of the spheres of stability on the reference plane are shown in Fig. 1, as a blue circumference centred on the star 1 and a green circumference centred on the star 2.

It is worth noting that equation (2), which is just a polynomial function of x_{cr}^i , can be easily solved numerically. For the sake of simplicity, we present here approximate expressions that allow us to obtain the radii. The expressions are obtained applying the method of least squares. Without loss of generality, we assume that the star 1 is a central star, while the star 2 is a perturber. In the case when the stellar mass ratio $\mu = m_2/m_1$ belongs to the interval $0.1 \leq \mu \leq 1.0$, the radius of the sphere of stability is given as

$$\begin{aligned} R_{\text{cr}}/a \approx & 0.66823 - 0.63740e - 0.74549\mu + 0.45496e\mu \\ & + 1.0492\mu^2 - 0.23179e\mu^2 - 0.87722\mu^3 \\ & + 0.31541\mu^4, \end{aligned} \quad (3)$$

where a and e are the semimajor axis and the eccentricity of the stellar relative orbit, respectively. For the stellar mass ratio $\mu = m_2/m_1$ from the interval $1.0 < \mu \leq 10.0$, the radius of the sphere is given as

$$\begin{aligned} R_{\text{cr}}/a \approx & 0.45265 - 0.41921e - 0.070754\mu \\ & + 0.039617e\mu + 0.010865\mu^2 - 2.1394 \times 10^{-3}e\mu^2 \\ & - 9.3729 \times 10^{-4}\mu^3 + 3.3886 \times 10^{-5}\mu^4. \end{aligned} \quad (4)$$

Both approximations have errors smaller than 10 per cent of the exact solutions, for $0 \leq e \leq 0.9$. The error drops to less than 4 per cent, considering the interval of eccentricities $0 \leq e \leq 0.7$.

Now we introduce our criterion of stability. It states that the stable motion of the planet orbiting one of the stars must satisfy, at any instant, the following condition

$$a_p(1 + e_p) < R_{\text{cr}}, \quad (5)$$

where a_p and e_p are the planetary osculating semimajor axis and eccentricity, with respect to the corresponding central star, and R_{cr} is the radius of the sphere of stability of this star. The interpretation of the expression (5) is simple: since the orbital evolution of the planet is confined to the inside of the circumference of radius R_{cr} , even at the most distant position from the central star (at apocentre), the stability of this motion is guaranteed by the deficit of the relative energy (equation 1) needed to cross the zero-velocity level holding the L_1 solution. It is worth noting that, due to the restricted three-body approximation, the size of the domains of stability is defined by solely the physical and orbital parameters of the stars.

Hereafter, we will refer to our criterion as MACD-criterion. It assures that planetary orbits that exceed the critical distance with respect to the central star (equivalent to the radius of the sphere of stability of this star) will be unstable. However, it is worth stressing that this condition does not guarantee the long-term (of order of the lifetime of the stars) stability of the planet motion. The secular dynamics of the system and its stability will be discussed in Section 3.

2.2 Application to the α Centauri AB system

In this section, we apply the MACD-criterion to analyse the stability of planetary S-type orbits in the α Centauri AB binary.

The first step is to determine the radii of the spheres of stability of the stars A and B. In the case when the star A is a central star and the star B is a perturber, the stellar mass ratio is $\mu = m_B/m_A = 0.849 < 1.0$ and the expression (3) must be used. In the case when the central star is B and the perturbing star is A, $\mu = m_A/m_B = 1.178 > 1.0$ and the expression (4) is applied. As a result, for given values of the semimajor axis and eccentricity of the relative stellar orbit, $a = 23.4$ au and $e = 0.518$, we obtain the critical distances for the stars A and B as $R_{\text{cr}}^A = 4.7$ au and $R_{\text{cr}}^B = 4.4$ au, respectively. The spheres of stability of the stars A and B are shown in Fig. 1, where $m_1 = m_A$ and $m_2 = m_B$.

In the following step, we numerically integrate the system, in order to determine the stability of the planetary orbit defined by the condition (5). In this stage, the choice of the suitable time-length is important: it should be neither too large to raise the computational costs, nor too small to lose information on the proper oscillations in the planetary motion. These oscillations are usually separated in the short-period terms, associated with the Keplerian motions of the planet and the perturbing star, and the long-period secular terms, associated with the precession of the planetary orbit. Eventually, depending on the ratio of the mean motions of the planet and the perturbing star, there are also mean-motion resonance terms whose periods are intermediate lying between the short and the long periods; the resonant conditions will not be studied in this paper.

Although the MACD-criterion is applied to assess the short-term stability of the planet motion, the long-period secular terms are still important. This is due to the fact that, during the precession, the pericentre line of the planetary orbit becomes, at some instant, aligned with the pericentre line of the orbit of the binary. If, at this instant, the perturbing star is at the pericentre of its relative orbit, the short-period perturbations become more intense and instabilities may appear. Thus, the choice of the integration timespan must account for the proper secular period of the planetary motion.

To determine the secular period, we apply the *Dynamical Power Spectrum* method (Michtchenko et al. 2002; Ferraz-Mello et al. 2005). This method is based on the Fourier decomposition of oscillations of the orbital elements and provides an information on the proper frequencies of the system under study and their evolution with changing parameters. In our study, we have chosen the semimajor axis of the planet as a parameter, which varied in the range between 0.5 and 3.5 au. The proper frequencies of the S-type planet orbiting α Centauri A obtained for each value of planetary semimajor axis over 10^5 yr, are presented in Fig. 2. We can clearly observe the presence of the three distinct frequency bands associated with three degrees of freedom of the problem. The first band, located in the high-frequency interval $-2.0 < \log(f) < 0$, is composed of the orbital frequency of the planet, f_p , and its linear combinations with other proper frequencies. According to the third Kepler's law, this frequency decreases with decreasing a_p . The second band is confined to the very close neighbourhood of $\log(f) = -1.9$ and corresponds to the orbital frequency of the binary relative orbit, f_{star} .

The third band is located in the low-frequency interval $-5 < \log(f) < -3$ and corresponds to the secular frequency, $f_{\Delta\varpi}$. This frequency tends to increase with increasing a_p , due to increasing perturbations on the planetary orbit from the stellar companion. The overlap of the bands occurs at $a_p > 2.5$ au, introducing the

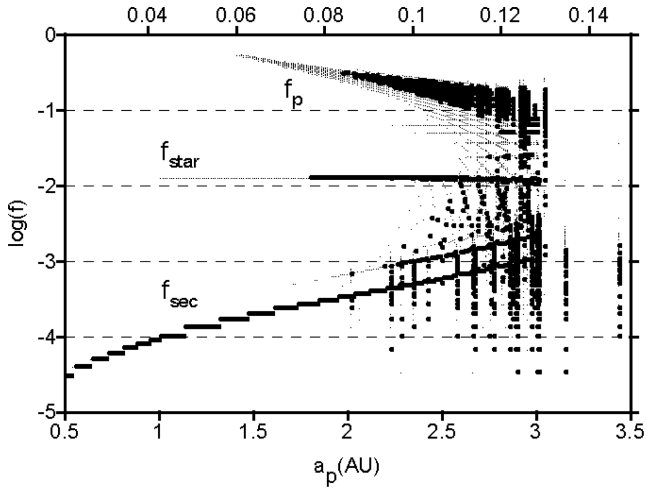


Figure 2. Dynamical power spectrum: the proper oscillation frequencies as functions of the semimajor axis of the planet orbiting the star α Centauri A, in logarithmic scale. The top axis is the planetary semimajor axis in unit of the semimajor axis of the binary relative orbit. The frequency unit is 1 yr^{-1} .

long-term instabilities in the planetary motion. The dense vertical lines visible already at $a_p > 2.0 \text{ au}$ in Fig. 2, are associated with the mean-motion resonances in this region. Finally, for $a_p > 3.0 \text{ au}$, mostly all orbits are disrupted during 10^5 yr .

From Fig. 2, we obtain that the secular period of the planet in the α Centauri system varies approximately from 10^3 up to 10^4 yr . Assuming the integration timespan within this range, we can now numerically integrate the planetary path, in order to verify the stability of the system defined by the condition (5).

The quality of the prediction obtained with the MACD-criterion can be verified by constructing dynamical maps around each star of the α Centauri binary. For this, we use a grid of 384×100 initial conditions on the (a_p, e_p) representative plane and a terrestrial planet of mass $m_p = 5 \times 10^{-5} M_\odot$. Without loss of generality, we fix the initial values of the mean longitudes at $\lambda_A = \lambda_B = 0^\circ$ and of the longitudes of pericentre at $\Delta\varpi = \varpi_{A,B} - \varpi_p = 0^\circ$ and 180° . Each initial condition is numerically integrated using two different timespans: one is equal to 10^3 yr (~ 12.5 orbital periods of the binary) and the second is equal to 10^4 yr (~ 125 orbital periods of the binary), which cover, respectively, ~ 1 and ~ 10 secular periods at $a_p \approx 3 \text{ au}$.

The solutions obtained are then analysed applying the MACD-criterion, in order to calculate the maximal apocentric distances that the planet reaches over the assumed timespan. The values obtained are presented using the grey-scale code in Fig. 3, where the domains of the strongly unstable motion characterized by collisions and escape of the planet are dashed. On the planes, we also plot, by the red curves, the levels whose values correspond to the radii of the spheres of stability, obtained using equations (3) and (4) as 4.7 au , for the star A, and 4.4 au , for the star B.

As expected, the apocentric distances increase with the increasing planetary semimajor axis and decay with the increasing eccentricity. In the domains of the regular motion, the levels are smooth functions of the orbital elements of the planet. This behaviour is changed when the initial conditions approach the domains of the unstable motion, whose boundaries are defined, according to our MACD-criterion, by the critical distances shown by the red curves in Fig. 3. In this case, the critical levels show erratic behaviour, characteristic of

chaotic orbits. It is worth noting the good agreement between the positions of the critical levels (red curves) and the boundaries of the domains of instabilities provided by purely numerical simulations. This confirms the quality of our criterion predictions. Moreover, the comparison of the topology of the dynamical maps obtained over 1 secular period of the planets (top row in Fig. 3) and those obtained over 10 secular periods (bottom row), shows no significant differences. This means that the time-length of 1 secular period is a good choice for the application of the MACD-criterion.

2.3 Comparison with the Holman & Wiegert (1999) criterion

A similar criterion was proposed in Holman & Wiegert (1999): it states that, for planetary motion around one of the stars to be stable, the initial value of the semimajor axis of the planet must obey a relationship $a_p < F_{\text{cr}}(a, e, \mu)$, where F_{cr} is a function of the physical and orbital characteristics of the stars. By means of a series of numerical integrations, the authors have found an empirical expression for F_{cr} as

$$F_{\text{cr}}(a, e)/a = (0.464 \pm 0.006) + (-0.380 \pm 0.010)\mu \\ + (-0.631 \pm 0.034)e + (0.586 \pm 0.061)\mu e \\ + (0.150 \pm 0.041)e^2 + (-0.198 \pm 0.047)\mu e^2, \quad (6)$$

where $\mu = m_B/(m_A + m_B)$ and a and e are the semimajor axis and the eccentricity of the stellar relative orbit, respectively. The approximation is valid in the range $0.1 \leq \mu \leq 0.9$, for $0.0 \leq e \leq 0.8$, with the error smaller than 11 per cent (as claimed by the authors). In their approach, the authors assumed that the planet orbits were initially circular, which means that the results obtained using equation (6) are valid only along the y -axis in Fig. 3. For purpose of comparison with our criterion predictions, we re-write the Holman & Wiegert (1999) criterion as $a_p(1 + e_p) < F_{\text{cr}}$ and apply it to the α Centauri binary.

The result is shown by the blue curves in Fig. 3. The correlation with the MACD-criterion is notable, but it is clear that the Holman & Wiegert (1999) criterion overestimates the instabilities in the planet motion, in this way, excluding from the study a significant portion of still stable configurations. It is worth noting that the Holman & Wiegert (1999) criterion (6), also as other empirical criteria (e.g. Rabl & Dvorak 1988; Pilat-Lohinger & Dvorak 2002; Fatuzzo et al. 2006, among others), introduces a concept of *grey area* in the parameter space of the problem, in which the state of a system changes from stability to instability (Haghighipour 2010, Chapter 11). The grey area is defined as the confidence interval which measures the reliability of the estimation obtained from the fitting procedure. Applying the formula (6) to the α Centauri system and using the traditional law of error propagation (Ku 1966), we obtain the confidence intervals for the stars A and B as $F_{\text{cr}}^A = 2.80 \pm 0.64 \text{ au}$ and $F_{\text{cr}}^B = 2.54 \pm 0.69 \text{ au}$, respectively. The borders of the corresponding grey areas on the (e_p, a_p) -plans are shown by the cyan-coloured curves in Fig. 3. However, it must be emphasized here that the grey area idea does not apply to the MACD-criterion (5), which is found on the basic concept of the Hill stability and cannot be interpreted in statistical terms. Due to short time intervals of numerical integrations, the method can still originate effects analogous to ‘grey areas’ (seen as red-coloured zones in Fig. 3), but these zones rapidly decrease with increasing integration timespans.

Also, it is worth noting here that the purposes of both methods are different. The purpose of the Holman & Wiegert (1999) criterion

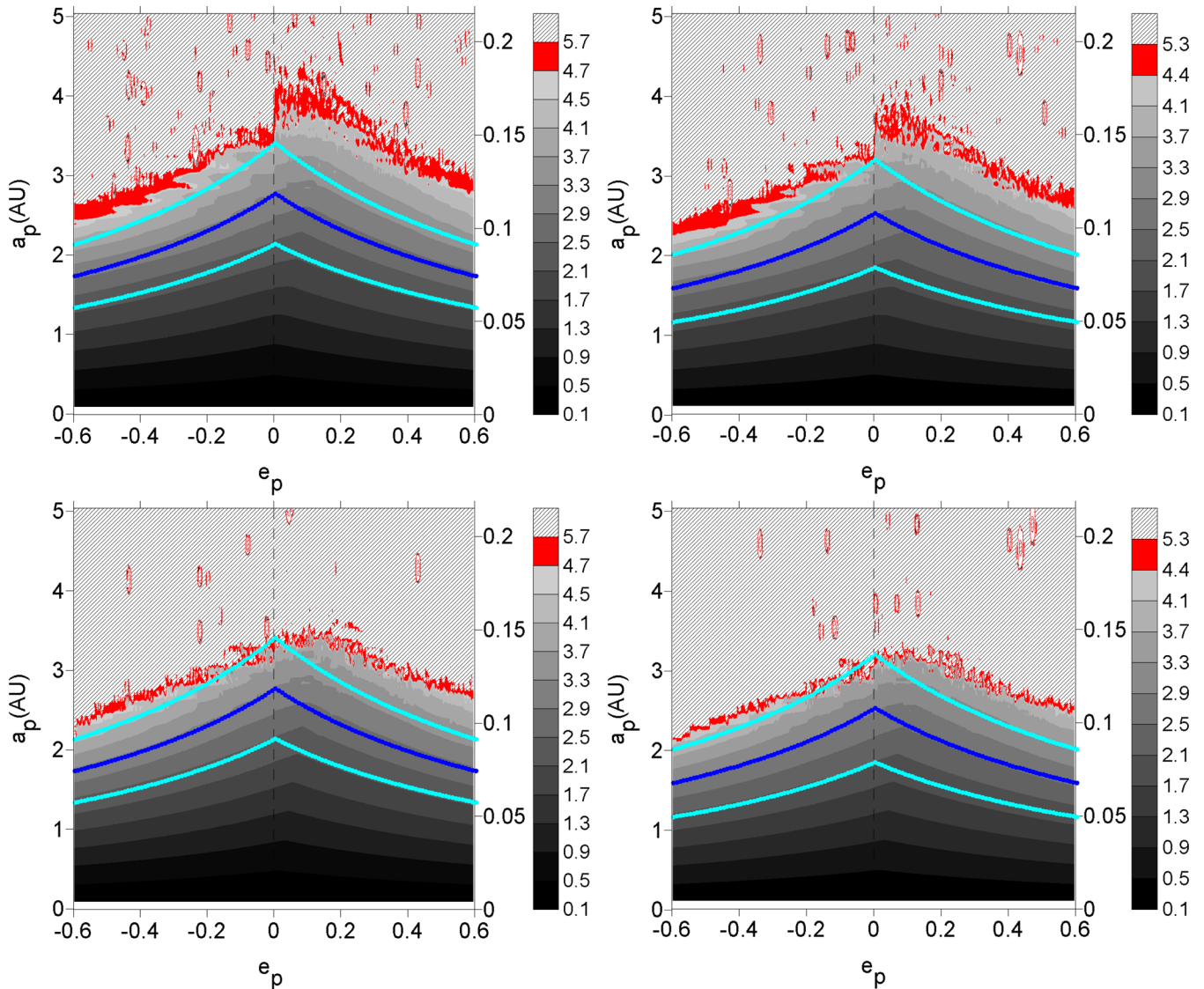


Figure 3. Dynamic maps around α Centauri A (left-hand panels) and B (right-hand panels): short-term stability in the planar case. The grey-scale code represents the maximal (apocentric) distance of the planet from the central star during 10^3 (top panels) and 10^4 yr (bottom panels) of evolution; the bars relate the grey tones to the values of the apocentric distances (in astronomical units). The positive and negative values along the x -axis indicate that the initial values of $\Delta\varpi$ are 0° or 180° , respectively. The hatched regions correspond to the ejected from the system planets. The red curves correspond to levels of the radii of the stability spheres ($R_{\text{cr}}^A = 4.7$ au and $R_{\text{cr}}^B = 4.4$ au). The blue curves show the critical distances given by the Holman & Wiegert (1999) criterion of stability, while the cyan curves show the boundaries of the corresponding grey areas (see the text for details).

is a prompt estimation of the stability of one initially circular configuration of a putative planet in the binary, given the distance of the planet to the central star. Notwithstanding the facility in implementation (it does not require numerical integrations), this method still suffers on some limitations. One of these is due to assumption that the planet starts on zero-eccentricity orbit. Due to very strong gravitational perturbations produced by the stellar companion on the planetary motion, this assumption can scarcely be correct.

Another limitation is related to the detection of the planets in binary systems and consequent determination of their orbits through the best-fitting procedures. It seems unlikely that the sets of the osculating orbital elements of the planets provided will be compatible with the circular orbits needed in applying the Holman & Wiegert (1999) criterion. Our MACD-criterion can overcome this limitation, since it is based on the implementation of numerical integrations which use the sets of the orbital parameters of the planets as input.

2.4 Extension to the 3D

The MACD-criterion can be easily extended to the inclined reference plane orbits. Indeed, since the maximum distance of the planet from the central star in space is still its apocentric distance, we can apply the same condition of stability $a_p(1 + e_p) < R_{\text{cr}}$, where R_{cr} is a radius of the sphere of stability given by equations (3), for the star A, and (equation 4), for the star B.

To test the stability of the inclined planetary orbits, we construct the dynamical maps, each with a 400×400 grid of initial conditions, on the (a_p, I_p) representative planes, with the planetary eccentricity fixed at $e_p = 0.05$, again with the planetary mass fixed at $m_p = 5 \times 10^{-5} M_\odot$. Our previous study (Michtchenko et al. 2006) pointed out that the initial angular conditions of the secular angle $\Delta\varpi$ and the argument of pericentre $2\omega_p$ can be fixed at either 0° or 180° , without loss of generality. The maps obtained are shown in Fig. 4.

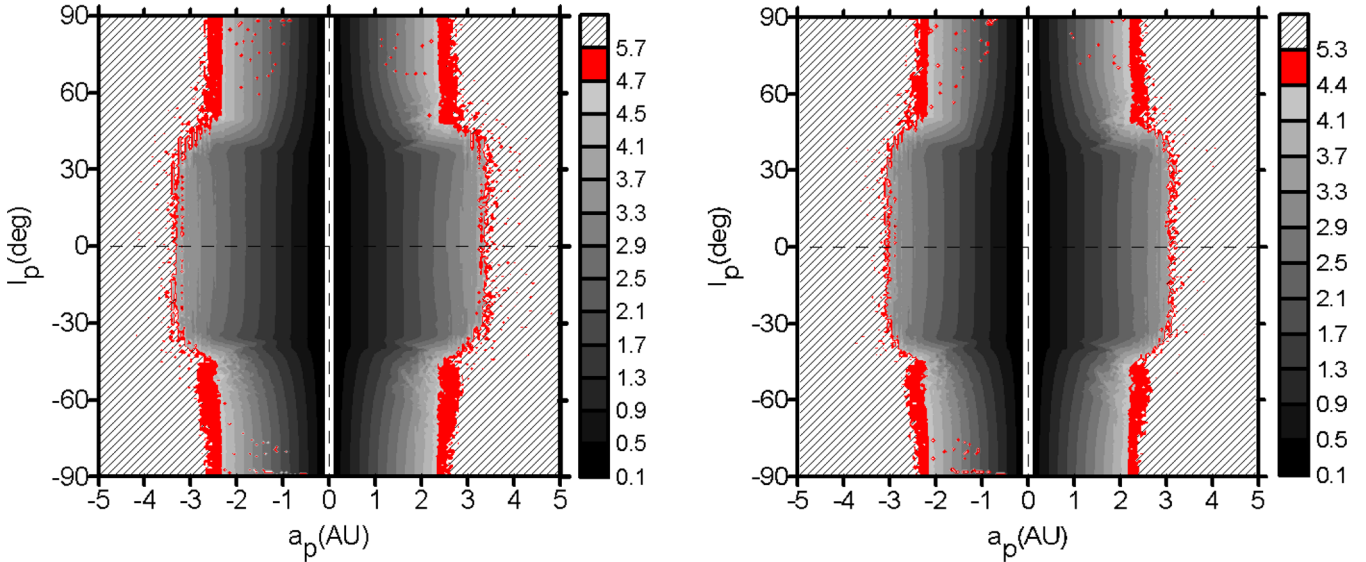


Figure 4. Same as in Fig. 3, except in the 3D case, with a_p and I_p being the semimajor axis and the inclination of the planet and the initial eccentricity e_p fixed at 0.05. The positive and negative values on $x(y)$ -axis indicate that the initial $\Delta\varpi$ ($2\omega_p$) are 0° or 180° , respectively.

We can see that the boundaries of the stable motion are well defined by the MACD-criterion (red levels), when the apocentric distances approach the critical values $R_{cr}^A = 4.7$ au and $R_{cr}^B = 4.4$ au. The maximum values of the planetary semimajor axis, for which the motions still remain stable, are ≈ 3.5 and ≈ 3 au, for the stars A and B, respectively. For smaller values of the semimajor axis, there are zones of regular motion for any values of the planetary inclination. The stable motion is robust at inclinations below $\sim 40^\circ$. Above this inclination, we can detect sporadic chaotic solutions (red dots) deeply inside the region of the stable motion. This is an indicator that the analysis of the short-term stability is not sufficient in this case and must be extended to a longer length-times. This will be done in the next section, where we will show that the instabilities at $I_p > 40^\circ$ are originated by the Lidov–Kozai secular resonance.

The method described in this section provides a global view of the short-term stability of the system. It is conceptually simple, fast and easily implementable. It allows us to detect promptly the domains of regular motion, avoiding, in this way, long-term integrations and analysis of unstable orbits. However, due to the analysis of orbital behaviour of the planets over short timespans, this approach provides no information on the long-term (of the order of the lifetime of the stars) stability of the system. The specific study on the stability of the planetary motion in the binary over the age of the system will be done in the next section.

3 LONG-TERM DYNAMICAL STABILITY

Under a ‘long-term’ stability, we mean the stability of the system over the lifetime of the central star. One way to assess the long-term stability of the planet motion is direct N -body numerical simulations, which, depending on the stellar types and ages, must be done over several billions of years. This approach suffers from several limitations and the most serious from these is extremely high computing costs.

An alternative is the dynamical mapping of the domain under study. This approach is also founded on purely numerical integrations, but the time intervals of the simulations are much

shorter in this case, and, therefore, we are allowed to explore a large set of initial conditions. Analysing the topological structure of dynamical maps, we can detect the mechanisms which could induce long-term instabilities in the planetary motion, and determine domains of their action.

The topology analysis is based on the analytical modelling of the general three-body problem briefly described in the following (for more details, see Michtchenko et al. 2006). In the Jacobian reference, the Hamiltonian which describes the motion of the planet (m_p) around one of the stars (m_A), with the second star (m_B) as the disturber, is written as (Brouwer & Clemence 1961)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Kep}} + \mathcal{H}_{\text{Pert}}, \quad (7)$$

where

$$\mathcal{H}_{\text{Kep}} = -\frac{G m_p m_A}{2 a_p} - \frac{G m_B (m_A + m_p)}{2 a_B}, \quad (8)$$

$$\mathcal{H}_{\text{Pert}} = -\frac{G m_p m_B}{r_{pB}} - G m_A m_B \left(\frac{1}{r_{AB}} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (9)$$

and a_i is the osculating semimajor axis of i th orbit, \vec{r}_B is the position vector of m_B relative to the centre of mass of m_A and m_p and \vec{r}_{iB} is the distance between m_i and m_B ; G is the gravitational constant. Hereafter, the indices $i = A, p, B$ stand for the central star, planet and perturbing star orbits, respectively.

Associated with the Keplerian part of the Hamiltonian, a set of mass-weighted Delaunay’s elliptic variables is introduced as

$$\begin{aligned} M_i &= \text{mean anomaly}, & L_i &= m'_i \sqrt{\mu_i a_i}, \\ \omega_i &= \text{argument of pericentre}, & G_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2}, \\ \Omega_i &= \text{longitude of node}, & H_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2} \cos I_i, \end{aligned} \quad (10)$$

where e_i and I_i are the eccentricities and inclinations, respectively; $\mu_p = G(m_A + m_p)$, $\mu_B = G(m_A + m_p + m_B)$, $m'_p = m_p m_A / (m_A + m_p)$ and $m'_B = m_B (m_A + m_p) / (m_A + m_p + m_B)$.

We assume that the planet and the perturbing star are not involved in any mean-motion resonance of low order. Thus, we can perform numerically the averaging of the Hamiltonian (7) with respect to

the mean anomalies of the planet and the disturber (Michtchenko & Malhotra 2004). The secular Hamiltonian is then defined by

$$\overline{\mathcal{H}}_s = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R(L_i, G_i, H_i, M_i, \omega_i, \Omega_i) dM_p dM_B, \quad (11)$$

where the Keplerian part is constant and therefore needs not be considered.

3.1 Planar case

In this section, we construct the dynamical maps of coplanar motions, using a grid of 392×100 osculating initial conditions on the (e_p, a_p) -plane and fixing the initial angular variables at $M_p = M_{A,B} = 0$ and $\Delta\varpi = 0$. Each initial condition was integrated over 10^4 yr (~ 125 orbital periods of the binary or ~ 10 secular periods, see Fig. 2), with the planetary mass fixed at $m_p = 5 \times 10^{-5} M_\odot$. The solution obtained was Fourier analysed, in order to calculate the spectral number corresponding to the used initial condition. The spectral number defines the degree of chaos in the planetary motion: its small values correspond to regular motions, while its larger values correspond to unstable motions (Michtchenko et al. 2002; Ferraz-Mello et al. 2005).

The results are shown in Fig. 5. The grey colour scale is used to plot the spectral number: light regions correspond to small numbers and regular motions, while the increasingly dark tones indicate large numbers and unstable orbits. The hatched patterns correspond to the domains where the MAcD-criterion of stability is not satisfied over the chosen integration timespan (see Section 2.1). The blue curves show the families of the stable stationary solutions of the secular problem given by the Hamiltonian model (11), frequently referred to as Mode I of motion (Michtchenko & Ferraz-Mello

2001); these solutions are also known as forced eccentricities of the secular problem (Heppenheimer 1978; Giuppone et al. 2011). In the planar case, the secular problem is reduced to one degree of freedom and the secular solutions are obtained by plotting the energy and angular momentum levels on the representative plane (for a detailed description, see Michtchenko & Malhotra 2004). The secular planetary motion projected on the (e_p, a_p) -plane is an oscillation around the corresponding equilibrium belonging to the blue curve. The closer the initial condition is to the Mode I solution, the smaller is the amplitude of the oscillation of its eccentricity. This fact explains the very stable, nearly harmonic, dynamics of the planet in the vicinity of the blue curve (light grey region), even at larger values of a_p .

However, it is worth stressing that the initial conditions used in construction of the dynamical maps are osculating orbital elements; thus, the comparison of the results of numerical integrations to those provided by the secular model (11) should be done carefully. Moreover, the mass of the disturbing body is comparable to the mass of the central star; this fact reduces the domain of the application of the first order in masses secular model (11). We plot in Fig. 5, by the red curves, the families of the secular stationary solutions obtained through the purely numerical filtering procedure, as described in Giuppone et al. (2011). The deviation of the analytically obtained family from that obtained numerically (with no restriction on the perturbing mass) clearly occurs at larger semimajor axes, when the perturbations due to the stellar companion become stronger. Since, in this region, the planetary motion is stable only in the very narrow vicinity of the Mode I, the correct determination of the family is essential in this case.

The two families match each other at small semimajor axes of the planet, up to ~ 1.5 au (or $a_p/a_B < 0.06$), for small eccentricities. The dynamical maps in Fig. 5 show that the planetary dynamics in this

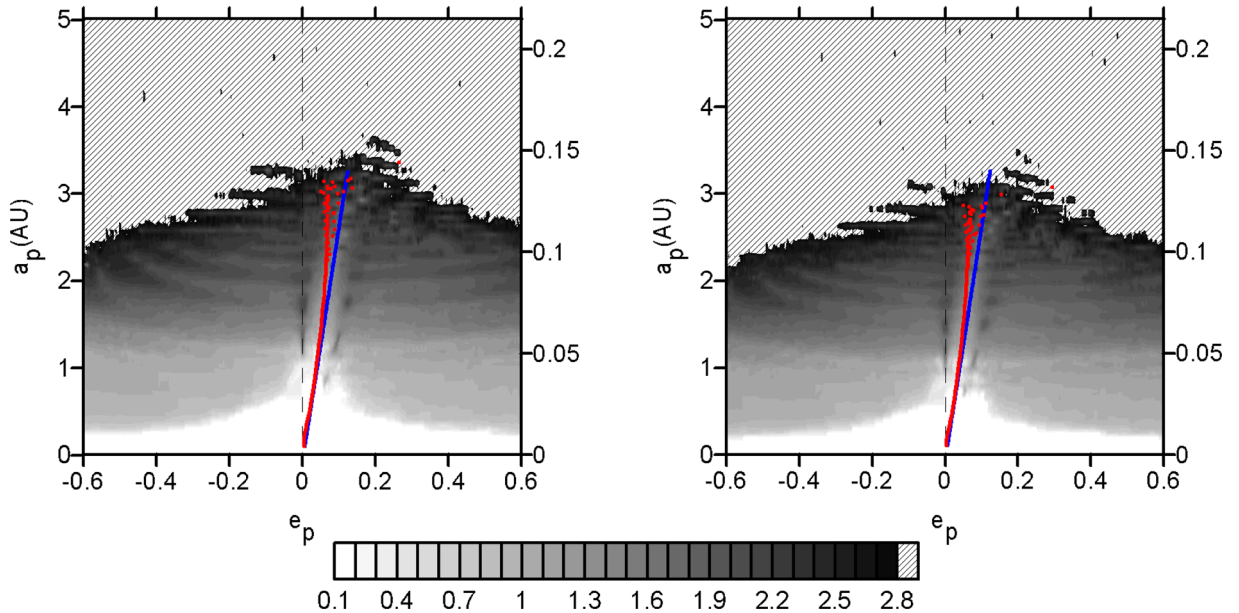


Figure 5. Dynamic maps around α Centauri A (left-hand panel) and B (right-hand panel): long-term stability in the planar case. The grey-scale code represents the spectral number (stability indicator) in logarithmic scale: the lighter tones correspond to regular motion, while the darker tones correspond to increasingly chaotic motion. The positive and negative values along the x -axis indicate that the initial values of $\Delta\varpi$ are 0° or 180° , respectively. The hatched patterns represent ejected or collided orbits. The blue curves are families of stationary solutions provided by the secular semi-analytical Hamiltonian (11), while the red curves are families obtained through numerical averaging (Giuppone et al. 2011). The right-hand axes on both planes are the planetary semimajor axis in unit of the semimajor axis of the binary (a_p/a_B).

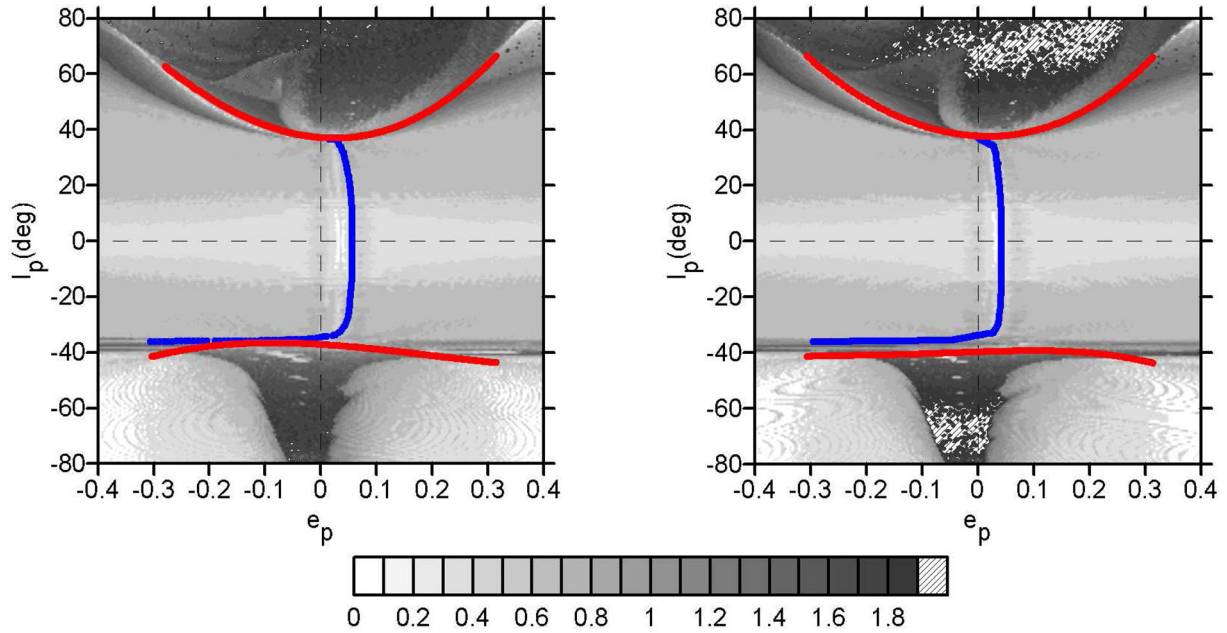


Figure 6. Same as in Fig. 5, except the long-term stability in the 3D case, with e_p and I_p being the eccentricity and the inclination of the planet and the initial semimajor axis fixed at 1.0 au. The positive and negative values on $x(y)$ -axis indicate that the initial $\Delta\varpi$ ($2\omega_p$) are 0° or 180° , respectively. The blue and red curves represent the stable and unstable periodic solutions of the Hamiltonian (11), respectively.

case is very regular (white colour), even at very high eccentricities. It is worth noting that the HZs around the stars are located close to these regions (see Section 4).

When the semimajor axis of the planetary orbit increases, the perturbations due to the stellar companion become stronger and the planetary motion increasingly non-harmonic (except in the vicinity of the Mode I of motion). The dark tones on the dynamical maps in Fig. 5 confirm this fact. Several high-order mean-motion resonances, from 13/1 to up 20/1, are dense in these regions; they appear as thin horizontal strips on the dynamical maps. The phenomenon can be also observed in the power dynamical spectrum in Fig. 2, where the resonant initial conditions appear as vertically scattered dots, at $a_p > 2$ au. Since these resonances can destabilize the planetary motion, the long-living planets are not expected to be found in this region.

Finally, at relative distances above 0.14 (in units of the semimajor of the binary orbit), the planetary motion is strongly chaotic and the planets are ejected from the binary (hatched regions). The boundary of these domains match the boundaries of short-term instabilities showed in Fig. 3.

It is worth to emphasize the features of the planet motion near the Mode I stationary solutions. Being robust and stable, even at large distances from the central star, this is a favourite location of several known planetary extrasolar systems (e.g. ν Andromedae c-d planet pair). Michtchenko & Rodríguez (2011) shows that, during migration, the planets are guided towards the stationary configurations, independently on the specific migration mechanism. Moreover, Giuppone et al. (2011) shows that the planet formation is preferential on the orbital configurations corresponding to the Mode I stationary solutions.

3.2 Three-dimensional case

We construct the dynamical maps on the plane (e_p, I_p) of the initial osculating values of the planetary eccentricity and the inclination,

with a terrestrial planet of mass $m_p = 5 \times 10^{-5} M_\odot$. The spectral analysis method was applied on the 201×201 -grid, with the spacings $\Delta e_p = 0.004$ and $\Delta I_p = 0.8$. The initial semimajor axis of the planet was fixed at $a_p = 1.0$ au; for this value, the planet is distant from the perturbing star and the first-order Hamiltonian model (11) can be used to investigate the topology of the dynamical maps.

The maps are shown in Fig. 6. The positive and negative values on the $x(y)$ -axis stand for the initial values of the angle $\Delta\varpi_p(2\omega_p)$ of 0° and 180° , respectively (see Michtchenko et al. 2006 for more details). The power dynamical spectrum in Fig. 2 allows us to estimate the secular period of the planet at $a_p = 1$ au as $\sim 10^4$ yr. This means that an appropriate timespan for simulations of the secular dynamics must be of the order of at least 10^5 yr. The chosen timespan of integration for our dynamical map was 500 000 yr (~ 6000 orbital periods of the binary), for each initial condition on the grid; the orbits disrupted during this time are shown by the hatched pattern in Fig. 6. The surviving orbits are shown by the grey-scale code, from light tones, for nearly periodic orbits, to darker tones, for increasingly unstable orbits.

The two colour curves represent the periodic solutions obtained through the secular model (11). The blue curves are location the of the stable periodic solutions, while the red curves are locations of the unstable solution. The long-living motions are expected to be found near the blue curves and far from the red curves. Indeed, the analysis of the structure of the dynamical maps of the representative planes reveals that, for low inclinations $I_p < 40^\circ$, the maps are dominated by a light grey background, which means that the low-inclination secular dynamics is regular.

In contrast, the vicinity of the red curves is dominated by the darker tones, indicating unstable motions. The instability is related to the existence of separatrices between different regimes of motion. Their domains, at high inclinations, show complex dynamical behaviour, with the presence of several regimes of resonant motion (the detailed description of these regimes of secular motion can be found in Michtchenko et al. 2006). The dominating behaviour is

the e_p - I_p coupling, or Lidov–Kozai resonance, which destabilizes the nearly circular orbits at $I_p > 40^\circ$. For higher values of eccentricity, the planetary dynamics is characterized by the coupled large variation of the eccentricity and inclination and the libration of the angle ω_p around $\pm 90^\circ$. The domains of the Lidov–Kozai resonance are located on the lower half-planes in Fig. 6; the behaviour of the system is very regular in these regions.

The $\Delta\varpi$ secular resonance also exists in the high-inclination regions; its domains are thin white strips along the red curves. In this case, the secular angle $\Delta\varpi$ librates either around 0° or 180° .

It is worth emphasizing that we have detected a large portion of the chaotic orbits (black tones on the graphs in Fig. 6), but only a small quantity of these orbits are actually ejected from the system (dashed regions). This is because the chaotic processes are slow in the secular system and the timespan of 500 000 yr is not sufficient for detecting the planetary escapes. However, the escapes are imminent and, as a consequence, it will be impossible to detect the planets inside these regions of high instabilities.

4 DYNAMICAL EVOLUTION INSIDE THE HZ

Regardless of the robust long-term stability of the planetary motion in the large domains around the stars of α Centauri, the planetary evolution inside the HZs should be analysed in order to verify

Table 1. The inner and outer boundaries of the HZs (in au) and the HZs width in the α Centauri AB binary, calculated in Forgan (2012), Eggl et al. (2013) and Kaltenegger & Haghighipour (2013, hereafter KH13), conservative and optimistic definitions.

Authors	Star	Inner HZ	Outer HZ	Width
Eggl et al. (2013)	A	1.12	1.81	0.71
KH13 conservative	A	1.20	2.07	0.87
KH13 optimistic	A	0.92	2.18	1.30
Forgan (2012)	B	0.65	0.90	0.25
Eggl et al. (2013)	B	0.65	1.13	0.48
KH13 conservative	B	0.71	1.26	0.55
KH13 optimistic	B	0.54	1.32	0.78

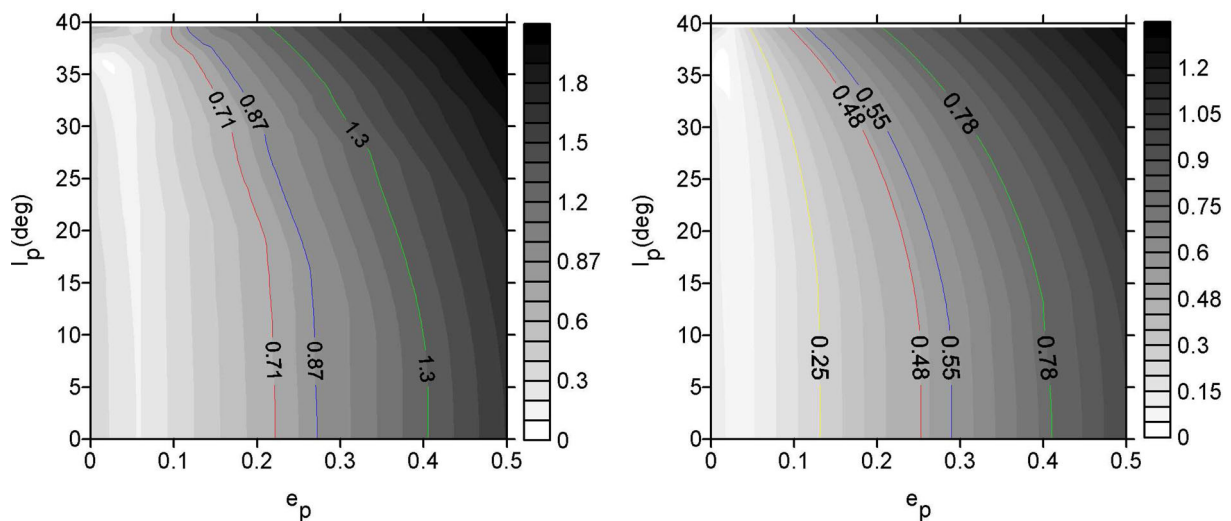


Figure 7. Maps of the orbital distances of the planets around the star α Centauri A (left) and the star B (right). The grey-scale represents levels of the distance amplitude oscillation of the planet for different initial values of eccentricity and inclinations. The initial semimajor axis is fixed at $a_p = 1.6$ au, for α Centauri A, and $a_p = 0.9$ au, for α Centauri B. The yellow, red, blue and green curves represent the width of the HZ given by Forgan (2012), Eggl et al. (2013) and Kaltenegger & Haghighipour (2013), narrow and empirical.

whether the planet motion is confined inside the HZ. The concept of the HZ itself, even when introduced for single stars (e.g. Kasting, Whitmire & Reynolds 1993), is very complex. In binary stars, the definition of the HZ is further complicated due to several additional aspects. One is the combined radiation of both stellar components on the terrestrial planet studied recently in several papers (e.g. Forgan 2012; Kaltenegger & Haghighipour 2013).

Another aspect concerns the large oscillations of the orbital elements of the planet, that could affect the conditions of habitability of the planet or even drive the planet far from the HZ. This behaviour was studied in Eggl et al. (2012, 2013), where the authors considered the averaged effects produced by the secondary star on the variation of the eccentricity of the planet, yet in the case of coplanar and initially circular planetary orbits. In this work, we explore the conditions for which the planets remain inside the HZ, in the case of eccentric and inclined orbits. For this, we use the different definitions of the HZs around the α Centauri stars given in the papers Forgan (2012), Eggl et al. (2013) and KH13 (see Table 1). It should be emphasized that these definitions are not equally weighted. In fact, the KH13 definition can be considered more realistic because it takes into account the presence of an atmosphere on a terrestrial or super-Earth planet. However, the detailed discussion on the HZ calculations is out of the scope of this paper.

For each definition from Table 1, we calculate the maximum and minimum distances of the planet from the central star, for different initial eccentricities and inclinations of the planet orbit and the initial semimajor axis fixed at $a_p = 1.6$ au, around α Centauri A, and $a_p = 0.9$ au, around α Centauri B; these values roughly correspond to the averaged positions of all HZs defined in Table 1.

The numerical test is done using numerical integrations of planetary orbits over 10 000 yr. The values of the maximal and minimal distances obtained are compared to the width of the HZs, in order to infer whether the planet remain within the HZ boundaries over 10 000 yr (~ 125 orbital periods of the binary).

The difference between the maximal and minimal distances of the planet from the central star is plotted on the (e_p, I_p) -planes in Fig. 7, using the grey-scale code, the difference is smaller in the light regions and larger in the dark regions. The regions in white

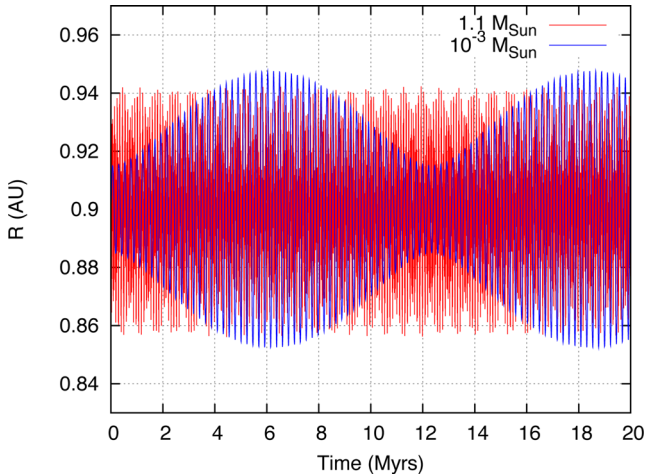


Figure 8. Time evolution of the planetary distance to α Centauri B when the perturber is α Centauri A (red) and a Jupiter-mass planet (blue).

tone correspond to the minimal possible deviations of the planet from the centre of the HZ. The simple comparison with the graphs in Fig. 6 allows us to conclude that these regions are associated with the Mode I secular solutions whose location is given by blue curves in Fig. 6.

An interesting feature of this analysis is that initially circular orbits exhibit significant deviations from the centre of the HZ, that, for high inclinations, could result in the planets spending some time outside the HZs.

As discussed in Eggl et al. (2012), the planet remaining inside the HZ during its evolution is not the only requirement for the planet to host life, and it is neither an excluding factor. Even if the planet spends some time of its orbit outside the HZ, as long as the mean radiation received is still within the HZ limits, the planet could be considered habitable, although in a more restrict way. Nevertheless, it is expected that orbits with smaller oscillations are more likely able to sustain some kind of life.

It is also interesting to compare the orbital evolution of a terrestrial S-type planet in α Centauri AB with the evolution of the terrestrial planet in a planetary system, with a Jupiter-sized planet. The comparison is done using the configurations defined by the orbital parameters of α Centauri AB, except, in the case of the planetary system, the binary companion is replaced by a Jupiter-mass planet. The results are shown in Fig. 8, where the variation of the orbital distance of the planet revolving around α Centauri B is plotted by the red curve, in the case when the perturber is the star α Centauri A ($1.1 M_{\odot}$), and by the black curve, when the perturber is a hypothetical Jupiter-mass planet ($10^{-3} M_{\odot}$). In both simulations, the same orbital and physical parameters of the planet and perturbing body were used, except the mass of the perturber. The initial semimajor axis and the eccentricity of the planet were fixed at $a_p = 0.9$ au (inside the HZ of the star) and $e_p = 0.016$, respectively; note that this value of the eccentricity corresponds to the actual eccentricity of Earth. The initial orbital elements of the perturber were the same of the relative orbit of the α Centauri binary.

We can observe in Fig. 8 that the amplitudes of the oscillation of the orbital distance of the planet are of the same order of magnitude, despite that the perturbing masses differ in order 3. This result is consistent with the theoretical predictions of the restricted three-body models (e.g. Heppenheimer 1978) which state that the forced eccentricity of the test particle is independent on the masses of the large bodies (at least, in first order in masses). Therefore, the orbital

distance oscillation of the planet in the binary system is similar to that of a terrestrial planet perturbed by a giant planet. The main difference is the time-scale of the oscillation: it is of the order of 10^4 yr, in the binary system, and of the order of 10^7 yr, in the planetary system. However, this difference seems to be not important in the context of the Continuously HZ.

In addition, we have obtained that, in the case of the real Earth–Jupiter system, the forced eccentricity of the Earth’s orbit is equal to 0.016; in the case of a putative terrestrial planet orbiting α Centauri B, the forced eccentricity of the planetary orbit is equal to 0.032. Calculating the variation of the orbital distances in both cases, we have found that its amplitude is ~ 0.032 au, for the Earth’s orbit, and ~ 0.07 au, for the planet located near the Mode I stationary solution of the HZ of α Centauri B, that is, both variations are of same order of amplitude. This result brings positive perspectives of finding habitable planets in binary star systems.

5 SUMMARY

In this work, we present a methodology to analyse the planetary dynamics of S-type orbits in binary star systems. We develop a short-term stability criterion (MACD-criterion), which is based on the Hill concept of stability. Since this method does not require any kind of expansion and averaging of the disturbing function, there are no constraints on neither the mass of the disturbing body nor the eccentricity/inclination of its orbit. We apply our approach to the α Centauri binary system with a hypothetical Earth-like planet, orbiting one of the stars (S-type orbit), and show that the purposed criterion provides a global view of the stable and unstable domains in the space of the orbital elements. It is worth emphasizing that our approach is simple, fast and easily implementable. Its main purpose is to detect promptly the domains of regular motion, avoiding, in this way, long-term integrations and analysis of unstable orbits. It also allows us to quickly assess the stability of the best-fitting solutions in the determination of the planetary orbits hosted by binary stars.

The long-term stability of the planetary orbits in the HZs of the α Centauri binary system is studied using the secular Hamiltonian approach. We show that the behaviour of the planets is well described by the first order in masses model. The secular planetary motion is regular, even at high eccentricity domains of the HZs. There are no significant mean-motion resonances that could destabilize the secular dynamics. The stability of the planets is also detected through the 3D-analysis, at low and moderate inclinations of the planetary orbits ($< 40^\circ$). For higher inclinations, the dominating regime of motion is the Lidov–Kozai resonance, which is separated from the purely secular regime of motion through the layers of strongly chaotic motion. Even though there are domains of very stable motion in the Lidov–Kozai resonance, the large excursions of the planetary eccentricities and inclinations seem to be unfavourable for the evolution of life inside the HZs. Beyond the HZ, where high-order mean-motion resonances take place, the first-order model fails. Thus, a second order in masses model, as well as the modelling of the resonant behaviour, would be required to further study of this region.

Analysing the dynamics of the planets evolving inside the HZs of the α Centaury stars, we obtain that the planetary orbits will remain within the boundaries of the HZs, if their eccentricities and inclinations are constrained to values close to the stationary solutions of the secular problem, the Mode I solutions. In this favourable scenario, the amplitude of the orbital distance variations are comparable to the amplitudes of the Earth’s orbit, with the only difference being the time-scales of the variations. The real effects of this on the planetary climate and geological conditions are still poorly known

and it is expected that further interdisciplinary studies could bring to light considerable new information on this issue.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the São Paulo State Science Foundation, FAPESP (grant 2010/01209-2) and the Brazilian National Research Council, CNPq. This work has made use of the facilities of the Computation Center of the University of São Paulo (LCCA-USP) and of the Laboratory of Astroinformatics (IAG/USP, NAT/Unicsul), whose purchase was made possible by the Brazilian agency FAPESP (grant 2009/54006-4) and the INCT-A. The authors are grateful to Dr Haghighipour for suggestions/corrections on this paper.

REFERENCES

- Abt H. A., 1979, *AJ*, 84, 1591
 Black D. C., 1982, *AJ*, 87, 1333
 Boss A. P., 2006, *ApJ*, 641, 1148
 Brouwer D., Clemence G. M., 1961, *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, New York
 Dumusque X. et al., 2012, *Nature*, 491, 207
 Duquennoy A., Mayor M., 1991, *A&A*, 248, 485
 Dvorak R., Froeschle C., Froeschle C., 1986, *BASS*, 18, 842
 Eggl S., Pilat-Lohinger E., Georgakarakos N., Gyergyovits M., Funk B., 2012, *ApJ*, 752, 74
 Eggl S., Pilat-Lohinger E., Funk B., Georgakarakos N., Haghighipour N., 2013, *MNRAS*, 428, 3104
 Everhart E., 1985, in Carusi A., Valsecchi G. B., eds, *Proc. IAU Colloq. 83 (Vol. 115), Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution*. Reidel, Dordrecht, p. 185
 Fatuzzo M., Adams F. C., Gauvin R., Proszkow E. M., 2006, *PASP*, 118, 1510
 Ferraz-Mello S., Michtchenko T. A., Beaugé C., Callegari N., 2005, in Dvorak R., Freistetter F., Kurths J., eds, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 683, *Chaos and Stability in Planetary Systems*. Springer-Verlag, Berlin, p. 219
 Ford E. B., Kozinsky B., Rasio F. A., 2000, *ApJ*, 535, 385
 Forgan D., 2012, *MNRAS*, 422, 1241
 Giuppone C. A., Leiva A. M., Correa-Otto J., Beaugé C., 2011, *A&A*, 530, A103
 Gladman B., 1993, *Icarus*, 106, 247
 Graziani F., Black D. C., 1981, *ApJ*, 251, 337
 Guedes J. M., Rivera E. J., Davis E., Laughlin G., Quintana E. V., Fischer D. A., 2008, *ApJ*, 679, 1582
 Haghighipour N., 2006, *ApJ*, 644, 543
 Haghighipour N. ed., 2010, *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 366, *Planets in Binary Star Systems*. Springer-Verlag, Berlin, p. 332
 Haghighipour N., Raymond S. N., 2007, *ApJ*, 666, 436
 Hatzes A. P., 2013, *ApJ*, 770, 133
 Heppenheimer T. A., 1978, *A&A*, 65, 421
 Hill G. W., 1878, *Am. J. Math.*, 1, 129
 Holman M. J., Wiegert P. A., 1999, *AJ*, 117, 621
 Kallneegger L., Haghighipour N., 2013, *ApJ*, 777, 165 (KH13)
 Kasting J. F., Whitmire D. P., Reynolds R. T., 1993, *Icarus*, 101, 108
 Kervella P., Thévenin F., Ségransan D., Berthomieu G., Lopez B., Morel P., Provost J., 2003, *A&A*, 404, 1087
 Ku H. H., 1966, *J. Res. Natl. Bur. Stand. C*, 70C, 263
 Laskar J., Boué G., 2010, *A&A*, 522, A60
 Marchal C., Bozis G., 1982, *Celest. Mech.*, 26, 311
 Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., 2001, *Icarus*, 149, 357
 Michtchenko T. A., Malhotra R., 2004, *Icarus*, 168, 237
 Michtchenko T. A., Rodríguez A., 2011, *MNRAS*, 415, 2275
 Michtchenko T. A., Lazzaro D., Ferraz-Mello S., Roig F., 2002, *Icarus*, 158, 343
 Michtchenko T. A., Ferraz-Mello S., Beaugé C., 2006, *Icarus*, 181, 555
 Nelson A. F., 2000, *ApJ*, 537, L65
 Pendleton Y. J., Black D. C., 1983, *AJ*, 88, 1415
 Pilat-Lohinger E., Dvorak R., 2002, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 82, 143
 Pourbaix D. et al., 2002, *A&A*, 386, 280
 Quintana E. V., Adams F. C., Lissauer J. J., Chambers J. E., 2007, *ApJ*, 660, 807
 Rabl G., Dvorak R., 1988, *A&A*, 191, 385
 Raghavan D. et al., 2010, *ApJS*, 190, 1
 Szebehely V., 1984, *Celest. Mech.*, 34, 49
 Thébault P., Marzari F., Scholl H., 2009, *MNRAS*, 393, L21

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.