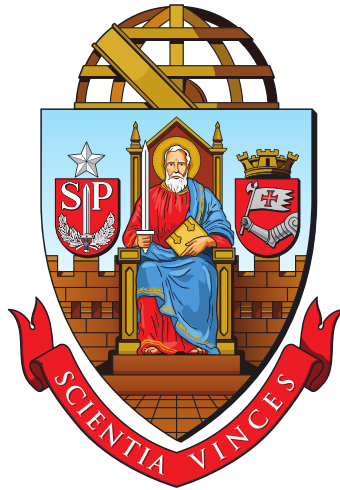


Cosmologia, Criação de Partículas e Redução do Setor Escuro



Sérgio Ricardo Galindo Trevisani Junior

Orientador: Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima

Tese apresentada ao Departamento de Astronomia do Instituto de
Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade
de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de
Doutor em Ciências.

São Paulo

2023

Dedicatória

À Jurema, minha mãe,
e às minhas tias Maria Aparecida (*in memoriam*)
e Maria Cândida (*in memoriam*).

Cosmologia, Criação de Partículas e Redução do Setor Escuro

Versão Corrigida. O original encontra-se disponível na Unidade.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima (orientador) - IAG/USP
- Prof^ª. Dr^ª. Elisabete Maria de Golveia Dal Pino - IAG/USP
- Prof. Dr. Eduardo Serra Cypriano - IAG/USP
- Prof. Dr. Airton Deppman - IF/USP
- Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra - UFPB
- Prof. Dr. João Vital da Cunha Júnior - UFRN

Bons Mots

“Disse Kant: *‘Eu afirmo que em cada Ciência Natural específica pode-se atingir somente tanto Conhecimento verdadeiro quanto nela houver de Matemática’*. De fato, somente dominamos uma teoria das ciências naturais quando expomos seu núcleo matemático e o desvendamos completamente”.

Ele que faz as Plêiades e o Órion, que transforma as trevas em manhã, que escurece o dia em noite, que convoca as águas do mar e as despeja sobre a face da terra, Iahweh é o seu nome!

Amós, 5,8

Agradecimentos

- Primeiramente agradeço ao professor José Ademir Sales de Lima por ter-me aceito orientar; pelas encorajadoras discussões e pela pertinente sugestão do tema para minha pesquisa.

- À Rose Clívia Santos pelas discussões e colaboração em um dos artigos da tese.

- Agradeço, também, à professora Silvia Rossi por ter aceito ser a minha orientadora acadêmica quando do início do doutoramento.

- À minha mãe que sempre esteve ao meu lado, mesmo nos momentos mais difíceis de execução deste projeto.

- Aos três grandes amigos Paulo Rubens Gaspar Filho; Marcelo Hanftwurz e Gabriel Rodrigo Fronas, cada qual por ter-me ajudado nos momentos em que mais precisei; e sem a ajuda dos quais eu não teria concluído este projeto.

- Aos professores Beatriz Barbuy e José Ademir por terem me proporcionado um estrutura real (financeira) no período final, viabilizando assim a conclusão da minha pesquisa.

- Ao Departamento de Astronomia da USP, instituição à qual pertencço, pela infraestrutura de pesquisa e demais condições de trabalho para defender essa tese.

- À CAPES, pelo apoio financeiro, sob o projeto de nº 1760306.

- Ao CNPq, pelo apoio financeiro, sob o projeto de nº 142502/2018-9.

Resumo

Embora a atual condição dinâmica de expansão acelerada do Universo seja fisicamente bem estabelecida no presente, a substância (ou mecanismo) responsável por essa expansão permanece desconhecida. Nesta tese propomos como possível mecanismo para descrever a expansão um novo tipo de modelo cosmológico relativístico, plano, com “**criação de partículas**” e sem energia escura, *i.e.*, com “**redução do setor escuro**”.

No início do desenvolvimento proposto neste trabalho, consideramos haver criação gravitacionalmente induzida de todas as espécies de partículas componentes do multifluido cosmológico. Assim, o atual estágio acelerado de expansão do Universo pode ser descrito como um efeito da pressão negativa oriunda da criação de quaisquer destas espécies. A cosmologia resultante do modelo hipotético em questão pode ser descrita macroscopicamente no caso geral (quando a taxa de criação do número de partículas é distinta da taxa de criação de entropia) e também cineticamente (além de macroscopicamente) no caso “adiabático” (em que as taxas de produção são iguais) [1]. Mostramos ainda que, considerado este mesmo caso “adiabático”, as expressões para pressão de criação e lei de temperatura conhecidos em literatura [1] também podem ser identicamente recuperados. Nossa abordagem inicial sugere a possibilidade de um tratamento cinético gravitacional e quântico (semi-clássico) para a criação, incorporando efeitos de “*back reaction*” para um conjunto arbitrário de componentes dominantes.

No entanto, ao longo do desenvolvimento da tese, observou-se que a emulação completa deste modelo com o Λ CDM é quebrada quando a criação de fótons da CMB¹ (e neutrinos) é levada em conta. Aqui uma nova perspectiva de estudo das distorções da CMB é sugerida.

Nestes termos discutimos, no âmbito da produção de fótons da CMB no Universo em expansão, a relação temperatura \times *redshift* (termômetro cósmico). Em particular, mostramos que a lei de temperatura estendida pode ser derivada com base em três métodos distintos.

O tratamento cinético revela que, considerada a criação “adiabática” destes fótons da CMB, o espectro planckiano é preservado no decorrer da expansão; bem como que as anisotropias e distorções no espectro de potência da CMB podem ser tratadas adequadamente. O novo termômetro cósmico sugere um teste crucial ao modelo de concordância cósmica padrão no setor térmico.

Por fim, é de se notar que a presente análise abre uma nova janela para investigar a

¹“Cosmic Microwave Background”.

tensão de Hubble uma vez que a criação de todas as componentes altera ligeiramente os resultados da CMB e o histórico de expansão tanto nos primórdios do Universo quanto nos tempos atuais.

Palavras-chave: Cosmologia (Física); Relatividade Geral; Universo Acelerado; Criação Gravitacionalmente Induzida de Partículas; *Cosmic Microwave Background* (CMB); Redução do Setor Escuro e Teoria Cinética Relativística.

Summary

Although the dynamic condition of accelerated expansion of the Universe is physically well established at present, the substance (or mechanism) responsible for this expansion remains unknown. In this thesis we propose as a possible mechanism to describe this expansion a new type of relativistic cosmological model, flat, with “**particle creation**” and without dark energy, *i.e.*, with “**reduction of the dark sector**”.

At the beginning of the development proposed in this work, we considered that there was gravitationally induced creation of all kinds of particles that compose the cosmological multifluid. In this case, the current accelerated stage of expansion of the Universe can be described as an effect of negative pressure arising from the creation of any of these species. The cosmology resulting from this hypothetical model can be described macroscopically in the general case (when the particle number creation rate is distinct from the entropy creation rate) and also kinetically, in addition to macroscopically, in the “adiabatic” case (where production rates are equal) [1]. We also show that, considering this same “adiabatic” case, the expressions for creation pressure and temperature law known in literature [1] can also be identically retrieved. Our initial approach suggests the possibility of a gravitational and quantum kinetic treatment (semi-classical) for creation, incorporating “*back reaction*” effects for an arbitrary set of dominant components.

However, throughout the development of the thesis, it was observed that the complete emulation of this model with the Λ CDM is broken when the CMB photon creation (and neutrinos) is taken into account. Here a new perspective of study of CMB distortions is suggested.

In these terms, we re-discuss, within the scope of the CMB photon production in the expanding Universe, the temperature relationship \times *redshift* (cosmic thermometer). In particular, we show that the extended temperature law can be derived based on three different methods.

The kinetic treatment reveals that, considering the “adiabatic” creation of these CMB photons, the Planckian spectrum is preserved during the expansion; as well as that anisotropies and distortions in the CMB power spectrum can be adequately treated. The new cosmic thermometer suggests a crucial test of the standard cosmic concordance model in the thermal sector.

Finally, it should be noted that the present analysis opens a new window to investigate the Hubble stress since the creation of all components slightly alters the results of the CMB

and the history of expansion both in the early Universe and in current times. .

Palavras-chave: (Physical) Cosmology; General Relativity; Accelerating Universe; Creation of Particles; *Cosmic Microwave Background* (CMB); Reduction of Dark Sector and Relativistic Kinetic Theory.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Summary	vii
Lista de Figuras	xiii
Notação e Convenções	xv
Introdução	6
1 Relatividade Geral e Cosmologia Física	7
1.1 As Equações Gravitacionais de Einstein	7
1.1.1 A aproximação de campo fraco e o valor de χ	9
1.2 “Princípio Cosmológico”: Homogeneidade e Isotropia	11
1.3 A métrica FLRW	12
1.4 O Equilíbrio Termodinâmico no Universo FLRW	15
1.5 Breves Considerações	17
2 O Modelo de Concordância Cósmica (ΛCDM)	19
2.1 Universo Primitivo: o Estado Singular Inicial	20
2.1.1 Nucleosíntese Primordial	20
2.1.2 A “ <i>Cosmic Microwave Background</i> ” (CMB)	21
2.2 O “Setor Escuro” do Universo	22
2.3 Os Dados de Supernovas IA	25
2.3.1 Supernovas	25
2.3.2 As Supernovas e a aceleração	26
2.4 A História Térmica do Universo	26
2.5 Problemas no modelo Λ CDM	29
2.6 Breves Considerações	32

3	Modelos com Criação de Matéria	33
3.1	Pressão de Criação \times Viscosidade Volumar	33
3.2	CCDM: o Modelo com Criação de CDM	35
3.2.1	A taxa de criação Γ no modelo LJO	35
3.3	Resultados Independentes de Modelo	40
3.4	Breves Considerações	42
4	Teoria Cinética Relativística	43
4.1	A Equação de Boltzmann na Relatividade Restrita	45
4.2	A Equação de Boltzmann na Relatividade Geral	49
4.3	A Equação de Boltzmann na métrica FLRW	51
4.4	Breves considerações	52
5	O Modelo CCDM Estendido	53
5.1	O caso geral, em que $\Gamma_{(k)N} \neq \Gamma_{(k)S}$	55
5.1.1	Fluxo do Número de Partículas	55
5.1.2	Fluxo de Entropia	56
5.1.3	Tensor Energia-Momento: Conservação da Energia	57
5.1.4	Pressão de Criação	58
5.1.5	Evolução de Temperatura	59
5.2	O caso “adiabático”, em que $\Gamma_{(k)N} = \Gamma_{(k)S}$	60
5.2.1	Formulação Macroscópica	60
5.2.2	Formulação Cinética	61
5.2.3	Fluxo do Número de Partículas	67
5.2.4	Fluxo de Entropia	67
5.2.5	Tensor Energia-Momento: a Pressão de Criação ($\Delta\hat{P}_{(i)}$)	68
5.2.6	Evolução da Temperatura (Formulação Cinética)	70
5.3	O Modelo CCDM Estendido: Cosmologia com Criação de Todos os tipos de Partículas	72
5.3.1	CCDM Estendido e o Setor Térmico	73
5.4	Breves Considerações	77
6	Criação de Fótons da CMB: Lei de Temperatura e Espectro de Corpo Negro	79
6.1	Formulação Heurística	80
6.2	Formulação Macroscópica	80
6.3	Formulação Cinética	84
6.3.1	O “número de ocupação” n_γ	85
6.3.2	Distorções no Espectro Planckiano	89
6.3.3	Breves Considerações	90

Conclusões e Perspectivas	96
A O <i>Redshift</i> Cosmológico	97
B Inflação	99
C O “Teorema H de Boltzmann”	105
D Dedução alternativa para o Operador de Liouville	107
E Alguns Resultados Relevantes	111
E.1 O cálculo da integral na (5.46)	111
E.2 O cálculo da integral na (5.48)	112
E.3 O cálculo da integral na (5.56)	112
Referências Bibliográficas	115

Lista de Figuras

1	Gráfico das relações entre velocidade e distância. Este gráfico é denominado “Diagrama de Hubble”.	1
1.1	Expansão do Universo. A distância comóvel entre pontos permanece constante enquanto o Universo se expande. Já a distância física, que é proporcional a $a(t)$, fica maior com o passar do tempo [2].	15
2.1	Diferença entre modelos previstos pela Lei Kepleriana; corpo rígido e dados obtidos por van Albada <i>et al.</i>	24
2.2	Gráfico das relações entre velocidade e distância. A pequena área em vermelho próxima à origem corresponde ao “Diagrama de Hubble” original. Embora o progresso tenha sido notável em relação às observações originais feitas por Hubble, até o início dos anos 90, esses resultados estavam ainda de acordo com um Universo desacelerado. [3].	25
2.3	Módulo da distância versus <i>redshift</i> para SNe Ia. O “Supernova Cosmology Project” e dados da equipe “Supernova High-2” mostram a diferença entre os dados e as previsões de um modelo com curvatura negativa $\Omega_{m,0} = 0,3$. O painel inferior mostra a diferença entre os dados e as previsões de um modelo de curvatura negativa $\Omega_{m,0} = 0,3$.	27
2.4	Os valores de Ω_M (eixo horizontal) e Ω_Λ (eixo vertical) que melhor se ajustam aos dados mostrados na Figura 2.4. As curvas ovais sólidas mostram os valores de melhor ajuste para os dados do High-z; as curvas ovais pontilhadas mostram os valores de melhor ajuste para a Supernovas do projeto Cosmology Project data [4].	28
2.5	Evolução da Tensão em H_0 . Pontos e região sombreada de verde foram obtidos com Cefeídas e Supernovas, enquanto os da região creme são determinados pelas medidas da CMB. O ponto em vermelho está relacionado a uma combinação de testes em <i>redshifts</i> intermediários. A barra azul é uma medida com ondas gravitacionais (adaptado de [5]).	31

3.1	a) Plano $\alpha \times \Omega_{mef}$ previsto pelo modelo CCDM para dois parâmetros livres utilizando dados correspondentes a 307 supernovas (Kowalski et al. (2008)).	
	b) Likelihood para α em um cenário CCDM espacialmente plano.	39
4.1	Esquema da colisão entre duas esféras rígidas de diâmetro a . No esquema estão indicadas as velocidades relativas v_*^i e $v_*^{i'}$ antes e depois do choque, o parâmetro de impacto b e o ângulo de espalhamento θ [6].	47
5.1	Probabilidade de que a quantidade $\sum_i \alpha_i$ seja igual a α_{eff} com base na Amostra Union 2.1 (SNe Ia). Análise estatística realizada para um modelo plano com criação de matéria obtendo-se $\sum_i \alpha_i = \alpha_{eff} = 0,722 \pm 0,021$ (1σ) de [7]. As linhas horizontais na figura são cortes nas regiões de 68,3% e 95,4% de probabilidade. Observe que a história cósmica é sensível apenas à contribuição líquida α_{eff} cujo melhor ajuste produz $\Omega_m^{eff} \sim 0.278$	74
5.2	Evolução do contraste efetivo da densidade de matéria no modelo CCDM estendido para diferentes valores de α_{eff} em função do fator de escala. A linha azul é obtida para o melhor valor de ajuste dos dados de SNe Ia para o único parâmetro livre efetivo, $\alpha_{eff} = \alpha_{dm} + \alpha_b$. Ele reproduz exatamente a previsão padrão Λ CDM para o contraste de densidade não-relativístico e também para o <i>redshift</i> de transição (ver Fig.5.1). Observe que $\delta_{(mef)}$ descreve apenas a contribuição das componentes não-relativísticas criadas (bárions + CDM), que é capaz de aparecer como matéria aglomerada. Este modelo CCDM estendido é diferente dos modelos anteriores, pois também inclui as componentes subdominantes criadas (CMB + neutrinos), alterando ligeiramente a lei de temperatura e outras propriedades relevantes do fluido de fóton-bárions. . . .	76
6.1	$T(z)$ para taxa de criação de fótons constante. A linha preta sólida ($\alpha = 0$) corresponde à lei da temperatura linear padrão ($\Gamma_0 = 0$). Para α e z diferentes de zero, a lei é não linear e depende da constante de Hubble H_0 . Tal conexão está ausente na lei linear (termômetro cósmico padrão) e pode ajudar a aliviar a tensão de corrente em H_0	87
6.2	Probabilidade para taxa de criação de fótons constante. A segunda lei da termodinâmica restringe Γ_0 a valores positivos. Isso significa que o parâmetro livre $\alpha = \Gamma_0/3H_0$ também é positivo. Usando o melhor ajuste de α (ver texto), encontramos $\Gamma_0 \cong 0,04H_0$	88

Notação e Convenções

- Índices gregos variam de 0 a 3; enquanto índices romanos variam de 1 a 3. Índices subscritos entre parêntesis “ (k) ” representam a espécie de fluido do multifluido cosmológico em questão.
- Índices repetidos representam soma (notação de Einstein).
- A assinatura para a métrica adotada no presente trabalho será $(+, -, -, -)$.
- As derivadas parciais serão denotadas a partir de $\partial\phi/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu\phi \equiv \phi_{,\mu}$.
- A derivada covariante de um campo tensorial será, por sua vez, representada sob a forma

$$\nabla_\mu T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = \partial_\mu T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} + \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha T_{\beta\dots}^{\gamma\dots} + \dots - \Gamma_{\beta\mu}^\gamma T_{\gamma\dots}^{\alpha\dots} - \dots$$

- A quantidade $\hat{P}_{(i)}$ representa pressão termostática para cada tipo “ (i) ” de partícula; já o termo $P_{(i)}^i$ representa o momento comóvel por tipo de partícula. Tal pressão é determinada pelo momento $p_{(i)}^i$ segundo a expressão $p_{(i)}^i = aP_{(i)}^i$. Como é usada, conforme dito anteriormente, a notação $p_{(i)} = aP_{(i)}$; justifica-se a adoção do chapéu $\hat{P}_{(i)}$ para assim denotar a pressão de equilíbrio.

Introdução

Nos últimos 100 anos, a nossa compreensão acerca do Universo modificou-se de maneira bastante significativa. Inicialmente, a dúvida sobre a existência de um “mundo extragaláctico” foi definitivamente resolvida pelo astrônomo norte-americano Edwin Powell Hubble, em 1923 [8]. Posteriormente o próprio Hubble inferiu observacionalmente a expansão Universal [9]: “a radiação proveniente da maior parte das galáxias apresenta um desvio sistemático para o vermelho (*redshift*); desvio este proporcional à distância em que tais galáxias se encontram em relação ao observador”.

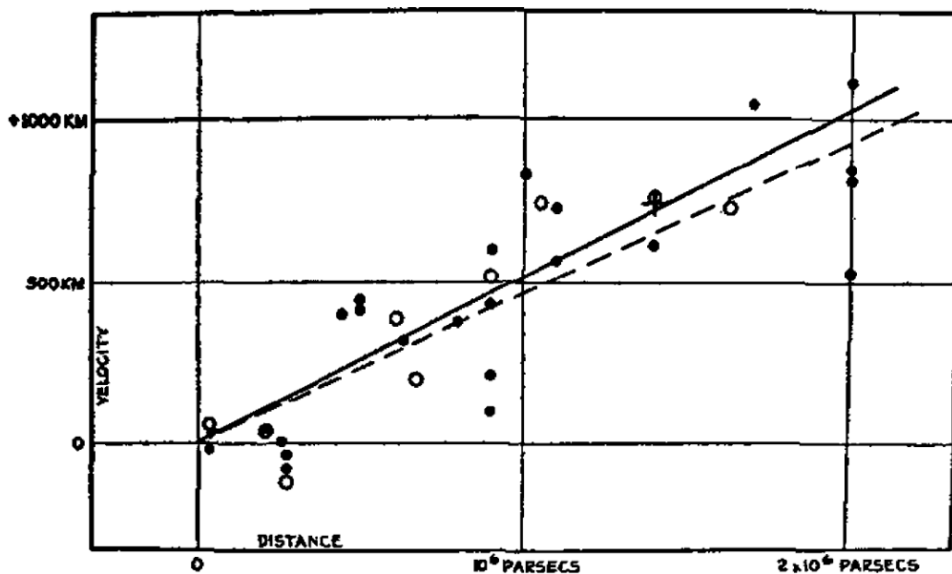


Figura 1: Gráfico das relações entre velocidade e distância. Este gráfico é denominado “Diagrama de Hubble”.

Essa relação de proporcionalidade era bem explicada pelos modelos expansionistas propostos pelo matemático e meteorologista russo Alexander Friedmann [10; 11], em que o *redshift* observado era entendido como um efeito da expansão do Universo. Por fim, na virada do século passado, aconteceu uma grande e inesperada revolução: dois grupos distintos, o “*High-z Supernova Search*” e o “*Supernova Cosmology Project*”, observando o “diagrama de Hubble-Sandage” para supernovas do tipo Ia (SNe Ia), constataram que o Universo está expandindo aceleradamente. Os detalhes desses desenvolvimentos são mais interessantes ainda.

Com o estabelecimento de técnicas matemáticas bastante sofisticadas, associado ao avanço das observações astronômicas, a cosmologia passou a ser reconhecida pela comunidade científica como a “área da física que investiga a estrutura e evolução do Universo em largas escalas”.

Em 1917, após ter concluído o desenvolvimento da sua TRG, Einstein propõe uma possível primeira aplicação para ela (dando, com isso, início à cosmologia teórica): a implementação de um modelo cosmológico estático², homogêneo e isotrópico para descrever a evolução do Universo. Para compensar os efeitos atrativos da gravitação, Einstein introduziu nas suas equações de campo gravitacional a chamada “constante cosmológica” (Λ). Tal constante implementa a ação de uma força repulsiva afim de compensar a força gravitacional e com isso permitir que o modelo concordasse com a visão cosmológica da época.

Até o final da década de 40, a ideia que se tinha de Universo primordial sugeria uma explosão termonuclear em que os núcleos dos elementos químicos leves teriam sido formados. Este cenário, chamado de “*Hot Big Bang*” foi originalmente desenvolvido por Gamow, Alpher e Herman [12].³ Tais estudos sugeriam ainda, pela primeira vez, ter havido a presença de uma radiação térmica de origem primordial no início do Universo: a “*Cosmic Microwave Background*” (CMB).

A CMB, efetivamente descoberta por Penzias e Wilson em 1965 [13], tinha as exatas mesmas características previstas por Gamow e seus colaboradores. Apenas um ano depois desta descoberta, uma versão mais definitiva da nucleosíntese cosmológica foi proposta por Peebles [14]. A partir desse trabalho, a nucleosíntese cosmológica revelou-se um dos testes mais restritivos para a física do Universo primitivo; uma importante prova na interface envolvendo cosmologia e física de partículas.

É interessante ainda mencionar que devido à contaminação galáctica, o espectro completo da CMB permaneceu desconhecido por mais de duas décadas, embora houvesse uma forte sugestão teórica apontando para que seria o de um corpo negro, oriundo de uma fase de equilíbrio entre matéria e radiação. A curva foi determinada aos poucos por experimentos utilizando balões em frequências específicas. O resultado final seria estabelecido definitivamente apenas pelo experimento realizado no satélite COBE, quando revelou-se um comportamento de corpo negro com acurácia notável e temperatura em torno de 2.72548 ± 0.00057 K [15].

Sem dúvidas, o evento mais importante indicando a necessidade da formulação de uma nova visão cosmológica para descrever o Universo ocorreu em 1998 quando supernovas Ia em *redshifts* altos e intermediários foram utilizadas para traçar o diagrama de *Hubble-Sandage*. De fato, a descoberta da correlação entre o pico da curva de luz para uma SNe Ia e a

²Nesta época ninguém suspeitava do estado de expansão do Universo, de modo que foi imediata a busca por um modelo estático.

³Considerando este cenário, o núcleo do Hélio, por exemplo, teria sido formado muito mais facilmente nos estágios primitivos do Universo do que no interior das estrelas.

evolução temporal da sua subsequente queda permitiu aos dois maiores programas da época explorarem SNe Ia como velas padrão.

Os dados indicaram que as supernovas em mais altos z 's parecem sistematicamente menos brilhantes do que seria esperado com base nos modelos desacelerados. Tais resultados sugeriam fortemente se estar observando um Universo acelerado, e, indiretamente, que uma grande fração da densidade de energia/matéria desse Universo devesse estar sob a forma de algum tipo de “agente escuro”⁴.

A este agente, batizou-se com o nome de “Energia Escura” (DE)⁵. Uma vez definida essa quantidade, podemos caracterizar completamente o chamado “setor escuro” do Universo: matéria escura mais energia escura.

Atualmente, os argumentos físicos sugerindo a ação de uma DE para justificar a expansão acelerada do Universo estão sustentados por um conjunto de observações independentes e complementares. Tais experimentos envolvem SNe Ia; anisotropias no espectro de potência da CMB e observações da estrutura de larga escala do Universo. A combinação destes resultados favorece o desenvolvimento de modelos com parâmetro de densidade $\Omega_{DE} \neq 0$. Os dados da CMB obtidos com o projeto WMAP limitam a densidade do nosso Universo; e suas análises estatísticas indicam ser o Universo aproximadamente plano [16]. As estimativas para o parâmetro de densidade da matéria, provenientes das observações feitas sobre estruturas de largas escalas e obtidos com os WMAP e Planck, apontam para $\Omega_m \approx 0,27$.

No entanto, problemas relacionados ao estabelecimento de Λ como o termo de energia escura no modelo Λ CDM (ver capítulo 2) motivaram o desenvolvimento de diversos novos modelos cosmológicos alternativos⁶, modelos estes que propõe a ação de outros mecanismos para justificar a expansão acelerada.

Nesta tese estamos particularmente interessados na possibilidade de reduzir o setor escuro do Universo⁷. Mais precisamente, consideraremos o mecanismo de criação de matéria como sendo o único responsável pela expansão acelerada do Universo, já que a esse processo (de criação) está associada a ação da chamada “pressão de criação”; negativa, por construção.

Conforme mencionado anteriormente, há várias linhas de investigação tentando desenvolver modelos acelerados para o Universo sem DE. A mais radical é modificando a TRG, como por exemplo, adotando-se um teoria $F(R)$. A idéia básica desta abordagem é considerar os problemas da cosmologia como dificuldades inerentes à própria TRG. Seu ponto de partida é a substituição do escalar de curvatura R na chamada “ação de Einstein-Hilbert” por uma função escalar (de R) mais geral, $F(R)$ [17; 18; 19].

A possibilidade de descrição do Universo via modelos acelerados com criação de matéria

⁴O adjetivo “escuro”, aqui, deve ser entendido como sinônimo de “desconhecido”.

⁵“Dark Energy”.

⁶Alguns destes modelos abandonam, inclusive, o formalismo da TRG para descrever o *cosmos*.

⁷Isto é, eliminar a hipótese de ação da energia escura para descrever a expansão acelerada do Universo.

surgiu com o trabalho de Prigogine *et al.*, em 1989 [1]. Neste trabalho, foi argumentado que a lei de conservação de energia tradicional (adiabática) para modelos do tipo FLRW estava incompleta. De fato, considerado o Universo um sistema termodinamicamente “aberto”, pois o espaço tempo, do ponto de vista quântico, pode criar matéria [20]; o tensor energia-momento precisaria ser reinterpretado de modo a incorporar um termo (de pressão) associado à criação de partículas.

No caso “adiabático” *i.e.*, com entropia específica por partícula (σ) constante, a expressão para a pressão de criação fica

$$P_{c(k)} = -(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) \frac{\Gamma_{(k)}}{3H}, \quad (1)$$

em que $P_{c(k)}$ representa o termo de “pressão de criação” e $\Gamma_{(k)}$ a “taxa de criação”, ambos por tipo “ (k) ” da componente desacoplada do multifluido cosmológico; $H = H(t)$ o “parâmetro de Hubble”; $\rho_{(k)}$ a “densidade” (instantânea) de partículas; e $\hat{P}_{(k)}$ a “pressão termostática” correspondente a este mesmo tipo de partículas (incluindo as partículas criadas).

Em 1992, uma formulação manifestamente covariante do artigo seminal foi proposta por Calvão *et al.* [21], na qual demonstrou-se que o trabalho [1] se refere tão somente ao caso “adiabático”. Fisicamente, isto significa que a entropia cresce devido à criação de partículas, mas a razão entre a entropia e o número de partículas permanece constante. Conforme veremos, este caso parece ser o mais importante do ponto de vista físico.⁸

Em 2010, Lima *et al.* [25] mostraram que um modelo dirigido apenas pela ação da pressão de criação da “matéria escura fria” seria não apenas capaz de acelerar o Universo mas de, ainda, simular a dinâmica do modelo Λ CDM, considerado o modelo padrão até 1997. Em particular, foi demonstrado que o modelo CCDM⁹ é equivalente a Λ CDM mesmo a nível perturbativo [26; 27].¹⁰

Dentre os últimos resultados concernentes ao modelo com criação de partículas está o desenvolvimento de uma descrição cinética para a criação de partículas [28] na formulação de fluido simples. Portanto, embora muita investigação deva ainda ser realizada, podemos dizer que modelos com redução do setor escuro via criação de matéria e dentro da relatividade geral, constituem uma alternativa realística ao modelo considerado padrão.

Em linhas gerais, é precisamente nesse contexto de redução do setor escuro e de exploração das potencialidades de modelos com criação macroscópica de quaisquer tipos de partículas que a presente tese está inserida. Como veremos adiante, tal investigação também se justifica pela chamada tensão de Hubble ($SNe \times CMB$): no modelo Λ CDM os valores de H_0 obtidos pela escala de distância cósmica utilizando supernovas e outros indicadores de distância, estão em desacordo com os resultados para altos *redshifts*; oriundos das anisotro-

⁸Muitos trabalhos deram continuidade a essa linha de pesquisa, *a.e.* [22, 23, 24].

⁹“Creation of Cold Dark Matter”.

¹⁰Numa abordagem um pouco mais geral a equivalência a nível linear foi confirmada por [7].

pias da CMB (ver capítulo 2).

Nestes termos, o nosso trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, deduzimos de maneira informal as equações que descrevem o campo gravitacional na formulação de Einstein (TRG). Discutimos também a implementação do “Princípio Cosmológico” e como as simetrias decorrentes de sua adoção modificam nosso entendimento sobre o espaço-tempo da cosmologia. Posteriormente, expusemos como métricas do tipo FLRW se adequam à descrição do *cosmos*. Por fim, descrevemos as principais consequências do equilíbrio termodinâmico para universos do tipo FLRW no caso de uma mistura de fluidos desacoplados.

No capítulo 2, os resultados básicos correspondentes ao modelo de concordância cósmica (Λ CDM) são apresentados. A nucleossíntese primordial é brevemente descrita como parte da fase primitiva do modelo cosmológico padrão. Em seguida discutimos algumas peculiaridades relacionadas à CMB. Posteriormente, consideramos as componentes de natureza escura: matéria escura e energia escura. Feito isso, discutimos de que modo os dados referentes às SNe Ia justificam a expansão acelerada do Universo e, por fim, discorremos sobre a história térmica do Universo e os problemas inerentes ao modelo Λ CDM.

No capítulo 3 abordamos modelos com criação de matéria. Primeiramente, comparamos os fenômenos de viscosidade volumar com o de criação de matéria, com ênfase nas diferenças básicas entre os dois processos. Neste capítulo sugere-se, ainda, uma forma para a taxa de criação de partículas Γ , baseada no modelo LJO da cosmologia tal que reproduza dinamicamente o modelo Λ CDM. Por fim, são apresentados resultados independentes do modelo.

No capítulo 4 são apresentadas pela primeira vez as quantidades necessárias para a derivação cinética do processo de criação de partículas. Nestes termos, a equação de Boltzmann colisional é apresentada tanto no contexto da teoria da relatividade restrita quanto no da relatividade geral. O resultado mais geral apresentado neste capítulo corresponde à forma para a equação de Boltzmann na métrica FLRW.

No capítulo 5, discutimos o modelo CCDM estendido (com criação de todas as espécies desacopladas componentes do multifluido cosmológico). Tal modelo com criação de partículas é formulado tanto do ponto de vista macroscópico quanto do cinético para o caso “adiabático”. Aqui será apresentado o primeiro resultado original da presente tese: **Trevisani, S. R. G. and Lima, J. A. S. (2023)**. Neste artigo é apresentada a generalização para modelos com criação de multifluidos desacoplados tanto no cenário macroscópico quanto no cinético. Ainda neste capítulo 5 apresentamos de uma maneira mais pedagógica o processo de criação “não-adiabática” de partículas no formalismo macroscópico.

Ao sexto (e último) capítulo, correspondeu outro resultado original, a criação “adiabática” de fótons da CMB: **Lima, J. A. S., Trevisani, S. R. G., & Santos, R, C (2021)** Utilizando os resultados para multifluidos do capítulo 5, demonstramos através de três diferentes formulações (heurística, macroscópica e cinética) que a criação “adiabática” de fótons

preserva o espectro de corpo negro da CMB.

Finalmente, apresentamos nos apêndices A, B, C, D e E alguns resultados complementares mas necessários para uma compreensão mais completa desta tese.

Correspondem aos capítulos 5 e 6 os dois trabalhos originais apresentados na presente tese.

Capítulo 1

Relatividade Geral e Cosmologia Física

Em 1915 Einstein conclui o desenvolvimento da sua teoria relativística para a gravitação, tendo como base o chamado “Princípio de Equivalência” (1907). Tal princípio associa efeitos gravitacionais e acelerativos. Com efeito, a princípio seria possível compreender os efeitos físicos da gravidade investigando o que acontece em referenciais não-inerciais.

Tal associação levou Einstein a propor que a gravitação encurva o espaço-tempo da relatividade restrita; sendo esta curvatura determinada pela maneira como se distribuem, no espaço, matéria e energia, ou seja, pela forma do “Tensor de Energia-Momento” ($T^{\mu\nu}$).

Assim, as equações de campo gravitacional de Einstein descrevem nada mais senão um compromisso entre duas estruturas: uma geométrica e outra energética. Utilizando suas equações de campo [29], Einstein, em 1917 deu início à chamada “Cosmologia Relativística”.

Neste capítulo apresentaremos brevemente uma dedução informal para as equações da “Teoria da Relatividade Geral” (TRG); bem como os fundamentos da cosmologia relativística moderna.

1.1 As Equações Gravitacionais de Einstein

Sabemos que as equações de Maxwell estabelecem como o campo eletromagnético fica caracterizado em termos das distribuições espaciais de cargas e correntes elétricas. Similarmente, as equações de Einstein governam como a estrutura do espaço-tempo curvo fica determinada pela distribuição de matéria e energia.¹ Tais equações de campo foram deduzidas de primeiros princípios pelo matemático alemão David Hilbert através da variação da ação do campo gravitacional. No entanto, estas equações podem também ser obtidas fisicamente, através de argumentos de plausibilidade. Esse caminho, que foi

¹Nas palavras de John Wheeler, “...o espaço-tempo determina como a matéria deve se mover; ao passo que a matéria determina de que forma o espaço-tempo deve se curvar...”.

originalmente seguido por Einstein [30], será apresentado como segue.

À primeira das condições impostas por Einstein para o campo gravitacional consistiu impor que, no limite newtoniano, as equações para o potencial gravitacional sejam as de Poisson:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho}. \quad (1.1)$$

Note que à esquerda da (1.1) tem-se um operador diferencial de 2^a ordem atuando sobre o “potencial gravitacional” (Φ); ao passo que, à direita, uma medida referente à “densidade de matéria” (ρ).

A TRG é uma teoria de gravidade baseada na idéia de um espaço-tempo curvo. Logo, a possibilidade de uma generalização relativística em forma tensorial para a equação de Poisson é garantida pelos “Princípio de Covariância Geral”² e “Princípio do Acoplamento Mínimo”³.

Sabemos, ainda, que na geometria riemanniana as quantidades geométricas relevantes para a teoria de Einstein são determinadas a partir do “tensor métrico” ($g_{\mu\nu}$) e das suas “conexões” ($\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$). Nestes termos, a métrica fica dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.2)$$

Já a partir das derivadas de $g_{\mu\nu}$, determinam-se as conexões (“símbolos de Cristoffel”)

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right]. \quad (1.3)$$

Formalmente, o que Einstein fez de novo foi considerar

$$\nabla^2 g_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

O “Tensor de curvatura de Riemann-Christoffel” ($R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$) é constituído a partir das conexões e de suas derivadas:

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\kappa\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda. \quad (1.5)$$

Portanto $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ é uma quantidade em geral não-nula, obtida a partir das derivadas primeiras e segundas de $g_{\mu\nu}$; sendo identicamente nula apenas na relatividade especial,

²Pode-se implementar o Princípio de Covariância Geral considerando que:

- Na ausência de campos gravitacionais, as leis físicas devem se reduzir às da relatividade restrita $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \Gamma_{\lambda\nu}^\mu = 0$.
- Em presença de campos gravitacionais, as equações da relatividade geral devem ser preservadas por mudanças arbitrárias de coordenadas.

³A implementação do Princípio de Acoplamento Mínimo se faz levando em conta a consideração: “*Seja uma lei física válida em algum sistema de coordenadas espaciais planas. Descrevendo-se esta lei em forma tensorial (invariante por mudança de coordenadas), a mesma deve permanecer válida no espaço curvo.*”

quando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. O “Tensor de Ricci” ($R_{\mu\nu}$), é uma contração (do segundo índice covariante) do tensor de curvatura

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}. \quad (1.6)$$

Perceba que $R_{\mu\nu}$ é um tensor de ordem (0,2), bem como o tensor $T_{\mu\nu}$.

É bem conhecido ainda que a partir das chamadas identidades de Bianchi e do tensor de Ricci, podemos implementar o “Tensor de Einstein” ($G_{\mu\nu}$) para caracterizar a ação do campo gravitacional. Esse tensor de segunda ordem, tal como $T_{\mu\nu}$, é também identicamente conservado, ou seja, $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = 0$. Tal tensor assume a seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

em que $R = g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ é o “escalar de curvatura” do espaço-tempo.

Portanto, em termos de $G_{\mu\nu}$, a equação (1.1) pode ser reescrita sob a forma

$$\boxed{G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}}, \quad (1.8)$$

em que a “constante de acoplamento” (χ) pode ser determinada a partir da aproximação de campo fraco, quando o resultado newtoniano deve ser recuperado. Tal modelo assegura boa parte dos sucessos atribuídos ao presente modelo para a mecânica celeste.

1.1.1 A aproximação de campo fraco e o valor de χ

A implementação de perturbações lineares sobre a “métrica de Minkowsky” ($\eta_{\mu\nu}$) se faz a partir de:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \\ &\Rightarrow g_{00} = 1 + h_{00} \equiv 1 - 2\Phi, \end{aligned} \quad (1.9)$$

em que a $h_{\mu\nu}$ (logo também a Φ) corresponde alguma “perturbação” sobre a métrica $\eta_{\mu\nu}$.

Por outro lado, reescrevendo a (1.8) sob a forma

$$R_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right);$$

e levando-se em conta que,

$$T = g^{00}T_{00} = T_{00} = \rho;$$

então,

$$R_{00} = \chi \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) = \chi \left(\rho - \frac{1}{2} \rho (+1) \right) = \frac{1}{2} \chi \rho$$

$$\boxed{R_{00} = \frac{1}{2} \chi \rho} \quad (1.10)$$

expressão esta que relaciona derivadas da métrica com densidade de energia.

Calculando-se, a partir das relações (1.5) e (1.6), o termo⁴ R_{00} :

$$R_{00} = R_{0\lambda 0}^\lambda = R_{0j0}^j = \partial_j \Gamma_{00}^j - \cancel{\partial_0 \Gamma_{j0}^i} - \cancel{\Gamma_{j\lambda}^i \Gamma_{00}^\lambda} - \cancel{\Gamma_{0\lambda}^i \Gamma_{j0}^\lambda},$$

fica-se apenas com

$$R_{00} = R_{0i0}^i = \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right] = -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}.$$

Comparando-se a equação anterior com a (1.10)

$$R_{00} = \frac{1}{2} \chi \rho = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \Rightarrow \nabla^2 h_{00} = -\chi \rho.$$

Por construção, do modelo de perturbação adotado, tem-se que

$$h_{00} = -2\Phi \Rightarrow \nabla^2 h_{00} = -\nabla^2 (2\Phi) = -2\nabla^2 \Phi = -\chi \rho.$$

Da equação de Poisson no limite newtoniano, $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$, chega-se à seguinte forma para ⁵ χ :

$$\boxed{\chi = 8\pi G}.$$

Nestes termos, voltando-se à equação (1.8), conclui-se a dedução das chamadas “Equações de Campo Gravitacional de Einstein”:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}}. \quad (1.11)$$

Tendo obtido as equações da sua TRG, Einstein [29] propôs, em 1917, apoiado no “Princípio de Mach”, que o *cosmos* devesse ser espacialmente fechado, estático, homogêneo e isotrópico. Para tanto⁶ introduziu, multiplicado por $g_{\mu\nu}$, o termo Λ , denominado “constante cosmológica”, de modo que as equações de Einstein ficaram sob a forma

⁴Como $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é de 1ª ordem na métrica, $(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda)^2$ só contribui em segunda ordem para a mesma, podendo ser, assim, desprezado.

⁵No sistema de unidades natural (coordenadas físicas), $\chi = 8\pi G/c^4$.

⁶Para manter um espaço repleto de matéria atrativa gravitacionalmente estático, seria preciso adicionar às equações algum termo de ordem repulsiva. Essa era a função de Λ : não deixar o Universo colapsar.

final⁷

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}}. \quad (1.12)$$

O termo Λ originou uma das maiores questões enfrentadas pela física atual, o “problema da constante cosmológica”: uma das constantes fundamentais ainda não detectadas da natureza e um dos principais candidatos a “energia escura”.

1.2 “Princípio Cosmológico”: Homogeneidade e Isotropia

Na cosmologia moderna usa-se supor que em largas escalas (da ordem de 100 Mpc ou superiores) o Universo (espaço-tempo) seja homogêneo e isotrópico. Antes mesmo das evidências observacionais que garantem a assertividade desta hipótese (*a.e.* distribuição de galáxias em largas escalas e quase uniformidade do espectro de potência da CMB), Friedmann [10] formulou um modelo cosmológico⁸ que propunha homogeneidade e isotropia em largas escalas.

“Princípio Cosmológico”: O Universo, em largas escalas, é sempre **homogêneo e isotrópico**.

Em um modelo de espaço-tempo quadridimensional, a “distância” entre dois eventos é denominada “intervalo” (ds); intervalo este que se relaciona com a métrica do espaço-tempo a partir da relação

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.13)$$

Definam-se, a partir daqui, os conceitos da geometria diferencial aplicados à física:

- **Homogeneidade**

Qualquer ponto do espaço físico é equivalente a qualquer outro; o que, tecnicamente, impõe ser constante o escalar de Ricci (R) associado a $g_{\mu\nu}$ [31; 32].

- **Isotropia**

O espaço físico não admite direções preferenciais (*i.e.*, invariância de medidas por rotação). Em termos técnicos, esta propriedade é garantida quando consideradas variedades com métricas $g_{\mu\nu}$ diagonais [31; 32].

Em termos práticos, imporem-se as condições de homogeneidade e isotropia, garante

⁷Aqui se está considerando $c = 1$.

⁸Isto é, encontrou $g_{\mu\nu}$ solução da equação (1.12).

a validade da descrição para ds em termos de

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = {}^{(4)}g_{\mu\nu}(t, x) dx^\mu dx^\nu = \\ &= dt^2 + {}^{(4)}g_{ij}(t, x) dx^i dx^j = \\ &= dt^2 - a^2(t) h_{ij}(x) dx^i dx^j ; \end{aligned}$$

em que a cada instante t fixo, $h_{ij}(x)$ deve ser, por si só, homogêneo e isotrópico (*i.e.*, $h_{ij}(x)$ deve ser diagonal); e $a(t)$ é denominado “fator de escala”.

Assim, ficou provado nos trabalhos [10; 31; 33; 34], que as métricas que melhor descrevem um Universo em expansão em algum sistema de coordenadas arbitrário, têm a forma

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - a^2(t) h_{ij}(x^i) dx^i dx^j}, \quad (1.14)$$

em que (t, x^i) são “coordenadas comóveis”.

1.3 A métrica FLRW

Considerando, como se tem feito até aqui, o Universo homogêneo e isotrópico em largas escalas é fácil calcular alguns resultados geométricos básicos da métrica de Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker (FLRW).

Sejam as relações para os símbolos de Christoffel para uma métrica pseudo-euclidiana arbitrária:

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}h_{ij} \quad (1.15)$$

e

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i. \quad (1.16)$$

Em posse dos valores para todos os $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu$ não-nulos [35], calculem-se, então, as componentes não-nulas correspondentes ao tensor de Ricci (1.3). Calcule-se, a princípio, R_{00} :

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \quad \therefore \quad \boxed{R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}}. \quad (1.17)$$

Calculem-se, agora, os termos R_{ij} [36]:

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^k}{\partial x^j} - \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial t} \right) + (\Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k) - (\Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0l}^l) .$$

Calculando-se termo a termo da expressão anterior, chega-se a que:

$$R_{ij} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ki}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{kl}^l \right) - 2\dot{a}^2 h_{ij} - a\ddot{a} h_{ij}.$$

Então, considerada a métrica FLRW, a parte espacial para o tensor de Ricci fica:

$${}^{(3)}R_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k - \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k.$$

Portanto,

$$R_{ij} = {}^{(3)}R_{ij} - 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} g_{ij} - \frac{\ddot{a}}{a} g_{ij}. \quad (1.18)$$

A partir daí⁹, chega-se à seguinte relação para o invariante de curvatura (escalar de Ricci):

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} = \\ &= (+1) \left(-\frac{3\ddot{a}}{a} \right) + \left(-\frac{1}{a^2(t)} h^{ij} \right) ({}^{(3)}R_{ij} - 2\dot{a}^2 h_{ij} - a\ddot{a} h_{ij}). \end{aligned}$$

Logo, trocando-se, por conveniência, a posição dos termos da relação anterior

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{h^{ij}}{6a^2} {}^{(3)}R_{ij} \right]. \quad (1.19)$$

Conforme é possível se calcular em qualquer sistema de coordenadas, $\kappa = {}^{(3)}R/6$. Com isso chega-se a que

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right]. \quad (1.20)$$

Uma vez em posse das quantidades (1.17), (1.18) e (1.20), determinem-se as “Equações de Friedmann” a partir das equações de Einstein. Nestes termos, a equação correspondente ao termo G_{00} dá forma à chamada “1^a Equação de Friedmann”

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = 8\pi G T_{00} + \Lambda g_{00} \\ \therefore \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

e as equações correspondentes aos termos G_{ij} , por sua vez, dão forma à “2^a Equação

⁹ $h^{ij} h_{ij} = -3$.

de Friedmann”

$$\Rightarrow G_{ij} = G_{ii} = R_{ii} - \frac{1}{2}Rg_{ii}$$

$$\therefore \boxed{2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} = -8\pi G\hat{P} + \Lambda}. \quad (1.22)$$

em que a \hat{P} corresponde a “ pressão isotrópica” do fluido em questão.

Algumas propriedades físicas dos modelos de Friedmann foram posteriormente estudadas pelo matemático belga Georges Lemaître [33] e passaram a constituir, juntamente com a solução¹⁰ expansionista e desacelerada obtida por Einstein [37], a base matemática do que se tornaria o modelo padrão da cosmologia até 1997. As distintas geometrias de tais soluções foram posteriormente classificadas do ponto de vista das simetrias da seção espacial por Howard P. Robertson [31] e Arthur Geoffrey Walker [32], sendo atualmente referenciadas na literatura como geometrias do tipo “Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)”.

Manipulando-se as duas equações de Friedmann e desconsiderando o termo Λ , é possível se chegar ao seguinte resultado:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3\hat{P})}, \quad (1.23)$$

$$\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \hat{P} < -\frac{1}{3}\rho. \quad (1.24)$$

Em outros termos, perceba, a partir da equação (1.23), que o Universo se expande de forma acelerada independentemente de qual seja o valor para a sua curvatura espacial, desde que $\hat{P} < -\rho/3$.

O significado físico para o termo $a(t)$ pode ser ilustrado da seguinte maneira: Seja uma galáxia distante com coordenadas (r, θ, ϕ) . A distância da galáxia até o observador, em um tempo fixo t , lembrando que as coordenadas (θ, ϕ) não variam para a luz fica

$$d(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} = a(t) \times \begin{cases} \text{sen}^{-1}r & \text{para } \kappa = +1, \\ r & \text{para } \kappa = 0, \\ \text{senh}^{-1}r & \text{para } \kappa = -1. \end{cases} \quad (1.25)$$

Esta integral expressa a distância coordenada, que depende apenas da distância comóvel r da galáxia e é independente do tempo. A distância física entre nós e a galáxia $d(r, t)$, por sua vez, é modulada pela evolução temporal do fator de escala $a(t)$.

¹⁰Modelos cosmológicos são baseados em soluções para as equações de campo gravitacional de Einstein.

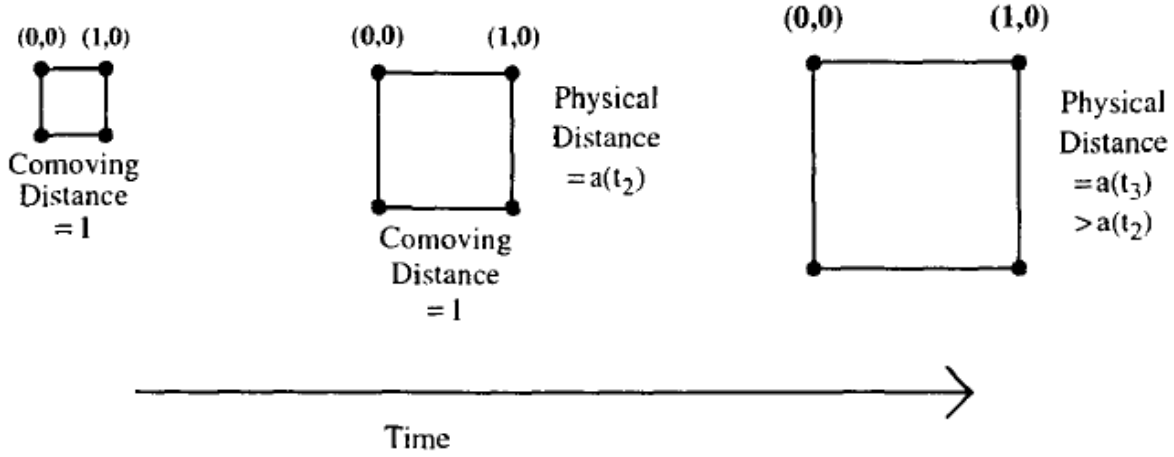


Figura 1.1: *Expansão do Universo.* A distância comóvel entre pontos permanece constante enquanto o Universo se expande. Já a distância física, que é proporcional a $a(t)$, fica maior com o passar do tempo [2].

1.4 O Equilíbrio Termodinâmico no Universo FLRW

As relações apresentadas na presente seção modelam o Universo a partir de um multifluido com “ N ” diferentes tipos/espécies de partículas desacopladas, com o índice “ (k) ” representando cada tipo de partícula. Considere, ainda, uma descrição termodinâmica do Universo feita em termos da métrica FLRW e sem considerar “criação de partículas” ($N_{(k);\mu}^\mu = 0$); “produção de entropia” ($S_{(k);\mu}^\mu = 0$); nem “dissipação/criação de energia” ($u_\mu T_{(k);\nu}^{\mu\nu} = 0$).

Caracteriza-se o chamado “Equilíbrio Termodinâmico” a partir das relações de conservação associadas às seguintes quantidades:

- “quadrifluxo do número de partículas”:¹¹

$$N_{(k)}^\mu \equiv n_{(k)} u^\mu \Rightarrow N_{(k);\mu}^\mu = 0 ;$$

o que pode ser descrito na forma escalar:

$$\dot{n}_{(k)} + n_{(k)} \Theta = 0 ; \quad (1.26)$$

- “quadrifluxo de entropia”:

$$S_{(k)}^\mu \equiv s_{(k)} u^\mu \Rightarrow S_{(k);\mu}^\mu = 0 ;$$

¹¹Entende-se por $n_{(k)}$ a densidade volumétrica do número de partículas; por tipo de partícula.

o que pode ser descrito na forma:

$$\boxed{\dot{s}_{(k)} + s_{(k)}\Theta = 0} ; \quad (1.27)$$

- “tensor energia-momento”:

$$T_{(k)}^{\mu\nu} = (\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})u^\mu u^\nu - \hat{P}_{(k)}g^{\mu\nu} \Rightarrow T_{(k);\nu}^{\mu\nu} = 0 .$$

o que, por fim, pode ser descrito na forma¹²:

$$\boxed{\dot{\rho}_{(k)} + (\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})\Theta = 0} . \quad (1.28)$$

onde entende-se por “taxa de expansão” (Θ):

$$\Theta = u^\mu_{;\mu} = 3\frac{\dot{a}}{a} \equiv 3H ;$$

e (nas relações anteriores) entende-se por $(;)$ o operador “derivada covariante”; ρ por “densidade de energia”; \hat{P} , como já dito, por “pressão isotrópica”; n por “densidade volumétrica comóvel do número de partículas” e, por fim, s como “densidade volumétrica comóvel de entropia”.

As quantidades termodinâmicas acima mencionadas ($\rho_{(k)}$, $\hat{P}_{(k)}$, $n_{(k)}$ e $s_{(k)}$), por sua vez, se relacionam com as respectivas “temperaturas” ($T_{(k)}$) dos elementos do sistema segundo a chamada “Lei de Gibbs”:

$$\Rightarrow n_{(k)}T_{(k)}d\left(\frac{s_{(k)}}{n_{(k)}}\right) \equiv n_{(k)}T_{(k)}d\sigma_{(k)} = d\rho_{(k)} - \frac{\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}}{n_{(k)}}dn_{(k)} , \quad (1.29)$$

em que entende-se por $\sigma_{(k)}$ a “densidade de entropia (no volume comóvel) por partícula, por tipo k de partícula”.

Considerando-se, ainda, a validade local da “Relação de Euler”:

$$n_{(k)}T_{(k)}\sigma_{(k)} = \rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} - \mu_{(k)}n_{(k)} , \quad (1.30)$$

combinando-se as duas últimas equações acima elencadas, conclui-se a validade da conhecida “Relação de Gibbs-Duhem”:

$$n_{(k)}\sigma_{(k)}dT_{(k)} = d\rho_{(k)} - \mu_{(k)}d\mu_{(k)} \quad (1.31)$$

que evidencia haver somente duas variáveis termodinâmicas independentes: n e T .

¹²Posteriormente se justificará por que razão adotou-se por pressão isotrópica a notação “ \hat{P} ”

Combinadas as relações de conservação (1.26), (1.27) e (1.28) com as identidades termodinâmicas (1.29), (1.30) e (1.31) acima, conclui-se a validade da seguinte relação termodinâmica:

$$\boxed{T_{(k)} \left(\frac{\partial \hat{P}_{(k)}}{\partial T_{(k)}} \right)_n = \rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} - n_{(k)} \left(\frac{\partial \rho_{(k)}}{\partial n_{(k)}} \right)_{T_{(k)}}}. \quad (1.32)$$

A partir da qual se obtém a seguinte “lei de evolução para a temperatura por componente desacoplado”:

$$\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = \left(\frac{\partial \hat{P}_{(k)}}{\partial \rho_{(k)}} \right)_{n_{(k)}} \frac{\dot{n}_{(k)}}{n_{(k)}} = - \left(\frac{\partial \hat{P}_{(k)}}{\partial \rho_{(k)}} \right)_{n_{(k)}} \Theta. \quad (1.33)$$

Note-se que a presente lei de evolução para a temperatura é completamente independente da entropia (bem como do potencial químico μ .)

No Universo primitivo podemos considerar todas as componentes do multifluido cosmológico em equilíbrio termodinâmico à mesma temperatura T .

Em particular, para a radiação (ou partículas ultrarelativísticas quaisquer), $m_{(k)} \ll T$ e $\rho_{(k)} \simeq 3\hat{P}_{(k)}$, a lei de evolução para a temperatura fica apenas:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\dot{a}}{a}}, \quad (1.34)$$

ou ainda, considerando que $a(z) = (1+z)^{-1}$, em termos do *redshift* podemos escrever (vide apêndice A),

$$T = T_0(1+z).$$

Essa lei de temperatura é genericamente válida não apenas na fase desacoplada, mas também para o plasma primordial, pois a razão fóton - bárion é muito alta. Portanto, se houver qualquer contato térmico entre os bárions e a radiação, a matéria é obrigada a seguir a lei de temperatura da radiação [38].

1.5 Breves Considerações

Uma vez implementadas as equações de campo gravitacional de Einstein; e o princípio cosmológico, chegou-se à métrica FLRW para uma mais geral, acertada e precisa descrição do Universo físico. Uma consequência imediata devida à instituição da métrica FLRW para a descrição do *cosmos* é a ocorrência do efeito chamado “*Redshift* Cosmológico”; o desvio para o vermelho das linhas espectrais devido à expansão do Universo (ver apêndice A). Em seguida estudamos também as diferentes componentes fontes de curvatura do Universo.

Os resultados apresentados neste capítulo permearão todo o restante da tese, já que toda ela está fundamentada na TRG. Na primeira seção do próximo capítulo será discutido o chamado “Modelo Padrão de Concordância Cósmica (Λ CDM)”, de modo que muitos dos conceitos aqui discutidos serão diretamente aplicados.

Embora na equação (1.14) tenhamos adotado uma métrica do tipo FLRW geral ($\kappa = -1, 0, +1$), no restante desta tese consideraremos apenas a geometria de Friedmann com seções planas ($\kappa = 0$)

$$\boxed{ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}, \quad (1.35)$$

o que está de acordo com todas as observações astronômicas do momento.

Finalmente, observamos que devido às hipóteses de homogeneidade e isotropia, as equações (1.26), (1.27), (1.28) e (1.33), descrevendo os fluxos e a lei de temperatura para cada componente, não dependem da curvatura das seções espaciais.

Capítulo 2

O Modelo de Concordância Cósmica (Λ CDM)

Algum tempo após Einstein propor sua teoria de campo gravitacional com constante cosmológica [29], de Sitter apresentou um modelo, também com constante cosmológica, no qual a densidade de matéria era zero, mas com o espaço-tempo curvo [39]. Neste modelo, as partículas de teste se afastavam exclusivamente devido à ação da força repulsiva devida a Λ .

Os pilares observacionais que garantem evidências convincentes para a autenticidade da descrição do Universo feita em termos do chamado modelo Λ CDM incluem (i) observações sobre supernovas Ia (ver seção 2.3), (ii) Oscilações Acústicas de Bárions (BAO)¹ e (iii) o espectro angular de potências da CMB, descrevendo adequadamente as anisotropias neste caso.

Em meados do século passado, as equações que então regiam a dinâmica do Universo eram as duas equações de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.1)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} = -8\pi G\hat{P} + \Lambda. \quad (2.2)$$

De importância vital para a cosmologia foram, como dito anteriormente, as soluções para as equações de Einstein devidas a Friedmann [10] e Lemaître [33], sendo estas soluções fundamentais para o estabelecimento deste presente modelo cosmológico em questão.

¹Num palco em que a gravidade e a força de pressão da radiação emergente medem “forças”, resultando em um “puxar-para dentro” (gravidade) e “puxar-para fora” (pressão da radiação), há o surgimento de oscilações na matéria. A partir dessas oscilações, uma onda mecânica é criada e se propaga, tal como uma onda sonora.

2.1 Universo Primitivo: o Estado Singular Inicial

A expansão do Universo sugere que, no passado distante, seu volume tendeu a zero. Esse estado do Universo, em que densidade, temperatura e pressão são infinitamente grandes, recebe o nome de estado singular inicial (“*Big Bang*”). Entretanto, a TRG é uma teoria gravitacional clássica e as investigações por ela permitidas só admitem que se vá até a chamada “Era de Planck”:

$$t_{Pl} = \left(\frac{\hbar G}{c^5} \right)^{1/2} = 10^{-43} s. \quad (2.3)$$

Para tempos menores que t_{Pl} (“tempo de Planck”), efeitos quântico-gravitacionais não podem ser desprezados.

A maior evidência da validade da hipótese de isotropia do espaço-tempo vem de observações sobre a CMB. Estas observações apontam para que a distribuição média de matéria em volumes da ordem de 3000 Mpc tem flutuações muito baixas (da ordem de $\delta M/M \leq 10^{-4}$). Já a homogeneidade é confirmada pela contagem do número de galáxias e pela linearidade do fluxo de Hubble.

A “Nucleosíntese Primordial” (NP), trecho da teoria que propõe em que período foram sintetizados os primeiros núcleos atômicos; em conjunto com a “expansão cósmica” e o “espectro de potência da CMB”, formam os três pilares observacionais mais importantes do modelo padrão da cosmologia, popularmente conhecido como “modelo do *Big Bang*”.

2.1.1 Nucleosíntese Primordial

O Universo primordial como sendo uma “sopa cósmica” extremamente quente dominada pela radiação não permitiu a síntese de quaisquer elementos (ainda que leves) no princípio. Com a expansão, entretanto, ao mesmo tempo que o Universo esfriou, permitiu a criação dos primeiros elementos leves a partir dos núcleos de hidrogênio presentes no plasma primordial. As reações regidas pela interação fraca determinam a interconvenção entre nêutrons e prótons, o que determina a quantidade de ^4He sintetizada. Já as reações nucleares determinam a relação entre o número de fótons e bárions, bem como o número de espécies de neutrinos; e regulam a produção/destruição de outros elementos leves.

A razão entre as abundâncias dos elementos leves é um teste para as equações de Einstein e, por conseguinte, para o modelo expansionista do “*Big Bang*”.

Segundo cálculos associados à síntese primordial, entre os instantes $t \simeq 0,01s$ e $t \simeq 100s$, a temperatura do Universo caiu de $T \simeq 10\text{MeV}$ para $T \simeq 0,1\text{MeV}$ e houve a formação de ^3H , ^3He , ^4He e ^7Li a partir dos nêutrons e prótons presentes no plasma primordial.

A componente bariônica do Universo é composta por cerca de 75% de ^1H , cerca de 25% de ^4He e menos de 1% de outros elementos [36].

2.1.2 A “*Cosmic Microwave Background*” (CMB)

Há uma concordância geral da comunidade científica no sentido de que, fótons provenientes da CMB, fornecem uma evidência independente da estrutura do Universo em largas escalas, indicando que no passado, o Universo era muito mais denso, quente e expandiu adiabaticamente esfriando como um corpo negro ($T \propto a^{-1}$).

A CMB na faixa de microondas, descoberta por Penzias e Wilson em 1965 [13], provém de um Universo primordial composto por partículas elementares e radiação com altíssimas energias.

Entretanto, tal descoberta não constitui por si só uma prova cosmológica da natureza da CMB. Se o Universo partiu de um estado altamente denso, homogêneo e isotrópico, a previsão mais simples deste modelo é que a temperatura desta radiação de corpo negro sempre tenha sido espacialmente uniforme e mais alta no passado. Este resultado fornece um suporte poderoso para a teoria do *Big Bang*.

Atualmente, a temperatura desta CMB é conhecida com muito boa precisão graças aos dados obtidos pelo experimento COBE (“Cosmic Background Explorer”). Tais dados estabelecem $T_{\text{COBE}} = 2,728 \pm 0,002\text{K}$. As medidas feitas pelo COBE determinam a isotropia da natureza de corpo negro do espectro com altíssimo grau de precisão.

Para $T \geq 4000\text{K}$, os fótons da CMB tinham energia acima da necessária para ionizar a matéria (H). Neste cenário, elétrons, prótons e fótons estavam fortemente acoplados, gerando a “sopa cósmica” mencionada anteriormente. A partir de quando $T \sim 10\text{eV}$, energia de ionização do átomo de H, passaram a ser formadas as primeiras estruturas atômicas ligadas. Embora a temperatura tenha se reduzido consideravelmente, a alta entropia do Universo atrasou o processo de formação de átomos ligados até $T_{\text{rec}} \sim 0,29\text{eV}$ (o que se dá em $z \sim 1360$). Nesse momento, a fração de prótons (H ionizado) é igual à de matéria neutra.

Ao “período da recombinação” corresponde a largura da última superfície de espalhamento: período em que os fótons da CMB param de interagir com os bárions e o Universo se torna transparente. Assim, a CMB traz consigo as impressões de como era o Universo naquela época.

A partir de estudos feitos sobre a CMB, pode-se reconstituir a história cósmica dos últimos bilhões de anos relacionando tempo e temperatura. Esse fundo em microondas é, como já fora mencionado, notavelmente isotrópico.

O primeiro tipo de anisotropia medida na CMB corresponde a uma flutuação de temperatura entre dois pontos em lados opostos do céu ($\theta \sim 180^\circ$). Esta anisotropia é chamada “anisotropia de dipolo” e é devida ao movimento da nossa Galáxia em relação ao referencial comóvel do Universo, referencial este no qual a CMB é perfeitamente

isotrópica.

Outras flutuações na temperatura da CMB são geradas pela interação da radiação com outros constituintes do Universo (“anisotropias primárias”); com a variação no potencial gravitacional do Universo devido à expansão (“anisotropias secundárias”) ou ainda devido à alguma fonte local de radiação eletromagnética (“anisotropias terciárias”).

As anisotropias primárias e secundárias medidas hoje, estão relacionadas aos efeitos descritos a partir da relação [40; 41]

$$\Delta_T(t_0) = \frac{\delta}{3}(t_d) + \Phi(t_d) + n^i v_i(t_d) + 2 \int \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t) dt, \quad (2.4)$$

em que $\delta(t_d)$ corresponde às flutuações na densidade da matéria quando do desacoplamento; $\Phi(t_d)$ corresponde ao potencial gravitacional neste mesmo instante; $n^i v_i(t_d)$ é a contribuição das velocidades de cada elemento do fluido material no instante do desacoplamento (“Efeito Sachs-Wolfe”) e, por fim, a integral representa o termo chamado de “Efeito Sachs-Wolfe Integrado”: contribuição associada com a variação do potencial gravitacional do momento do desacoplamento até hoje.²

É sabido, da óptica geométrica, que a relação entre a escala angular e o tamanho da perturbação na última superfície de espalhamento depende da curvatura espacial e da distância até essa superfície. Distâncias causalmente conectadas subtendem um tamanho angular de $\theta \approx 1^\circ$ na última superfície de espalhamento. A detecção das anisotropias dos potenciais gravitacionais despertou a busca por experimentos em escalas angulares cada vez menores. Comparando as medidas dos picos de flutuações acústicas com as previsões teóricas, teremos estimativas precisas para valores de muitos parâmetros cosmológicos.

O modelo cosmológico que melhor se ajusta ao cenário tal em que são levados em conta dados da CMB; dados sobre SNe Ia; oscilação acústica de bárions e a “planura” das seções espaciais é o chamado modelo Λ CDM, o que justifica ser este mesmo modelo denominado “modelo de concordância cósmica” (vide figura 2.3).

2.2 O “Setor Escuro” do Universo

A percepção de que o Universo expande aceleradamente sugere que o mesmo deva ter em sua composição mais algum agente no mult fluido cosmológico, com pressão negativa, denominada arbitrariamente de “Energia Escura” (ou “quintessência”). Esta componente contribuiria com cerca de 73% do conteúdo energético cósmico³. Devemos considerar ainda que o parâmetro de densidade da “Matéria Escura” contribui com aproximada-

²Esse efeito descreve a interação sofrida pela radiação desde o momento em que desacoplou até a sua observação.

³O candidato mais antigo para essa quantidade é a constante cosmológica.

mente 23% deste mesmo conteúdo cósmico, sendo atrativa gravitacionalmente.

Para ajudar na compreensão da Natureza e concordar com as mais recentes observações cosmológicas, precisamos focar nos dois principais constituintes do conteúdo cósmico, constituintes estes que tem a forma de agentes escuros.

Matéria Escura

A matéria escura fria ou CDM (acônimo inglês para “Cold Dark Matter”), que há décadas não passava de uma especulação, agora (mais precisamente a partir de 1998) é admitida como ingrediente essencial na cosmologia. Sua principal característica é se aglomerar em escalas que vão desde o tamanho da Terra até filamentos com dezenas de Mpc; servindo para explicar, entre muitas outras coisas, distorções em curvas de rotação de galáxias. É esta componente que controla o crescimento das estruturas no *cosmos*, além de justificar a dispersão de velocidades (ou o surgimento de arcos gravitacionais) em aglomerados de galáxias. Além disso, a presença de matéria escura fria no espaço justifica algumas distorções no espectro de potência da CMB.

Em linhas gerais, temos diversas razões para acreditar que matéria não-relativística se apresenta de duas formas distintas: matéria ordinária (elétrons, prótons e nêutrons) com massas relacionadas à energia segundo a relação $E = mc^2$ e matéria não-bariônica (CMB detectada apenas através da sua ação gravitacional no meio em que se distribui). Estima-se que, aproximadamente 90% de toda a matéria do Universo seja escura.

A primeira evidência observacional da existência de uma componente material não-detectada remonta à década de 1930 e foram as medidas de velocidade de galáxias nos aglomerados de Coma e Virgo, feitas em [42; 43]. Tais medidas indicavam que se estes aglomerados estavam gravitacionalmente ligados, sua massa total deveria ser algumas ordens de magnitude maior do que a massa indicada pela soma da matéria luminosa existente no interior destas galáxias.

No gráfico abaixo, fica clara a discrepância entre os resultados esperados teoricamente e as observações (van Albada *et al.* (1987)).

A curva de rotação da galáxia NGC3198, como esperado, para baixos raios obedece o comportamento de corpo rígido. Já para grandes raios, a Lei Kepleriana não é satisfeita. A diferença entre as duas curvas para grandes raios é uma medida que indica a ação de alguma forma de “matéria escura” [44]. Em outras palavras, tal resultado pode ser interpretado como que havendo matéria não-luminosa entre as galáxias, formando um “halo escuro”.

Estes resultados sugerem que alguma matéria não-luminosa deva dominar as partes externas das galáxias.

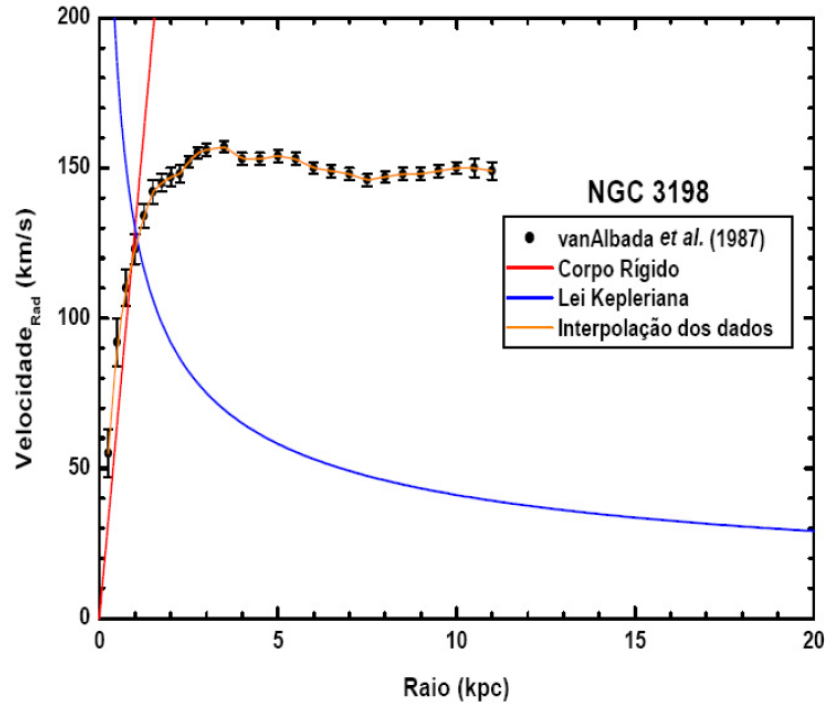


Figura 2.1: Diferença entre modelos previstos pela Lei Kepleriana; corpo rígido e dados obtidos por van Albada *et al.*

Energia Escura

Nos últimos anos do século XX, evidências observacionais provenientes de observações sobre supernovas do tipo Ia em altos *redshifts* indicaram estar o Universo se expandindo aceleradamente. Os dados observacionais são consistentes com a ação de outro agente de natureza “escura”, tal como uma constante cosmológica (positiva). Sua contribuição para a densidade total de energia do Universo é em torno de 70% da densidade crítica. A ação desta energia escura implica estarmos em uma era cosmológica dominada por essa “quintessência”.

A quebra do paradigma cosmológico (modelo de Einstein-de Sitter com CDM) vem gerando na comunidade uma verdadeira corrida por um novo modelo padrão cosmológico. A ausência de algum direcionamento da teoria da física de partículas sobre a natureza dessa componente escura origina importantes dúvidas sobre quanto especulativa é a natureza desta componente. Assim como no caso da matéria escura, não temos conceitos físicos bem formados sobre seus aspectos fundamentais, mas tão somente, uma idéia de seus aspectos dinâmicos⁴.

De qualquer maneira, a questão mais intrigante deste século foi, sem dúvidas, a observação da expansão acelerada do *cosmos* exigindo a ação de uma quintessência, por ser essa expansão contra-intuitiva e tocar em estruturas tão fundamentais quanto a

⁴Sabe-se, no geral, bem mais sobre a matéria escura do que sobre a energia escura.

Relatividade Geral e a Física de Partículas.

Perceba que a energia escura age expandindo o Universo como na “Era da Inflação”.(Uma digressão sobre o tópico “Inflação” se encontra feita no apêndice B).

2.3 Os Dados de Supernovas IA

Nesta seção pretendemos apresentar de forma sucinta as explosões estelares denominadas “supernovas” e seu uso como velas padrão astronômicas; bem como apresentar uma visão geral sobre os dados que nos permitiram determinar a expansão e aceleração do Universo e que, além disso, permitem restringir os valores para vários parâmetros cosmológicos.

2.3.1 Supernovas

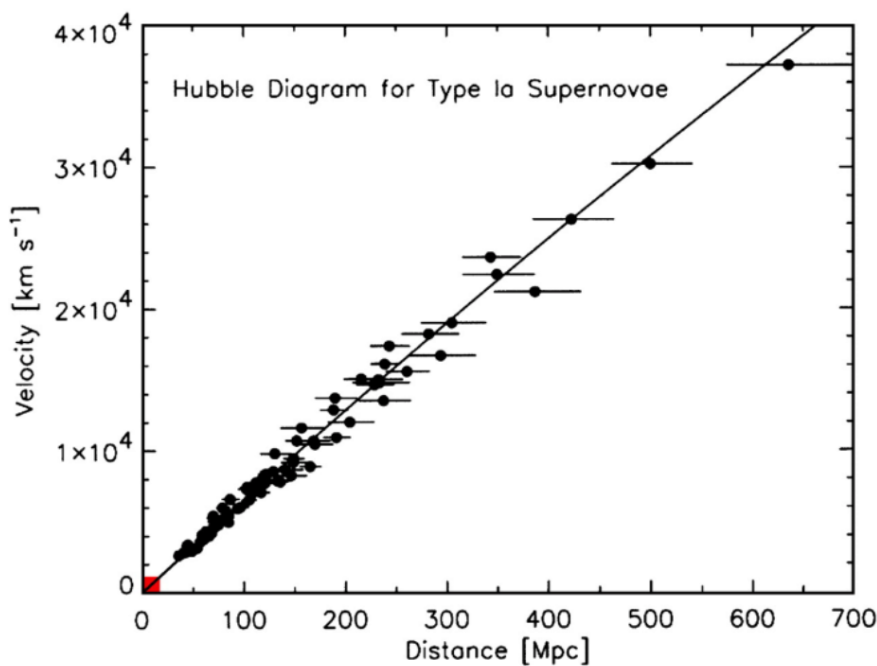


Figura 2.2: Gráfico das relações entre velocidade e distância. A pequena área em vermelho próxima à origem corresponde ao “Diagrama de Hubble” original. Embora o progresso tenha sido notável em relação às observações originais feitas por Hubble, até o início dos anos 90, esses resultados estavam ainda de acordo com um Universo desacelerado. [3].

Quando a queima do combustível interno de uma estrela não produz pressão de radiação suficiente para evitar o colapso gravitacional da sua massa, a estrela “cai” sobre seu próprio peso. Este colapso pode dar início a reações termonucleares fora de controle que fazem a estrela explodir expelindo grande parte da sua massa e emitindo, durante a explosão e nos instantes subseqüentes, muito mais radiação do que emite milhões ou bilhões de estrelas. Durante a explosão, a luminosidade da estrela pode ser comparada

à luminosidade de uma grande galáxia.

As supernovas ejetam, durante a explosão, material com energia cinética da ordem de 10^{50}J a 10^{51}J atingindo luminosidade de até 10^{10}ergs . As explosões ocorrem devido à ignição explosiva do carbono [45] pelas estrelas de massas intermediárias; ou por colapso gravitacional para estrelas mais massivas.

Uma estrela que explode em supernova pode se tornar (i) uma anã branca; (ii) uma estrela de nêutrons ou (iii) um buraco negro.

As supernovas do tipo Ia são associadas à queima explosiva do carbono em uma anã-branca de um sistema binário que, tendo massa próxima ao limite de estabilidade de Chandrasekhar, recebe massa da companheira e, assim, ultrapassam esse limite e explodem.

A curva de luz, gráfico da luminosidade absoluta pela taxa de decaimento do brilho, das supernovas do tipo Ia é muito similar de uma supernova para outra. Por isso e por seu brilho bastante intenso (grande luminosidade) elas são utilizadas como velas padrão cósmicas (ou indicadores de distâncias de galáxias).

As SNe Ia também são usadas para restringir os valores do parâmetro de densidade da matéria (Ω_m); da densidade da energia escura (Ω_{DE}); e do parâmetro da equação de estado (ω), entre outros.

2.3.2 As Supernovas e a aceleração

Em 1998, dois grupos de pesquisa [46?] observando supernovas do tipo Ia distantes para determinar o valor do parâmetro de Hubble e do parâmetro de desaceleração, fizeram uma descoberta intrigante e inesperada.

A partir do diagrama da distância-luminosidade versus *redshift* (ou diagrama de Hubble-Sandage) para estes objetos, percebeu-se que as SNe Ia estavam se afastando de nós (observadores) com velocidades maiores do que as esperadas e, com isso, que curvas teóricas com um parâmetro de desaceleração positivo (Universo se expandindo desaceleradamente) não se ajustavam aos dados observacionais.

Então, se as hipóteses acerca das curvas de luz das supernovas Ia estão corretas, a conclusão óbvia é que o Universo está se expandindo aceleradamente. A expansão acelerada, de 1998 para cá, tornou-se um fato observacional bem consolidado.

2.4 A História Térmica do Universo

Durante o final da década de 1940 e início da de 1950, G. Gamow e seus alunos criaram as bases do modelo do “*Big Bang*” [12; 47; 48; 49].

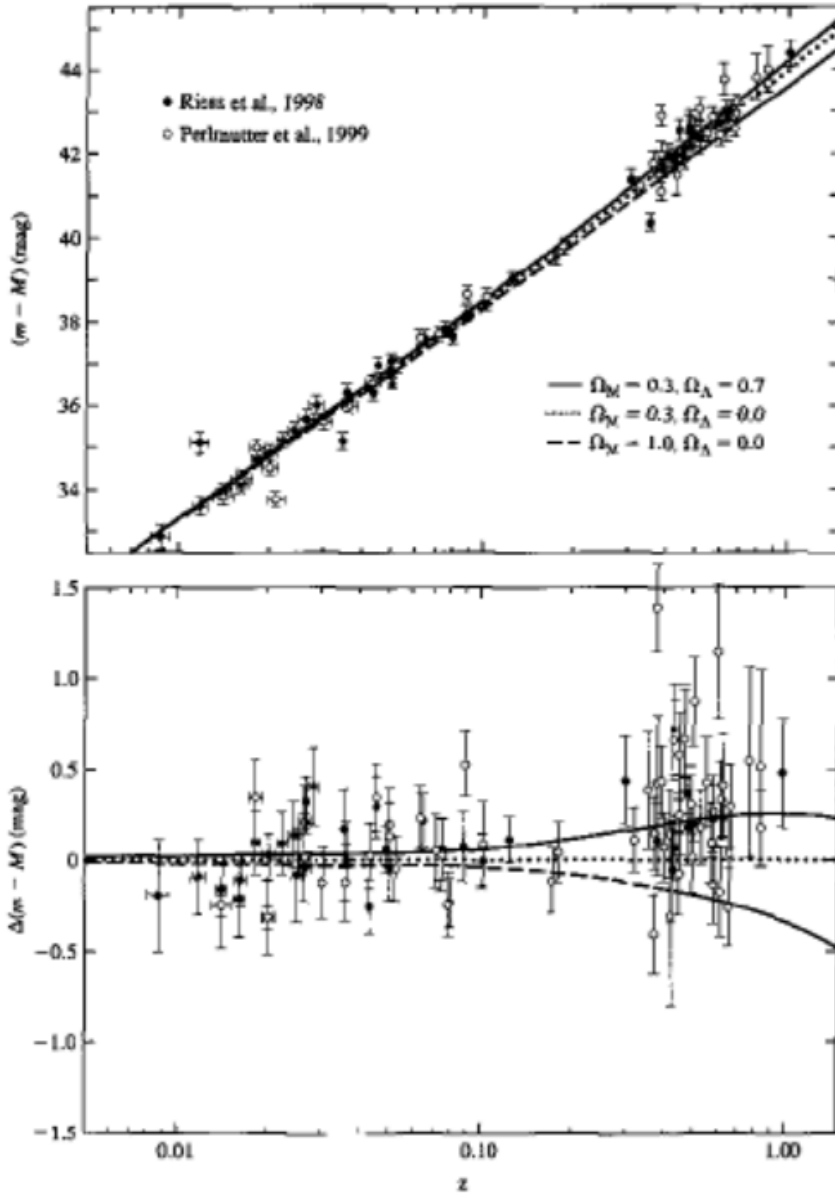


Figura 2.3: Módulo da distância versus redshift para SNe Ia. O “Supernova Cosmology Project” e dados da equipe “Supernova High-2” mostram a diferença entre os dados e as previsões de um modelo com curvatura negativa $\Omega_{m,0} = 0,3$. O painel inferior mostra a diferença entre os dados e as previsões de um modelo de curvatura negativa $\Omega_{m,0} = 0,3$.

Nesta modelagem, no início o Universo é uma “sopa cósmica” de partículas, dominado pela radiação, que expande e esfria à medida que o tempo passa. Os cálculos da síntese dos primeiros elementos dependem da relação entre temperatura, taxa de expansão e taxas de reações fracas e nucleares. A taxa de expansão é determinada pelas equações de Friedmann. Desta forma, a razão entre as abundâncias dos elementos gerados quando da NP, são um teste para as equações de Einstein. As reações regidas pela interação fraca determinam a quantidade de ^4He sintetizada. Já as reações nucleares determinam a relação entre o número de bárions e fótons (bem como o número de espécies de neutrinos) e regulam a produção e destruição dos outros elementos leves.

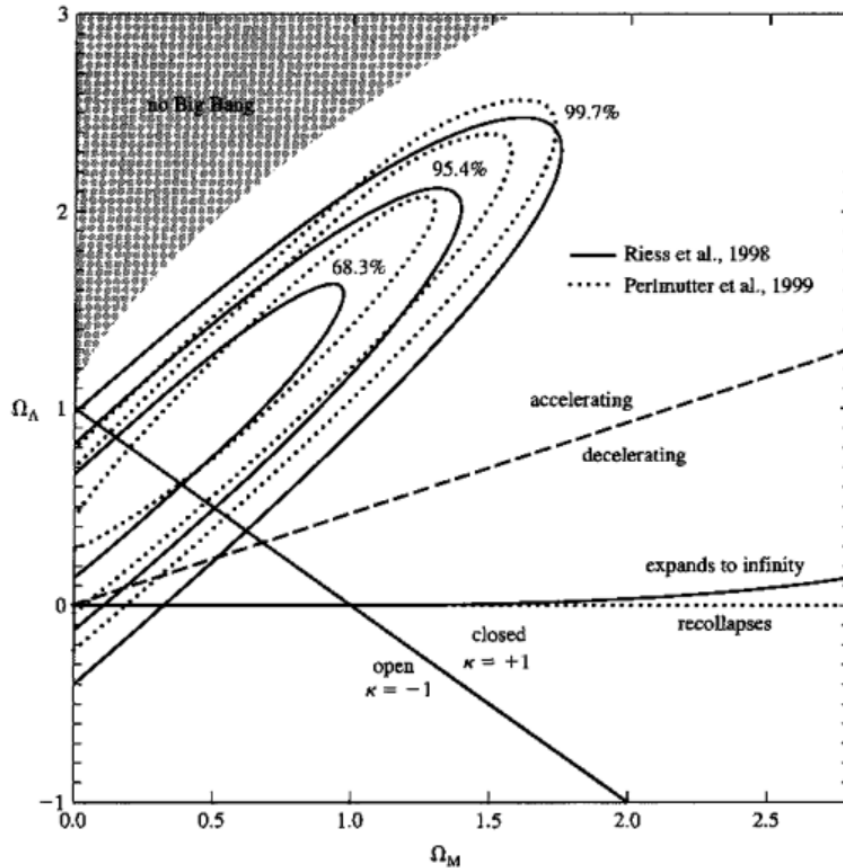


Figura 2.4: Os valores de Ω_M (eixo horizontal) e Ω_Λ (eixo vertical) que melhor se ajustam aos dados mostrados na Figura 2.4. As curvas ovais sólidas mostram os valores de melhor ajuste para os dados do High-z; as curvas ovais pontilhadas mostram os valores de melhor ajuste para a Supernovas do projeto Cosmology Project data [4].

De acordo com o cenário padrão, os estágios de evolução temporal do Universo são:

a) Singularidade

Instante em que todo o nosso Universo, conteúdo material e energético, ocupavam um volume com dimensões desprezíveis. Há controvérsias em literatura conquanto à singularidade, mas é consenso que, para o Universo nesse instante, as leis da física não se aplicam, já que T , ρ e pressão \hat{P} divergem. É provável, neste entendimento, que o Universo tenha surgido de uma flutuação quântica em que a energia do Universo e a duração desta flutuação estejam relacionadas pelo princípio da incerteza ($\Delta E \Delta t \sim \hbar$).

b) Era de Planck

Período compreendido entre a singularidade e o tempo de Planck, $t_P = 10^{-43}$ s. Nesta fase, todas as interações da natureza estão unificadas em uma só interação; e só se pode descrever o Universo nesta era a partir de uma teoria quântica da gravidade, teoria essa que ainda não foi desenvolvida.

c) Era da grande unificação

Era na qual a interação gravitacional se separa das outras interações. O Universo

começa essa era com $T > 10^{28}\text{K}$. Quando o Universo atinge essa temperatura, ocorre a separação da gravidade das outras interações e há uma transição de fase que dá início à inflação, próxima era do Universo.

d) Inflação cósmica (apêndice B)

É a fase compreendida entre 10^{-36}s e 10^{-34}s . Nesse período, a densidade de energia do Universo é dominada pelo falso vácuo de um campo quântico que faz o volume do Universo aumentar por um fator de 10^{60} vezes. O Universo emerge da inflação dominado por radiação e localmente quase homogêneo e isotrópico.

e) Era da Radiação

É a era que vai de 10^{-34}s a 3.10^5 anos. Nesta fase há formação de elementos leves (D, ^3He , ^4He e Li) na nucleosíntese primordial. As flutuações na densidade da matéria escura começam a colapsar para formar as primeiras estruturas gravitacionalmente ligadas. Aqui ainda ocorre o desacoplamento entre matéria bariônica e radiação (Universo fica transparente), no que é chamado “última superfície de espalhamento”.

f) Era da Matéria

Depois que os fótons da CMB desacoplam da matéria bariônica, o Universo entra na era da matéria: período que compreende entre 3.10^5 anos até o período de transição entre expansão desacelerada e acelerada do Universo. No início da era da matéria há a reionização dos átomos do Universo. A matéria bariônica passa a sentir a atração gravitacional dos poços de potencial da matéria escura, que foram formados quando da era da radiação; e as flutuações do fluido de bárions se desacoplam da expansão dando início à formação de estrelas, galáxias entre outros.

g) Era da expansão acelerada

Medidas feitas sobre supernovas do tipo Ia em altos *redshifts* apontam para que nos estágios mais recentes do Universo, a expansão passou de um regime desacelerado para outro acelerado (“era da energia escura”).

2.5 Problemas no modelo ΛCDM

São problemas conceitualmente bem justificados no modelo ΛCDM :

- **Constante Cosmológica** [50]:

A explicação mais simples para a natureza da energia escura é que se trata da energia do vácuo, ou seja, a energia intrínseca ou fundamental de um certo volume de espaço “vazio”. A esta energia corresponderia, na TRG, o efeito da constante cosmológica Λ . As observações relativas às supernovas e que conduzem à conclusão

de que o Universo está em expansão acelerada são consistentes com um valor muito pequeno e positivo para esta constante, da ordem de 10^{-29} g/cm³.

O problema da constante cosmológica consiste no fato de que a teoria quântica de campos preve um valor muito maior para esta constante, a partir do cálculo da energia do vácuo quântico. De fato, em mecânica quântica, pares de partículas e anti-partículas estão constantemente sendo criadas a partir do vácuo, e embora estes pares existam durante um intervalo de tempo extremamente curto antes de se aniquilarem mutuamente, este processo contribui para a energia do vácuo, obtendo-se um valor que, dependendo da teoria que se utiliza, pode ser 120 ordens de grandeza maior do que o valor mencionado acima e necessário para explicar as observações. Este é visto atualmente como um dos problemas fundamentais da Física e não existe no momento nenhuma solução amplamente aceita. É um problema em aberto.

- **Coincidência Cósmica** [51]:

Outra questão relacionada com a constante cosmológica é o chamado problema da coincidência cósmica. Esta questão consiste no fato de que existe uma coincidência aproximada para valores da densidade de energia do vácuo e da densidade de matéria no Universo atual. Isto é particularmente estranho tendo em vista que o balanço relativo entre estas energias varia rapidamente à medida que o Universo se expande. De fato, no Universo primordial a energia do vácuo era desprezível em comparação com a matéria enquanto que recentemente a situação inverteu-se com a energia do vácuo passando a dominar. Existe então um período relativamente curto na história do Universo em que estas densidades de energia são comparáveis e parece uma coincidência estranha que esse período seja precisamente em torno do presente.

- **Tensão de Hubble** [52, 53, 54, 55]

Desde que os resultados de diferentes experimentos cresceram em precisão, começaram a surgir alguns pontos de tensão quanto ao valor de H_0 . O mais importante deles é a diferença entre as medições da constante de Hubble a partir de dados da CMB (grandes *redshifts*) e medidas locais baseadas em Cefêidas e supernovas (baixos *redshifts*). Medidas de H_0 feitas em altos *redshifts* se mostram menores do que as feitas em baixos *redshifts* independentemente do modelo cosmológico adotado. A discrepância entre os valores de H_0 obtidos pelos dois métodos vem crescendo desde 2011. Em [55] foi obtido $H_0 = 73,8 \pm 2,4$ km/s/Mpc usando Cefêidas e supernovas; enquanto em [56] obteve-se $H_0 = 74,1 \pm 2,2$ km/s/Mpc. Esse último resultado provém de análise de dados para *redshifts* intermediários ($z \approx 1$); e tal como o Planck, é também dependente do modelo Λ CDM. Na mesma época

destas publicações, as colaborações WMAP e Planck obtiveram, a partir de dados da CMB os valores $H_0 = 70,0 \pm 2,2$ km/s/Mpc e $H_0 = 67,4 \pm 1,4$ km/s/Mpc respectivamente, com incertezas da ordem de 2%. Note-se que os dados da CMB sobre o valor de H_0 são compatíveis entre si; embora não o sejam para dados obtidos para baixos *redshifts* (vide figura a seguir). Utilizando dados de 70 Cefeidas imagiadas na grande Nuvem de Magalhães, a colaboração SHOES chegou a $H_0 = 74,03 \pm 1,42$ km/s/Mpc; valor a ser comparado com o obtido pelo Planck: $H_0 = 67,4 \pm 0,5$ km/s/Mpc. Tais resultados apontam para que $\Delta H_0 = 6,6 \pm 1,5$ km/s/Mpc; muito além de uma discrepância aleatória. Esses resultados foram compilados por W. Freedman (2012) e posteriormente, complementados por [57] - ver figura abaixo:

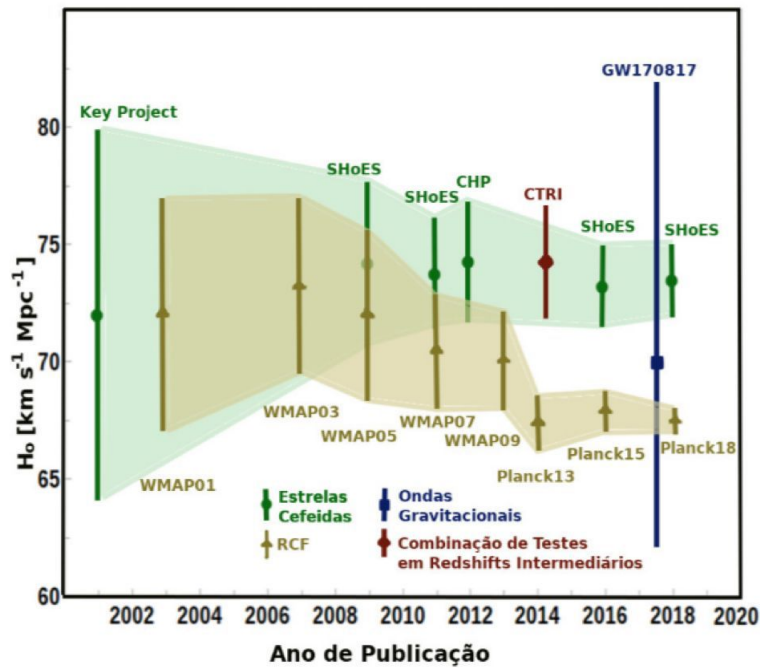


Figura 2.5: *Evolução da Tensão em H_0 . Pontos e região sombreada de verde foram obtidos com Cefeidas e Supernovas, enquanto os da região creme são determinados pelas medidas da CMB. O ponto em vermelho está relacionado a uma combinação de testes em redshifts intermediários. A barra azul é uma medida com ondas gravitacionais (adaptado de [5]).*

Embora a discrepância esteja bem determinada, a sua explicação ainda permanece desconhecida. A cosmografia de “*time delay*” (TDSL: *Time Delay Strong Lensing*) utiliza atrasos de tempo devidos ao efeito de lentes gravitacionais na determinação do valor para H_0 . Supondo um modelo Λ CDM plano, o projeto *HoliCow*, em colaboração com o *Cosmograil*, obteve, para o quasar QSO 1206+4332, com precisão de 3%, $H_0 = 72,5_{-2,3}^{+2,1}$ km/s/Mpc. Esta medida embora independente da escala de distância cósmica e de outros testes cosmológicos, é, também, dependente do modelo Λ CDM. Não se sabe se o resultado acima resolve o problema da tensão sobre H_0 , de modo que, talvez, a decisão definitiva para esta tensão venha com o

telescópio LSST (*Large Synoptic Survey Telescope*). Dotado de um espelho de 8,4 metros, este telescópio está projetado para entrar em operação em 2023. O LSST será capaz de mapear todo o céu visível. A tensão SNe-CMB de uma década atrás ($2,6 \sigma$) era muito menor do que a atual ($5,4 \sigma$) o que sugere problemas de calibração. Uma possibilidade de reduzir a discrepância é pondo um erro na temperatura T_0 da CMB. Alguns autores tem argumentado que neste caso parte das discrepâncias são consideravelmente reduzidas.[58].

- **Tensão σ_8** [59]:

Esta nova tensão está relacionada com a discrepância existente entre os dados do Planck com medições de lentes gravitacionais fracas e amostras de *redshift* de galáxias sobre o valor do parâmetro de densidade da matéria; e a taxa de crescimento de estruturas. Embora a tensão possa ser devida a erros sistemáticos, a discrepância tem crescido e pode também estar indicando a possibilidade de uma nova física além do modelo cosmológico padrão [59].

2.6 Breves Considerações

No presente capítulo discorremos sobre as características principais associadas ao modelo Λ CDM. Primeiramente tratamos da nucleosíntese primordial, importante teste para as equações de Einstein. Em seguida caracterizamos fisicamente a CMB: *Cosmic Microwave Background*. Tratamos ainda das componentes de natureza “escura” antes de tratarmos os dados correspondentes a supernovas Ia que apontam para a expansão acelerada do Universo. Por fim, elencamos os principais problemas de natureza conceitual correspondentes ao modelo de concordância cósmica.

Capítulo 3

Modelos com Criação de Matéria

Conforme mencionado nos últimos capítulos, um grande número de observações de distintas naturezas vêm acumulando evidências de que o Universo seja homogêneo e isotrópico em largas escalas; acelerado e com secção espacial plana. Embora a expansão acelerada venha sendo corroborada por diversas observações, o mecanismo a que se deve essa evidência fenomenológica ainda não é compreendido, abrindo espaço para a discussão de diversas propostas.

Os modelos com criação de matéria vêm se mostrando bastante convidativos na reprodução da dinâmica do modelo Λ CDM, de modo que a expansão acelerada do Universo se justifica, nestes modelos, através da ação da chamada pressão de criação (P_c); pressão esta associada diretamente ao processo de criação de matéria.

Iniciaremos o presente capítulo discutindo as diferenças e semelhanças entre os processos de criação de matéria e ação da viscosidade volumar. Posteriormente discutiremos o cenário com criação de matéria escura fria no qual apresentamos o cenário conhecido na literatura como “modelo Lima, Jesus & Oliveira” (LJO).

3.1 Pressão de Criação \times Viscosidade Volumar

Nesse contexto, comparemos as expressões para a pressão de criação e pressão viscosa¹.

A pressão de criação introduzida por Prigogine [1] e rediscutida, em 1990, por Ademar e colaboradores [60], considera que o processo dissipativo de criação é homogêneo e isotrópico. Portanto, é interessante diferenciar a pressão de criação da viscosidade volumar, o único processo dissipativo clássico permitido pelas simetrias da métrica FLRW.

Considere

$$N_{;\mu}^{\mu} = (nu^{\mu})_{;\mu} = \dot{n} + n\Theta = n\Gamma \Rightarrow \boxed{\dot{n} = (n\Gamma - n\Theta)}. \quad (3.1)$$

¹Perceba que aqui está sendo tratado do caso de um fluido simples.

Da equação de balanço para a entropia:

$$S_{;\mu}^{\mu} = (n\sigma u^{\mu})_{;\mu} = \dot{n}\sigma + n\dot{\sigma} + n\sigma\Theta. \quad (3.2)$$

A equação de conservação para o tensor energia-momento nos permite inferir imediatamente que

$$u_{\mu}T_{;\nu}^{\mu\nu} = u_{\mu}[(\rho + P)u^{\mu}u^{\nu} + Pg^{\mu\nu}]_{;\nu} = 0 = \quad (3.3)$$

$$= -\dot{\rho} - (\rho + P)\Theta \quad (3.4)$$

Temos, portanto, uma variação temporal da densidade da forma que segue

$$\boxed{\dot{\rho} = -(\rho + P)\Theta}. \quad (3.5)$$

De modo que a pressão dinâmica P pode ser decomposta sob a forma

$$P = \hat{P} + \Pi, \quad (3.6)$$

em que a \hat{P} corresponde a pressão isotrópica do fluido em questão; e a Π um **termo de correção que aparece em processos dissipativos**.

Da primeira lei da termostática:

$$nT\dot{\sigma} = \dot{\rho} - \frac{\rho + \hat{P}}{n}\dot{n}. \quad (3.7)$$

Substituindo a (3.1) na (3.7)

$$nT\dot{\sigma} = -(\rho + P)\Theta - \frac{\rho + \hat{P}}{n}(n\Gamma - n\Theta) \quad (3.8)$$

$$\therefore \dot{\sigma} = -\frac{(\rho + P)\Theta}{nT} - \frac{\rho + \hat{P}}{n^2T}(n\Gamma - n\Theta). \quad (3.9)$$

Substituindo-se, por fim, a relação anterior na (3.2)

$$S_{;\mu}^{\mu} = \dot{n}\sigma + n\dot{\sigma} + n\sigma\Theta = \quad (3.10)$$

$$= (n\Gamma - n\Theta)\sigma + n\left(-\frac{(\rho + P)\Theta}{nT} - \frac{(\rho + \hat{P})}{n^2T}(n\Gamma - n\Theta)\right) + n\sigma\Theta. \quad (3.11)$$

Então [21],

$$S_{;\mu}^{\mu} = -\frac{(P - \hat{P})\Theta}{T} - \left(T\sigma - \frac{\rho + \hat{P}}{n}\right)\frac{n\Gamma}{T}. \quad (3.12)$$

Definindo-se

$$\mu = \left(T\sigma - \frac{\rho + \hat{P}}{n}\right), \quad (3.13)$$

chega-se, finalmente, a que:

$$\boxed{S_{;\mu}^{\mu} = -\frac{\Pi\Theta}{T} - \frac{\mu n\Gamma}{T}}. \quad (3.14)$$

Quando $\Gamma \neq 0$, mas $\mu = 0$ (fótons), Π é chamada pressão de criação. De fato, sabemos que um fluido de fótons pode expandir adiabaticamente [61].

3.2 CCDM: o Modelo com Criação de CDM

O modelo sem criação de matéria, que foi adotado como melhor ajuste comparativo para as observações atuais, é espacialmente plano e contém radiação, matéria e constante cosmológica. Como se tem visto, evidências indicam que a maior parte da matéria do Universo é não-bariônica: matéria escura fria. A matéria bariônica corresponde a $\Omega_{\text{bar},0} \approx 0.04$ do que é observado hoje ao passo que o que é estimado da matéria escura fria é por volta de seis vezes maior: $\Omega_{\text{dm},0} \approx 0.26$. A densidade dominante de energia, entretanto, não é determinada pelas radiação ou matéria, mas pela constante cosmológica, com $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} \approx 0.70$.

O modelo discutido nessa seção, e que será comparado com o modelo anteriormente descrito, foi proposto por Ademir [62] e Steigman [63]. No primeiro trabalho [62], os autores demonstraram que modelos com criação de matéria escura são capazes de acomodar dados de SNe Ia, além de resolver o problema da idade do Universo. Já no segundo trabalho [63] bárions foram incluídos no modelo com criação, bem como foi testada a evolução de tal modelo em altos *redshifts* tomando por vínculo o *redshift* de quando da igualdade entre matéria e radiação, dado este, por sua vez, obtido a partir de vínculos do WMAP no que se refere ao efeito Sachs-Wolfe Integrado.

A maior dificuldade destes modelos com criação de matéria vem do fato de que são espacialmente planos ($\Omega_{dm} + \Omega_b = 1$), não acomodando dados de *clusters* que apontam para ($\Omega_{dm} + \Omega_b \approx 0.3$). Tais resultados podem ser consultados em [24]. Outra deficiência é a expressão para a taxa de criação Γ .

Essas deficiências são resolvidas através de uma escolha adequada para a taxa de criação de matéria Γ . Em outras palavras é necessário entender como a taxa de criação pode afetar a densidade de matéria. Uma forma de se o fazer é admitindo que exista um parâmetro de densidade de matéria efetivo capaz de conciliar o modelo plano e as estimativas observacionais. A proposta para este Γ corresponde ao modelo originalmente proposto por Lima, Jesus e Oliveira (LJO) [25] em 2010.

3.2.1 A taxa de criação Γ no modelo LJO

A questão fundamental nos cenários cosmológicos com criação de matéria escura fria é a determinação da taxa de criação Γ . Na literatura, [62] e [63] discutiram uma proposta com $\Gamma \propto H$, na qual a taxa de criação não favorecia nenhuma época especial

durante a evolução do Universo. Em [62] ficou mostrado que o modelo proposto anteriormente é capaz de explicar tanto as observações de SNe Ia quanto resolver o problema da idade do Universo. Entretanto, ao inserir a componente bariônica no modelo, [63] mostrou-se existir uma tensão entre os vínculos em baixos e altos *redshifts*, desafiando a viabilidade deste modelo.

Se por um lado, nos modelos CCDM a aceleração pode ser obtida de forma simples, a dificuldade primordial desta nova classe de modelos é entender como tais modelos planos ($\Omega_{(dm)} + \Omega_{(b)} = 1$) se comportam na aglomeração de estruturas, onde um grande número de observações desta natureza apontam para que $\Omega_{(dm)} + \Omega_{(b)} \approx 0.3$ [64, 65, 66]. Discutiremos como uma escolha adequada para Γ é capaz de contornar tais dificuldades.

Inicialmente, devemos observar que a aceleração é um fenômeno recente na história do Universo, isto é, durante a fase dominada pela radiação o fenômeno responsável pela aceleração deve ter sido inibido. Uma possibilidade interessante para a taxa de criação é, portanto, uma função inversamente proporcional à densidade de matéria escura.

Uma forma interessante para se determinar Γ considera que a dinâmica dos modelos Λ CDM deve ser recuperada.

As equações básicas correspondentes à dinâmica do modelo Λ CDM são as duas equações de Friedmann (1.21) e (1.22):

$$8\pi G(P_{(v)} + \rho_{(v)}) = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 3H^2, \quad (3.15)$$

$$8\pi GP_{(v)} = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (3.16)$$

e

$$\rho_v = -P_{(v)} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \Rightarrow -8\pi GP_{(v)} = \Lambda \quad (3.17)$$

em que $P_{(v)}$ e $\rho_{(v)}$ representam, respectivamente, as pressão e densidade do vácuo.

Logo,

$$\boxed{2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Lambda}. \quad (3.18)$$

Consideremos também as equações básicas do modelo CCDM ($P_{(dm)} = 0$):

$$8\pi G\rho_{(dm)} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (3.19)$$

$$8\pi GP_c = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (3.20)$$

e

$$P_c = -\rho_{(dm)}\frac{\Gamma}{3H}. \quad (3.21)$$

Substituindo a (3.19) na equação (3.18) e depois na (3.21),

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G P_c = 8\pi G \left(-\rho_{(dm)} \frac{\Gamma}{3H} \right). \quad (3.22)$$

$$\therefore -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{8\pi G \rho_{(dm)}}{3H} \Gamma = 0. \quad (3.23)$$

Da relação

$$8\pi G \rho_{(dm)} = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} \Rightarrow \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho_{(dm)}}{3} \therefore \frac{8\pi G \rho_{(dm)}}{3H} = H. \quad (3.24)$$

Logo,

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \Gamma H = 0 \therefore \boxed{2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Gamma H}. \quad (3.25)$$

Comparando as equações (3.18) e (3.25) podemos obter o valor de Γ :

$$\Gamma H = \Lambda. \quad (3.26)$$

Como

$$\Lambda = 3H_0^2 \Omega_\Lambda \quad \text{em que} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho(v)}{\rho_{c0}}, \quad (3.27)$$

defina $\alpha \equiv \Omega_\Lambda = \text{constante}$. Substituindo na (3.26):

$$\Gamma \equiv \frac{\Lambda}{H} = 3\frac{H_0^2}{H} \alpha = 3\frac{H_0^2 \alpha H}{H^2}. \quad (3.28)$$

Por outro lado, da equação (3.19),

$$8\pi G \rho_{(dm)} = 3H^2, \quad (3.29)$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{3H_0^2 \alpha}{\left(\frac{8\pi G \rho_{(dm)}}{3}\right)} = \frac{3H_0^2 \alpha 3H}{8\pi G \rho_{(dm)}} = 3\alpha \left(\frac{3H_0^2}{8\pi G \rho_{(dm)}} \right) H. \quad (3.30)$$

Da definição para ρ_{c0} ,

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (3.31)$$

$$\therefore \boxed{\Gamma = 3\alpha \left(\frac{\rho_{c0}}{\rho_{(dm)}} \right) H}. \quad (3.32)$$

A essa proposta para Γ corresponde o chamado “modelo LJO: Lima, Jesus e Oliveira”.

Logo, substituindo este Γ na expressão (3.19) temos

$$P_c = -\frac{\rho_{(dm)}}{3H} \Gamma \Rightarrow P_c = -\alpha \rho_{c0}, \quad (3.33)$$

em que foi considerado que $P_{(dm)} = 0$.

A partir daí, chega-se à seguinte equação de balanço para a densidade de matéria escura fria levando-se em conta a criação de partículas

$$\dot{\rho}_{(dm)} + 3H\rho_{(dm)} = \Gamma\rho_{(dm)} = 3\alpha H \frac{\rho_{c0}}{\rho_{(dm)}} \rho_{(dm)} = 3\alpha H \rho_{c0}, \quad (3.34)$$

cuja solução é dada por:

$$\rho_{(dm)} = (\rho_{(dm0)} - \alpha\rho_{c0})(1+z)^3 + \alpha\rho_{c0}. \quad (3.35)$$

O parâmetro de Hubble do modelo é obtido inserindo-se na equação (3.35)

$$\rho_b = \rho_{b0}(1+z)^3, \quad (3.36)$$

nas equações de Friedmann [25]

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = (\Omega_{(m)} - \alpha)(1+z)^3 + \alpha + (1 - \Omega_{(m)})(1+z)^2, \quad (3.37)$$

onde definimos:

$$\Omega_{(m)} \equiv \Omega_{(dm)} + \Omega_{(b)}. \quad (3.38)$$

Analogamente, a expressão conhecida para Λ CDM é

$$\left(\frac{H_{\Lambda\text{CDM}}}{H_0}\right)^2 = \Omega_{(m)}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda} + (1 - \Omega_{(m)} - \Omega_{\Lambda})(1+z)^2. \quad (3.39)$$

Comparando-se as (3.37) e (3.39), chega-se a que

$$\alpha = \Omega_{\Lambda} \quad (3.40)$$

e, do primeiro termo,

$$\Omega_{mef} \equiv \Omega_{(m)} - \alpha. \quad (3.41)$$

de modo que o termo Ω_{mef} representa o valor efetivo para a massa do sistema considerado.

Se a “planura” espacial é imposta, como prevista pela inflação e sugerido por dados da CMB, temos $\Omega_{(m)} = 1$. Então a (3.37) se reduz a

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = (1 - \alpha)(1+z)^3 + \alpha. \quad (3.42)$$

Agora $\Omega_{mef} = 1 - \alpha$.

Para começar, partindo-se das equações de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho_{(b)} + \rho_{(dm)} + 3P_c) \quad (3.43)$$

como $P_c = -\alpha\rho_{c0}$ [25]

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_{c0} [(\Omega_{(b)} + \Omega_{(dm)} - \alpha) (1+z)^3 - 2\alpha] . \quad (3.44)$$

Quando essa expressão vai a zero, encontramos o “*redshift* de transição”:

$$z_t = \left(\frac{2\alpha}{\Omega_{(m)} - \alpha} \right)^{1/3} - 1 . \quad (3.45)$$

Naturalmente, para se estimar o *redshift* de transição é necessário vincular o valor de α às observações.

Os autores de [25] usaram como vínculos dados de supernovas distantes para determinar o valor de α . O módulo de distância de uma supernova a determinado *redshift*, dado o conjunto de parâmetros \mathbf{s} é

$$\mu_p(z|\mathbf{s}) = m - M = 5 \log d_L + 25 , \quad (3.46)$$

em que m e M são as magnitudes aparente e absoluta respectivamente. O conjunto de parâmetros é $\mathbf{s} = (H_0, \alpha, \Omega_{(m)})$ e a d_L corresponde a distância de luminosidade

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z'; \mathbf{s})} . \quad (3.47)$$

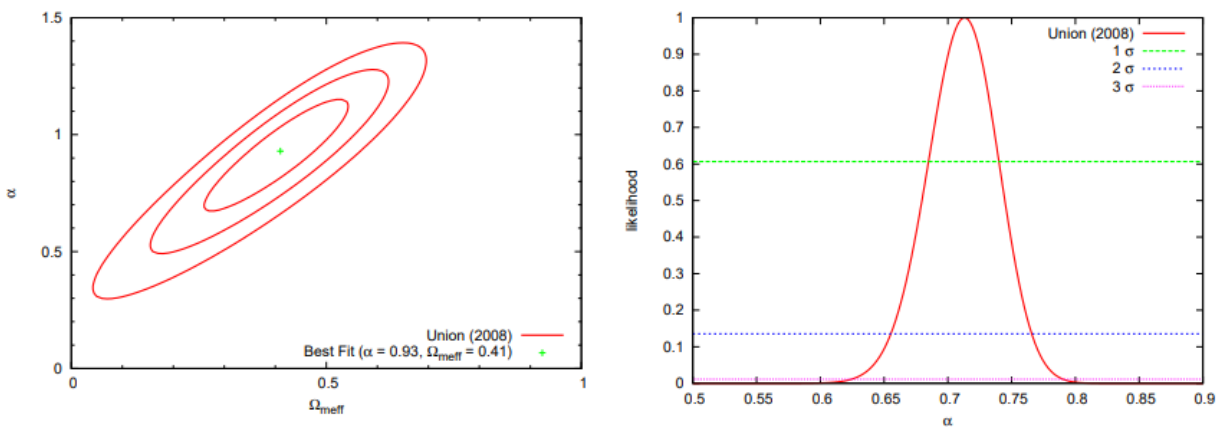


Figura 3.1: a) Plano $\alpha \times \Omega_{meff}$ previsto pelo modelo Λ CCDM para dois parâmetros livres utilizando dados correspondentes a 307 supernovas (Kowalski et al. (2008)). b) Likelihood para α em um cenário Λ CCDM espacialmente plano.

Como pode-se ver na **figura 3.1 a)**, os autores de [25], utilizando técnicas de mi-

nimização de χ^2 , obtiveram um melhor ajuste² de $\alpha = 0.93_{-0.26}^{+0.22+0.35+0.46}$ e $\Omega_{mef} = 0.41_{-0.15}^{+0.13+0.21+0.29}$ com 68,3%, 95,4% e 99,9% respectivamente de confiança estatística.

Para o caso plano, $\alpha = 0,713_{-0,028}^{+0,027+0,052+0,077}$ fica apontado que o modelo com criação de matéria escura tem um bom ajuste, reproduzindo bem os resultados do modelo Λ CDM.

O valor para o *redshift* de transição é implicitamente dependente da curvatura. Para um modelo curvo com criação de matéria escura, o valor central é de $z_t = 0,65$. Já para o cenário plano, $z_t = 0,71$, valor correspondente também ao modelo Λ CDM.

Os modelos Λ CDM e CCDM podem ser comparados segundo a seguinte tabela:

Λ CDM	CCDM
Ω_Λ	α
Ω_m	$\Omega_{mef} \equiv \Omega_m - \alpha$
Vácuo DE	criação de CDM
Aceleração ($z_t \approx 0.71, k = 0$)	Aceleração ($z_t \approx 0.71, k = 0$)

Tabela 3.1: Comparação entre os modelos Λ CDM e LJO

Resultados relacionados com as formulações macroscópica e cinética correspondentes ao presente capítulo estão, todos eles, apresentados no capítulo 5 para multifluidos.

Em comparação com o modelo padrão adotado em cosmologia, ressaltamos que o modelo LJO possui dinâmica equivalente, além de ser um modelo simples e ao mesmo tempo baseado na matéria escura, cujo status é relativamente superior à densidade de energia do vácuo.

Finalmente, é importante também mencionar alguns resultados que são independentes do modelo.

3.3 Resultados Independentes de Modelo

Até aqui nos foi permitido inferir que modelos cosmológicos são formas suscintas e elegantes de se descrever o Universo. Neste contexto, é interessante identificar alguns resultados independentes do modelo adotado:

- **Idade total do Universo $t_0 > 12$ bilhões de anos**

O Universo deve ser mais velho que qualquer estrutura presente nele. Assim, a idade total estimada para as estruturas mais velhas observadas no Universo atual fornecem um limite inferior para a idade do Universo.

²Convém mencionar, aqui, que este valor está em desacordo com outras medidas de Ω_m ; por exemplo da (medida) feita a partir da relação massa \times luminosidade de aglomerados de galáxias; bem como do próprio espectro da CMB.

Acredita-se que as estruturas mais velhas observadas no Universo contemporâneo sejam os aglomerados globulares de estrelas no halo da Via-Lactea e galáxias vizinhas. Por diferentes métodos e mecanismos [67] a idade destas estrelas está entre 12Gyr e 16Gyr.

- **Presença de componente de matéria não-bariônica**

Além da matéria bariônica, da radiação e dos neutrinos, é considerado como bem estabelecido e comprovado que o Universo possui outra componente material chamada matéria escura.

Dados indicam, ainda, ser a contribuição da matéria escura para a densidade do Universo muitas vezes maior do que a contribuição da matéria bariônica.

- **Universo (aproximadamente) plano**

Os cenários inflacionários (vide apêndice B) prevêem que a curvatura espacial do Universo é aproximadamente nula, *i.e.* o Universo é aproximadamente plano. O que surgiu como uma previsão teórica é, hoje, um resultado bem estabelecido e independente do modelo.

As medidas das anisotropias da CMB feitas por diversos experimentos, mais recentemente inclusive pelo satélite WMAP, determinam que o Universo é espacialmente plano. Com acurácia de 95% [68] temos que

$$-0,0179 < \Omega_{\kappa} < 0,0081 .$$

- **Expansão Acelerada**

Dados de supernovas do tipo Ia determinam que a atual condição de expansão do Universo seja acelerada. Estes mesmos dados indicam ainda que, após a inflação, a expansão começou desacelerada; regime este que, em algum momento, mudou para acelerada. O *redshift* da transição desacelerado-acelerado é $z_t \approx 1$ [69].

O tipo de mecanismo que gera a aceleração ainda não foi determinado, mas esta aceleração é um fato observacional comprovado e bem estabelecido. Embora a expansão esteja sendo acelerada nos atuais estágios do Universo (e tenha sido desacelerada no seu início) o valor do *redshift* da transição é dependente do modelo.

Qualquer que seja o modelo cosmológico proposto em literatura, antes de submetê-lo a análises estatísticas, devemos, primeiramente, verificar se suas hipóteses são compatíveis com os resultados acima citados.

No próximo capítulo discutiremos a Teoria Cinética Relativística, formalismo segundo o qual também trataremos o processo de criação de partículas.

3.4 Breves Considerações

No presente capítulo, além de discutirmos a diferença entre criação de matéria e ação da viscosidade volumar, discorreremos sobre uma possível forma para o termo de criação de partículas Γ tal que justifique a expansão acelerada do Universo a partir do processo de criação de CDM. Uma completa discussão sobre a forma dos termos correspondentes à expansão acelerada com redução do setor escuro se encontra feita no capítulo 5 para multífluidos. É importante que se perceba que o modelo CCDM é exatamente recuperado considerando $(k) =_{(CDM)}$ nos resultados apresentados no capítulo 5.

Teorias quânticas de campo em espaços não-curvados, que formam a base do modelo padrão, são definidas no espaço plano de Minkowski, o que é uma excelente aproximação quando se trata de descrever o comportamento de partículas microscópicas em campos gravitacionais fracos como os encontrados na Terra. Para descrever situações em que a gravidade é forte o suficiente para influenciar a matéria (quântica), mas não forte o suficiente para exigir a própria quantização, físicos formularam teorias de campo quântico no espaço-tempo curvo. Essas teorias se baseiam na relatividade geral para descrever um espaço-tempo de fundo curvo e definem uma teoria de campo quântica generalizada para descrever o comportamento da matéria quântica dentro desse espaço-tempo. Tais modelos levam em conta a hipótese de criação quântica de partículas em espaços-tempo curvos. [70].

Capítulo 4

Teoria Cinética Relativística

Os primeiros trabalhos no caminho para a generalização relativística da teoria cinética foram propostos por Jütner em 1911 [71] e 1928 [74]. No primeiro trabalho, Jütner generalizou a função distribuição de Maxwell para valer também no contexto da relatividade restrita. Posteriormente, ele obteve as funções distribuição para bósons e férmions. Em 1935, Walker obteve uma formulação, sem colisões, para a equação de Boltzmann relativística [34]. A versão completa da equação de Boltzmann (*i.e.* com colisões) só foi estabelecida por Lichnerowicz e Marrot [72]. A generalização do Teorema H de Boltzmann para a relatividade¹ foi derivada em [73; 74; 75], e, finalmente, por Chernikov [76].

No presente capítulo, primeiramente deduziremos “*step by step*” a equação de Boltzmann na relatividade restrita considerando apenas colisões binárias. Posteriormente, generalizaremos este resultado para a teoria da relatividade geral. Feito isto, deduziremos a equação de Boltzmann (sem colisões) na métrica FLRW.

A “função distribuição de Boltzmann” $f(x^\mu, P^\mu)$ é definida a partir da relação [77]

$$dN \equiv f(x^\mu, P^\mu) d^3x d^3P, \quad (4.1)$$

em que dN representa o número de partículas no interior do elemento de volume $d^3x d^3P$ do espaço de fase μ .

Defina-se o espaço de fase μ_* como o espaço ocupado por partículas com momento P^μ . Considere que as partículas nos dois espaços de fase, μ e μ_* , ocupam a mesma região do espaço além de serem idênticas².

Na teoria cinética relativística, o vínculo sobre o quadri-momento $g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m^2 c^2$, é usualmente referido como se estar sobre a “camada de massa” (“mass shell”). A imposição desta condição pode ser interpretada, sem perda de generalidade, como reduzir

¹Uma versão ilustrativa da prova do teorema H de Boltzmann na relatividade restrita está apresentada no apêndice C.

²Como todas as partículas ocupam a mesma região do espaço, $d^3x = d^3x_*$.

em um o número de graus de liberdade do espaço de fase em questão. Assim, a partir daqui, entenderemos $P^0 = P_0 = \text{constante}$. Portanto, a Eq. (4.1) pode ser reescrita como [78]

$$dN = f(t, x^i, P^i) d^3 x d^3 P, \quad (4.2)$$

Uma vez definidos $f(t, x^i, P^i)$ e a velocidade física local v^i do fluido, é usual definir as seguintes quantidades cinéticas:

- **densidade do número de partículas:**

$$n(t, x^i) \equiv \int f(t, x^i, P^i) d^3 P;$$

- **densidade de corrente do número de partículas:**

$$j(t, x^i) \equiv \int v^i f(t, x^i, P^i) d^3 P.$$

De forma compacta, as duas quantidades anteriores podem ser descritas em termos de uma única, o “tensor quadrifluxo do número de partículas” (N^μ):

$$\boxed{N^\mu = \int f P^\mu \frac{d^3 P}{P^0}}. \quad (4.3)$$

Analogamente, definidos

- **densidade de energia:**

$$T^{00} \equiv \int f P^0 d^3 P = \rho;$$

- **densidade do fluxo de energia:**

$$T^{0i} \equiv \int f P^0 v^i d^3 P;$$

- **densidade de momento:**

$$T^{i0} \equiv \int f P^i d^3 P;$$

- **densidade do fluxo de momento** (tensor pressão):

$$T^{ij} \equiv \int f P^i v^j d^3 P = \hat{P};$$

segue a descrição cinética para o chamado “tensor de energia-momento”,

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \int f P^\mu P^\nu \frac{d^3 P}{P^0}}. \quad (4.4)$$

Além de N^μ e $T^{\mu\nu}$, para completar a descrição cinética de um gás relativístico, devemos definir o “quadri-fluxo de entropia”

$$S^\mu = -k_{BC} \int P^\mu f \ln f \frac{d^3 P}{P^0} \quad (4.5)$$

No próximo capítulo, será apresentada a generalização para incluir o processo de criação gravitacionalmente induzida de partículas.

4.1 A Equação de Boltzmann na Relatividade Restrita

Uma partícula de massa m de um gás relativístico pode ser descrita no espaço de fase instantaneamente por suas coordenadas de posição x^i e momento P^i . [77]

O número de partículas dN no interior do elemento de volume $d^3 x d^3 P$ é um invariante escalar. Por outro lado, é também sabido que a quantidade $d^3 P(t)/P^0(t)$ é outro invariante escalar³

Havendo colisões, o ganho (ou perda) líquido do número de partículas pelo sistema fica:

$$\Delta N = f(t + \Delta t, x^i + \Delta x^i, P^i + \Delta P^i) d\mu(t + dt) - f(t, x^i, P^i) d\mu(t). \quad (4.6)$$

Seja $|J|$ o determinante jacobiano da transformação entre $d\mu(t + dt)$ e $d\mu(t)$. Esta relação é dada por [77]⁴:

$$\begin{aligned} d\mu(t + dt) &= |J| d\mu(t), \\ \Rightarrow d\mu(t + dt) &= \left[1 + \frac{\partial F^i}{\partial P^i} \Delta t + O(\Delta t^2) \right] d\mu(t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que a $F^i \equiv F^i(t, x^i, P^i)$ corresponde a força externa exercida sobre as partículas.

Expandindo, em série de Taylor, $f(t + \Delta t, x^i + \Delta x^i, P^i + \Delta P^i)$ em torno de $f(t, x^i, P^i)$ em até primeira ordem em Δt :

$$f(t + \Delta t, x^i + \Delta x^i, P^i + \Delta P^i) \approx f(t, x^i, P^i) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i + \frac{\partial f}{\partial P^i} \Delta P^i. \quad (4.8)$$

Substituindo-se as equações (4.7) e (4.8) na (4.6):

$$\Delta N = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial x^i} \Delta x^i + \frac{\partial f}{\partial P^i} \Delta P^i + f \frac{\partial F^i}{\partial P^i} \Delta t \right] d\mu(t), \quad (4.9)$$

³Perceba que enquanto na relatividade restrita o invariante é $d^3 P(t)/P^0(t)$, na relatividade geral, o invariante passa a ser $\sqrt{g} d^3 P(t)/P^0(t)$.

⁴Classicamente, $d\mu(t + dt) = d^3 x(t + dt) d^3 p(t + dt) = |J| d^3 x(t) d^3 p(t)$.

Dividindo-se a equação anterior por Δt ,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial(fF^i)}{\partial P^i} \right] d\mu(t),$$

em que foi convencionado

$$\Delta x^i = v^i \Delta t \Leftrightarrow v^i = \frac{cP^i}{P^0} \quad \text{e} \quad \Delta P^i = F^i \Delta t.$$

Embora ΔN seja invariante escalar, Δt não o é. Então, em termos do tempo $\Delta\tau$ que é invariante (relativístico) escalar :

$$\frac{\Delta N}{\Delta\tau} = \gamma \frac{\Delta N}{\Delta t} = \gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial(fF^i)}{\partial P^i} \right] d\mu(t) \quad (4.10)$$

é invariante escalar.

Usadas as identidades [77]

$$\gamma \left[\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right] = \frac{1}{m} P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$$

e

$$\gamma \left[\frac{\partial(fF^i)}{\partial P^i} \right] = \frac{\partial(fK^\mu)}{\partial P^\mu};$$

em que definimos K^μ (tensor chamado “força de Minkowsky”) a partir da relação

$$K^\mu P_\mu = K^0 P_0 - K^j P_j = 0;$$

chega-se à seguinte forma final para $\Delta N/\Delta t$:

$$\boxed{\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{c}{P^0} \left[P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial(fK^\mu)}{\partial P^\mu} \right] d^3x d^3P}. \quad (4.11)$$

Por outro lado, a variação $\Delta N/\Delta t$, pode ser também entendida a partir de:

$$\boxed{\frac{\Delta N}{\Delta t} \equiv C_{\text{padrão}}[f] = \frac{\Delta N^+ - \Delta N^-}{\Delta t}}$$

em que,

- $C_{\text{padrão}}$ representa o termo colisional padrão;
- $\Delta t \equiv$ período de duração das colisões;
- $\Delta N^- \equiv$ número de partículas que, inicialmente em $d\mu$, colidem com outras e

deixam $d\mu$;

- $\Delta N^+ \equiv$ número de partículas que, devido a eventuais colisões, passam a integrar o elemento de volume $d\mu$.

Seja o cenário colisional ilustrado na figura 4.1, em que partículas com velocidade $v_*^i = cP_*^i/P_*^0$ colidem com outras de velocidade $v^i = cP^i/P^0$. O termo $C_{\text{padrão}}$ é chamado, como mencionado anteriormente, “Termo Colisional”, originalmente calculado por Boltzmann para o caso não-relativístico. ⁵

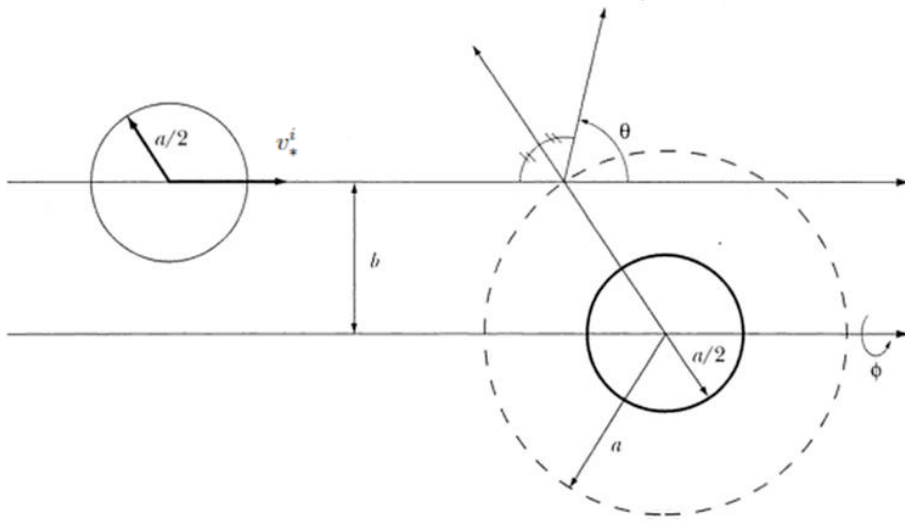


Figura 4.1: Esquema da colisão entre duas esferas rígidas de diâmetro a . No esquema estão indicadas as velocidades relativas v_*^i e $v_*^{i'}$ antes e depois do choque, o parâmetro de impacto b e o ângulo de espalhamento θ [6].

Na modelagem estatística Boltzmanniana algumas hipóteses básicas são consideradas:

- “**Caos Molecular**”: os momentos das partículas antes e depois das colisões não estão relacionados causalmente;
- A função distribuição não varia apreciavelmente para tempos maiores do que a duração das colisões; além disso, não deve variar espacialmente para dimensões maiores do que a ordem de grandeza das interações.

O número de partículas que, após alguma colisão, abandonam o elemento de volume $d\mu = d^3x d^3P$ cruzando a superfície do cilindro colisional parametrizada sob o elemento de ângulo sólido $d\Omega$ pode ser obtido a partir da relação

$$dN = \sigma^* g_\phi n' n'_* dV dt, \quad (4.12)$$

⁵Partículas do tipo “*” no interior de $d\mu_* = d^3x d^3P_*$ podem ser entendidas como um fluxo de partículas “*” sobre as sem índice em $d\mu = d^3x d^3P$.

em que g_ϕ corresponde à chamada “velocidade relativa de Møller”

$$g_\phi = \sqrt{(v^i - v_*^i)^2 - \frac{1}{c^2}(v^i \times v_*^i)^2},$$

$\sigma^* = \sigma d\Omega$ (base do cilindro colisional); $n = f(t, x^i, P^i) d^3P$ e $n_* = f(t, x^i, P_*^i) d^3P_*$.

O número total de partículas espalhadas pode ser obtido através da integração sobre todos os P ; P_* e $dV = d^3x$; e sobre todo possível elemento de ângulo sólido $d\Omega$ da relação

$$(\Delta N)^- = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{P_*} f(t, x^i, P^i) f(t, x^i, P_*^i) g_\phi \sigma d\Omega d^3x d^3P d^3P_* \Delta t. \quad (4.13)$$

Nestes termos, $(\Delta N)^-$ representa, portanto, o número de partículas que deixam $d\mu$ (o fator $1/2$ é introduzido por estarmos, por construção, considerando partículas idênticas; embora com velocidades diferentes).

O mesmo raciocínio vale para colisões entre um feixe de partículas com velocidade $v_*^{i'} = cP_*^{i'}/P_*^{0i'}$ e outro feixe com velocidade $v^{i'} = cP^{i'}/P^{0i'}$. Portanto, o número de partículas que abandonam $d^3x' d^3P'$ e entram no elemento $d^3x d^3P$ do espaço de fase pode ser descrito como:

$$(\Delta N)^+ = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{P_*'} f(t, x^i, P^{i'}) f(t, x^i, P_*'^i) g'_\phi \sigma' d\Omega d^3x' d^3P' d^3P_*' \Delta t'. \quad (4.14)$$

O “Teorema de Liouville” assegura que, “acompanhando-se o movimento de volumes ocupados por conjuntos de pontos em espaços de fase arbitrários, os módulos destes volumes permanecem inalterados com o passar do tempo, embora mudem constantemente sua forma”:

$$g_\phi \sigma d\Omega d^3x d^3P \Delta t = g'_\phi \sigma' d\Omega d^3x' d^3P' \Delta t' \quad (4.15)$$

em que $g_\phi \sigma d\Omega d^3P_* \Delta t$ representa o volume ocupado no espaço μ_* pelas partículas com velocidade v_*^i ; e o mesmo vale para partículas com velocidade v^i sobre o volume $g_\phi \sigma d\Omega d^3P \Delta t$.

Uma maneira geométrica para se interpretar o cenário em questão, é entendendo-se por $g_\phi \Delta t$ o comprimento; e $\sigma d\Omega$ a área da base do cilindro colisional representado pelo esquema da figura (4.1).

Como $d^3x \Delta t = d^3x' \Delta t'$, obtemos, da relação anterior,

$$\int_{\Omega} g_\phi \sigma d\Omega d^3P_* d^3P = \int_{\Omega} g'_\phi \sigma' d\Omega d^3P_*' d^3P'. \quad (4.16)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{\Delta t} &= \frac{(\Delta N)^+ - (\Delta N)^-}{\Delta t} = \\ &= \frac{1}{2} \int (f'_* f' - f_* f) g_\phi \sigma d^3 x d^3 P_* d^3 P. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por fim, igualando-se a (4.11) à (4.17), bem como definindo-se por “fluxo invariante” (F) a quantidade

$$F = \frac{P^0 P^0_*}{c} g_\phi, \quad (4.18)$$

chega-se à seguinte forma final para a “equação de Boltzmann colisional na relatividade restrita”⁶ [77]:

$$\boxed{P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial (f K^\mu)}{\partial P^\mu} = \frac{1}{2} \int (f'_* f' - f_* f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 P_*}{P^0_*}}. \quad (4.19)$$

4.2 A Equação de Boltzmann na Relatividade Geral

No contexto da teoria da relatividade geral, a variação total de $f[x^\mu(\lambda), P^\mu(\lambda)]$ ao longo do parâmetro afim λ fica

$$\frac{d}{d\lambda} f[x^\mu(\lambda), P^\mu(\lambda)] = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \frac{dP^\mu}{d\lambda} \equiv C[f].$$

Além disso, como $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$ temos:

$$P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) \frac{\partial f}{\partial P^\mu} = C[f]. \quad (4.20)$$

Portanto, impondo novamente o vínculo de se estar sobre a “camada de massa”, *i.e.*, $g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m^2 c^2 \Rightarrow P^0 = \text{constante}$:

$$\frac{\partial P^0}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow f[x^\mu(\lambda), P^\mu(\lambda)] \Rightarrow f[x^\mu(\lambda), P^i(\lambda)],$$

de modo que a equação da geodésica impõe:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right) = \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^i P^\mu P^\nu.$$

Então, na relatividade geral e sobre a “camada de massa” temos:

$$\boxed{P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i P^\mu P^\nu \frac{\partial f}{\partial P^i} = C_{\text{padrão}}[f]}.$$

⁶Note-se que a “aspa” sobre os f representa o momento $P^{i'}$ após a colisão.

O “Termo Cinético Colisional” (padrão), $C_{\text{padrão}}[f]$, na relatividade geral, se determina de maneira perfeitamente análoga tal como feito anteriormente para a métrica de Minkowski. Para uma métrica riemanniana $g_{\mu\nu}$ arbitrária, o termo invariante relacionado às partículas incidentes (*) passa a valer de d^3P_*/P_*^0 para $\sqrt{g}d^3P_*/P_*^0$; em que $g \equiv -\det(g_{\mu\nu})$ (ver, por exemplo, [35]).

Logo, no contexto da relatividade geral, o termo colisional padrão $C_{\text{padrão}}[f]$ fica:

$$C_{\text{padrão}}[f] = \frac{1}{2} \int (f'_* f' - f_* f) F \sigma d\Omega \sqrt{g} \frac{d^3P_*}{P_*^0}. \quad (4.21)$$

Por fim a equação de Boltzmann colisional padrão na relatividade geral toma a seguinte forma:

$$\boxed{P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^i_{\lambda\nu} P^\lambda P^\nu \frac{\partial f}{\partial P^i} = \frac{1}{2} \int (f'_* f' - f_* f) F \sigma d\Omega \sqrt{g} \frac{d^3P_*}{P_*^0}}. \quad (4.22)$$

Uma discussão detalhada sobre a forma de f em equilíbrio termodinâmico se encontra feita a seguir.

A partir daqui, abandonaremos a hipótese de termo colisional nulo ($C_{\text{padrão}}[f] \equiv 0$) para a equação de Boltzmann. Estamos interessados em modelar um termo de criação (não colisional) para relacionar ao operador de Liouville (o que será feito no próximo capítulo para um multifluido, considerado o processo de “criação”) e assim justificar cineticamente a expansão acelerada do Universo.

Digressão sobre a invariância de $\sqrt{g}d^3P/P^0$ na RG

Considere a transformação dos elementos de volume

$$d^3x = \frac{1}{\gamma} d^3x' \quad \text{e} \quad \frac{d^3P}{P_0} = \frac{d^3P'}{P'_0}, \quad \text{a partir de onde se chega a que } d^3x d^3P = d^3x' d^3P'.$$

Em espaços riemannianos arbitrários, a restrição de se estar sobre a “camada de massa” implica que

$$g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = m^2 c^2 \Leftrightarrow P^0 = \frac{P_0 - g_{0i} P^i}{g_{00}}. \quad (4.23)$$

Por outro lado, considerando a identidade

$$d^3P' = |J| d^3P = \left| \frac{\partial(P'^1, P'^2, P'^3)}{\partial(P^1, P^2, P^3)} \right| d^3P; \quad (4.24)$$

e que as transformações covariantes e contravariantes são definidas respectivamente por:

$$P_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} P_\nu \quad \text{e} \quad P^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} P^\nu. \quad (4.25)$$

considere validade da identidade

$$\frac{\partial P^0}{\partial P^j} = -\frac{P_j}{P^0}. \quad (4.26)$$

Nestes termos,

$$\frac{\partial P'^i}{\partial P^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^0} \frac{\partial P^0}{\partial P^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^0} \frac{P_j}{P^0}. \quad (4.27)$$

Logo, o determinante jacobiano da transformação

$$\frac{\partial P'^i}{\partial P^j} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} - \frac{\partial x'^i}{\partial x^0} \frac{P_j}{P^0}, \quad (4.28)$$

fica reduzida a [35]:

$$|J| = \frac{P'_0}{P_0} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \quad \text{assim,} \quad g = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^2 g' \Rightarrow \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \sqrt{\frac{g}{g'}}. \quad (4.29)$$

Feitas as devidas substituições, segue, por fim, a validade da identidade

$$\boxed{\sqrt{g'} \frac{d^3 P'}{P'_0} = \sqrt{g} \frac{d^3 P}{P_0}}. \quad (4.30)$$

4.3 A Equação de Boltzmann na métrica FLRW

O principal resultado pertinente ao presente capítulo se encontra feito como segue na presente seção. Seja a métrica FLRW espacialmente plana ($\kappa = 0$) e em coordenadas cartesianas.

Na “mass shell”, $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^i$; de modo que a equação de Boltzmann sem colisões nem criação fica

$$P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^i P^\nu P^\lambda \frac{\partial f}{\partial P^i} = 0. \quad (4.31)$$

Os únicos $\Gamma_{\nu\lambda}^i$ não-nulos são

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i. \quad (4.32)$$

Assim,

$$P^0 \frac{\partial f}{\partial t} - 2 \frac{\dot{a}}{a} P^0 P^i \frac{\partial f}{\partial P^i} = P^0 \left(\frac{\partial f}{\partial t} - 2 \frac{\dot{a}}{a} P^i \frac{\partial f}{\partial P^i} \right) = 0. \quad (4.33)$$

Convém, aqui, que se faça a mudança de variável de “momento comóvel” (P^i) para

“momento físico” (p^i):

$$p^i \equiv aP^i \Rightarrow P^i = \frac{p^i}{a}.$$

Nestes termos,

$$P^i \frac{\partial f}{\partial P^i} = \left(\frac{p^i}{a} \right) \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{p^i}{a} \right)} = p^i \frac{\partial f}{\partial p^i}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t, P^i) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, p^i) + \frac{\partial p^i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p^i}(t, p^i) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, p^i) + \frac{\partial(aP^i)}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p^i}(t, p^i). \\ \therefore \frac{\partial f}{\partial t}(t, P^i) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, p^i) + \frac{\dot{a}}{a} p^i \frac{\partial f}{\partial p^i} \end{aligned}$$

Feita tal mudança, a equação anterior (4.33) fica:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p^i \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0. \quad (4.34)$$

Para o caso sem colisões, o lado direito da equação, bem como está feito, se anula, de modo que ficamos apenas com o “operador de Liouville”:

$$L[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p^i \frac{\partial f}{\partial p^i}. \quad (4.35)$$

Finalmente, considerando a condição de isotropia, chegamos à seguinte forma final para o operador de Liouville⁷

$$\boxed{L[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - Hp \frac{\partial f}{\partial p}}. \quad (4.36)$$

4.4 Breves considerações

A equação de Boltzmann se aplica a fenomenologias diversas no contexto da teoria cinética. Entre elas convém mencionar a criação de fótons entre outras aplicações na teoria da relatividade geral. No presente capítulo, apresentamos a teoria cinética relativística, tanto no formalismo da relatividade restrita quanto no da geral de maneira completa.

Feito isto, aplicaremos a forma encontrada para o operador de Liouville na métrica FLRW no próximo capítulo com um termo de criação de partículas em lugar do termo colisional padrão $C[f] = 0$.

⁷Comparar com o resultado apresentado no apêndice D.

Capítulo 5

O Modelo Λ CDM Estendido

O presente estágio de expansão acelerada do Universo é geralmente justificado supondo-se a ação de um agente desconhecido (“escuro”) e dominante sobre o multifluido cosmológico: a **Dark Energy** (DE). Seu candidato mais popular é a densidade de energia rígida e invariável do vácuo ($\rho_V = \Lambda/8\pi G$), representado pela constante cosmológica Λ . Para completar o cenário cósmico padrão (Λ CDM), é necessário ainda adotar um modelo de inflação para descrever o Universo primitivo, incluindo a geração do banho térmico formado por todas as componentes do plasma primordial. O cenário resultante (inflação + Λ CDM) impressiona por sua simplicidade; é preditivo e permitiu ainda avançar nas compreensão e solução de algumas questões cosmológicas importantes [52; 79].

Entretanto, conforme exibido no capítulo 2, há problemas conceituais importantes com o modelo Λ CDM, a saber: (i) o “problema da constante cosmológica” [50], (ii) o “problema da coincidência cósmica” [51], (iii) a “tensão de Hubble” (SNe \times CMB) [55], e (iv) a “tensão σ_8 ” [59].

Muitas tentativas para resolver (ou aliviar) tais problemas deram origem a uma infinidade de possíveis formas para a energia escura, incluindo diferentes tipos de vácuo dinâmico e também modelos fenomenológicos de vácuo variável [80], nos quais a densidade de energia do vácuo é dependente do tempo ($\Lambda \equiv \Lambda(t)$); interações no setor escuro ou ainda campos escalares canônicos e não-canônicos [81; 82; 83; 84]. Existem ainda abordagens mais fundamentais além da teoria de Einstein, como várias extensões da relatividade geral, dentre elas: $F(R)$, $F(R, T)$ e teorias do tipo Gauss-Bonnet [85; 86; 87].

Nesse contexto, o objetivo central deste capítulo é investigar uma possível redução do setor escuro eliminando (respeitado o formalismo da TRG) a hipótese de ação de um termo de energia escura; justificando a atual condição de expansão acelerada do Universo através de algum outro mecanismo. Assim, supomos que mesmo com a inflação inicial tendo sido causada pelo domínio de um estado de vácuo, sua densidade de energia foi totalmente utilizada para criar partículas e formar o banho térmico primitivo, como é geralmente considerado em muitos modelos com quebra espontânea de simetria [41; 88].

Também está implícito que qualquer transição de fase subsequente foi incapaz de gerar um estado de vácuo relativamente denso, potencialmente capaz de acelerar a expansão do Universo em tempos tardios.

Tal como sugerido no capítulo 3, o mecanismo básico aqui adotado é a criação de partículas gravitacionalmente induzida pelo Universo em expansão, um processo já investigado na cosmologia relativística tanto do ponto de vista microscópico quanto do macroscópico. O primeiro é baseado em métodos e técnicas da teoria quântica de campos em espaços-tempo curvos [89], enquanto o segundo se baseia na abordagem termodinâmica irreversível de não-equilíbrio [1; 90].

Nesse sentido, vimos que a história cósmica do modelo LJO (modelo com criação de CDM) sem energia escura é semelhante a evolução do modelo Λ CDM [25]. Em particular, a transição da fase de desaceleração para a fase de aceleração tardia ocorre no mesmo *redshift*. Também foi mostrado que a cosmologia CCDM é equivalente ao modelo de concordância cósmica mesmo nos níveis perturbados (lineares e não lineares); ver, *a.e.* [26; 91].

Mais interessante, uma abordagem teórica cinética para uma única componente baseada em uma equação de Boltzmann relativística e modificada (com criação de matéria) também foi proposta e a mesma cosmologia CCDM foi recuperada cineticamente no caso “adiabático” [92].

Mais tarde, o modelo CCDM foi estendido para incluir a produção de partículas de espécies não dominantes relativisticamente¹. Como resultado, o modelo também reproduz exatamente a cosmologia Λ CDM acelerada observada com apenas um parâmetro livre de constante dinâmica descrevendo a taxa de criação total.

No entanto, o modelo fenomenológico com as taxas de criação do número de partículas sendo diferentes entre si sugere um novo tratamento para a teoria em questão.

Na verdade, após a divulgação dos trabalhos de [1; 90], uma série de artigos foi publicada no contexto da teoria com criação de partículas de CDM, tanto no formalismo macroscópico [21; 91], *a.e.*; quanto no cinético no caso “adiabático” [92; 93].

No presente capítulo discutiremos, utilizando a formulação macroscópica, o processo de criação de todos os tipos de partículas do multifluido cosmológico a diferentes taxas (de criação); bem como proporemos uma generalização do modelo CCDM estendido (caso geral no limite “adiabático”) utilizando a formulação cinética exibida no capítulo anterior. Doravante, o índice “ (k) ” se refere ao “tipo/espécie” das partículas de uma componente arbitrária no multifluido.

¹Entenda-se por “modelo CCDM estendido” o modelo com criação que leva em conta todas as componentes do multifluido cosmológico; mas com “taxa de criação do número de partículas” **igual** à “taxa de criação de entropia”.

5.1 O caso geral, em que $\Gamma_{(k)N} \neq \Gamma_{(k)S}$

Na cosmologia tradicional (com evolução adiabática e para sistemas “termodinamicamente fechados”), identifica-se a “pressão cosmológica” ($T_{(k)j}^j \equiv \tilde{P}_{(k)}$) com a “pressão termodinâmica” ($\hat{P}_{(k)}$).

Entretanto, considerando-se haver criação de partículas (*i.e.*, sistemas “termodinamicamente abertos”), a análise apropriada deve ser feita levando em conta ser a pressão cosmológica decomposta em pressão termodinâmica ($\hat{P}_{(k)}$) e “pressão de criação” ($P_{c(k)}$)²:

$$\boxed{\tilde{P}_{(k)} = \hat{P}_{(k)} + P_{c(k)}}. \quad (5.1)$$

Em [89], com o auxílio de mais colaboradores, *a.e.* [94], foi desenvolvida uma descrição microscópica para o mecanismo de criação de partículas através de um campo gravitacional que varia com o tempo no Universo em expansão. Tais ensaios se basearam na técnica de mistura de modos, como proposto por Bogoliubov no contexto da “Teoria Quântica de Campos” (TQC) em espaços curvos.

Pode-se interpretar o mecanismo quântico de criação de partículas a partir de um campo escalar que evolui com o tempo em uma geometria FLRW. Quando o campo, no caso o gravitacional, é quantizado, a criação de partículas passa a ser justificada pela variação temporal do campo gravitacional de fundo. Em outras palavras, foi proposta uma geometria que evolui no tempo e se comporta como uma espécie de “**bomba**”, que transforma “curvatura do campo gravitacional” em “partículas”. Em particular, isto significa que uma taxa de criação proposta fenomenologicamente, a princípio, deveria ser calculada a partir da TQC numa geometria homogênea e isotrópica (FLRW).

Sabemos também, da hidrodinâmica relativística [61], que as variáveis macroscópicas básicas que descrevem os estados termodinâmicos de um fluido simples são o fluxo do número de partículas (N^μ), o fluxo de entropia (S^μ) e o tensor energia momento ($T^{\mu\nu}$). A seguir discutiremos tais quantidades separadamente no contexto de um multifluido.

5.1.1 Fluxo do Número de Partículas

Considere agora que um multifluido com N ($k = 1, 2, \dots, N$) diferentes tipos de partículas seja fonte de curvatura do Universo expansionista homogêneo e isotrópico. Suponha também que a taxa de criação por tipo de partícula, $\Gamma_{(k)N}$, deva-se exclusivamente à variação temporal do campo gravitacional.

A não conservação do número de partículas significa que a quadridivergência do fluxo de partículas é diferente de zero. Desse modo, a equação de conservação, $N_{(k);\mu}^\mu = 0$, onde $N_{(k)}^\mu = n_{(k)} u^\mu$ é o fluxo de partículas, passa a ser descrita a partir de uma equação

²Note que os resultados para um fluido simples em equilíbrio termodinâmico devem ser recuperados quando a pressão de criação for nula.

de balanço para um número variável de partículas. Essa definição implica na validade da relação:

$$N_{(k);\mu}^{\mu} \equiv n_{(k)}\Gamma_{(k)N} \Leftrightarrow \boxed{\dot{n}_{(k)} + n_{(k)}\Theta = n_{(k)}\Gamma_{(k)N}}, \quad (5.2)$$

em que $n_{(k)}$ é a concentração de partículas da k -ésima componente e $\Theta = u_{;\mu}^{\mu}$ é o escalar de expansão do fluido. Observe que a taxa de criação de partículas tem dimensões de inverso do tempo ($[\Gamma_{(k)}] \equiv [\text{tempo}^{-1}]$). Naturalmente, quando a quantidade $N_{(k);\mu}^{\mu}$ é, por hipótese, não-nula, a divergência do quadrifluxo de entropia $S_{(k);\mu}^{\mu}$, por construção, também não deve sê-lo. É o que veremos a seguir. Note ainda que devido a homogeneidade e isotropia do espaço-tempo, a equação acima pode ser reescrita sob a forma:

$$\frac{\dot{N}_{(k)}}{N_{(k)}} = \Gamma_{(k)N}. \quad (5.3)$$

5.1.2 Fluxo de Entropia

Considere a definição para a quantidade “**densidade de entropia por partícula**”

$\sigma_{(i)}$

$$\sigma_{(i)} \equiv \frac{S_{(i)}}{n_{(i)}}. \quad (5.4)$$

Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido acima para o fluxo de partículas, podemos escrever para o fluxo de entropia:

$$S_{(k);\mu}^{\mu} \equiv s_{(k)}\Gamma_{(k)S} \Leftrightarrow \boxed{\dot{s}_{(k)} + s_{(k)}\Theta = s_{(k)}\Gamma_{(k)S}}, \quad (5.5)$$

em que $s_{(k)}$ é a densidade de entropia. Segue portanto que

$$\frac{\dot{S}_{(k)}}{S_{(k)}} = \Gamma_{(k)S}, \quad (5.6)$$

onde $S_{(k)} = s_{(k)}a^3$ é a entropia do volume comóvel. Portanto, a segunda lei da termodinâmica, $\dot{S}_{(k)} \geq 0$, implica que $\Gamma_{(k)S} \geq 0$.

É possível também mostrar que uma relação envolvendo $\Gamma_{(k)S}$ e $\Gamma_{(k)N}$ é satisfeita pela entropia específica $\sigma_{(k)}$. De fato, combinando as equações (5.2), (5.4) e (5.5) segue que:

$$\boxed{\dot{\sigma}_{(k)} = \sigma_{(k)} (\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N})}, \quad (5.7)$$

que pode ser reescrita na forma:

$$\dot{\sigma}_{(k)} = \sigma_{(k)} \left(\frac{\dot{S}_{(k)}}{S_{(k)}} - \frac{\dot{N}_{(k)}}{N_{(k)}} \right). \quad (5.8)$$

De particular interesse nesse contexto é a chamada criação “adiabática” de partículas

[21; 95]. Neste caso ($\dot{\sigma}_{(k)} = 0$), ou seja, $\Gamma_{(k)S} = \Gamma_{(k)N} = \Gamma_{(k)}$. Lembrando que a 2ª lei da termodinâmica impõe a positividade da fonte de entropia, vemos que neste caso o espaço-tempo pode apenas criar partículas. O caso “adiabático” será especialmente tratado na seção 5.2 no formalismo da teoria cinética. Por enquanto prosseguiremos com o caso geral.

5.1.3 Tensor Energia-Momento: Conservação da Energia

Como foi visto anteriormente, na presença de uma pressão de criação podemos definir para o mult fluido homogêneo e isotrópico, um tensor energia-momento modificado, $T_{(k)}^{\mu\nu}$, sob a forma:

$$T_{(k)}^{\mu\nu} \equiv T_{0(k)}^{\mu\nu} + \Delta T_{(k)}^{\mu\nu}, \quad (5.9)$$

em que $T_{0(k)}^{\mu\nu}$ é a contribuição de equilíbrio [61] e $\Delta T_{(k)}^{\mu\nu}$, a contribuição da pressão dinâmica (de criação). Isto significa que as únicas componentes não-nulas são diagonais e associadas com essa pressão dinâmica adicional ($\Delta T_{(k)}^{\mu\nu}$)³

$$\Delta T_{j(k)}^i \equiv -P_{c(k)} \delta_j^i. \quad (5.10)$$

A partir daqui deverá ser entendido por $P_{c(k)}$ a pressão associada ao processo dinâmico de criação gravitacionalmente induzida de partículas; *i.e.*, a pressão de criação associada às partículas do tipo “ (k) ”.

Para uma descrição manifestamente covariante, é usual introduzir o chamado projetor tensorial ($h^{\mu\nu}$)⁴

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu.$$

De posse de $h^{\mu\nu}$, podemos obter a projeção do tensor $\Delta T_{(i)}^{\mu\nu}$ da relação (5.10) ortogonal a quadrivelocidade como:

$$\Delta T_{(k)}^{\mu\nu} = -P_{c(k)} h^{\mu\nu} = -P_{c(k)} (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu).$$

Portanto, a (5.9) fica:

$$\begin{aligned} T_{(k)}^{\mu\nu} &= (\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) u^\mu u^\nu - \hat{P}_{(k)} g^{\mu\nu} + [-P_{c(k)} (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)] \\ \therefore \boxed{T_{(k)}^{\mu\nu} &= (\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} + P_{c(k)}) u^\mu u^\nu - (\hat{P}_{(k)} + P_{c(k)}) g^{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Finalmente, considerando que o tensor de energia momento total deva ser conservado, obtemos:

$$T_{(k);\nu}^{\mu\nu} = 0^\mu \Rightarrow u_\mu T_{(k);\nu}^{\mu\nu} = 0$$

³A hipótese de equilíbrio local implica que $\rho_{(k)} = \rho_{0(k)} \Rightarrow \Delta T_{0(k)}^0 = 0$.

⁴O operador $h^{\mu\nu}$ permite a representação de qualquer tensor em termos da soma das componentes paralela e perpendicular a quadrivelocidade u^μ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_\mu T_{(k);\nu}^{\mu\nu} &= u_\mu \left\{ \left[\left(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} + P_{c(k)} \right) u^\mu u^\nu \right]_{;\nu} - \left[\left(\hat{P}_{(k)} + P_{c(k)} \right) g^{\mu\nu} \right]_{;\nu} \right\} = \\
&= u_\mu \left\{ \left[\left(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} + P_{c(k)} \right) u^\mu \right]_{;\nu} u^\nu + \left(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} + P_{c(k)} \right) u_{;\nu}^{\nu\mu} \Theta \right\} = \\
&= \rho_{;\nu} (u_\mu u^\mu) u^\nu + \left(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} + P_{c(k)} \right) (u_\mu u^\mu) \Theta = 0
\end{aligned}$$

Portanto, a “lei de conservação de energia com criação” pode ser expressa como:

$$\boxed{\dot{\rho}_{(k)} + \left(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} + P_{c(k)} \right) \Theta = 0} . \quad (5.12)$$

Como seria esperado, a equação acima reduz-se a equação (1.28) para um fluido perfeito na ausência de criação de partículas. Note também que precisamos ainda deduzir a expressão da pressão de criação e a lei de temperatura no caso geral.

5.1.4 Pressão de Criação

Para calcular a pressão de criação podemos iniciar da relação de Gibbs [96]:

$$n_{(k)} T_{(k)} d\sigma_{(k)} = d\rho_{(k)} - \frac{\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}}{n_{(k)}} dn_{(k)} , \quad (5.13)$$

$$n_{(k)} T_{(k)} \frac{d\sigma_{(k)}}{dt} = n_{(k)} T_{(k)} \dot{\sigma}_{(k)} = \frac{d\rho_{(k)}}{dt} - \frac{\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}}{n_{(k)}} \frac{dn_{(k)}}{dt} . \quad (5.14)$$

Substituindo-se a (5.7) na (5.14):

$$n_{(k)} T_{(k)} \sigma_{(k)} (\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N}) = \dot{\rho}_{(k)} - \frac{\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}}{n_{(k)}} [n_{(k)} (\Gamma_{(k)N} - \Theta)] = \quad (5.15)$$

$$= \dot{\rho}_{(k)} - (\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) (\Gamma_{(k)N} - \Theta) . \quad (5.16)$$

Assim,

$$\frac{\dot{\rho}_{(k)}}{(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})} = \frac{n_{(k)} \sigma_{(k)} T_{(k)}}{(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})} (\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N}) + (\Gamma_{(k)N} - \Theta) . \quad (5.17)$$

Da conservação de $T_{(k)}^{\mu\nu}$:

$$\dot{\rho}_{(k)} + (\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} + P_{c(k)}) \Theta = 0 , \quad (5.18)$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}_{(k)} + (\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) \left(1 + \frac{P_{c(k)}}{(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})} \right) \Theta = 0 . \quad (5.19)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\rho}_{(k)}}{(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})} + \left(1 + \frac{P_{c(k)}}{(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})}\right) \Theta &= \\ &= \frac{n_{(k)}\sigma_{(k)}T_{(k)}}{(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})} (\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N}) + (\Gamma_{(k)N} - \Theta) + \left(1 + \frac{P_{c(k)}}{(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})}\right) \Theta = 0, \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{P_{c(k)} = -(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) \frac{\Gamma_{(k)N}}{\Theta} - \frac{n_{(k)}\sigma_{(k)}T_{(k)}}{\Theta} (\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N})}. \quad (5.20)$$

Perceba que o caso “adiabático” é perfeitamente recuperado no caso em que $\Gamma_{(k)S} = \Gamma_{(k)N}$.

5.1.5 Evolução de Temperatura

Considerando $T_{(k)}$ e $n_{(k)}$ por variáveis termodinâmicas básicas, pode-se, usando a relação de conservação (5.12), chegar ao seguinte resultado para a lei de evolução da temperatura (com criação):

$$\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = - \left(\frac{\partial \hat{P}_{(k)}}{\partial \rho_{(k)}} \right)_{n_{(k)}} \Theta - \frac{P_{c(k)}\Theta + n_{(k)}\Gamma_{(k)N}(\partial\rho_{(k)}/\partial n_{(k)})_{T_{(k)}}}{T_{(k)}(\partial\rho_{(k)}/\partial T_{(k)})_{n_{(k)}}}.$$

Note que para $P_{c(k)} = \Gamma_{(k)} = 0$ temos o resultado da termodinâmica de equilíbrio.

Substituindo-se a relação para $P_{c(k)}$ na anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} &= - \left(\frac{\partial \hat{P}_{(k)}}{\partial \rho_{(k)}} \right)_{n_{(k)}} \Theta + \frac{(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})\Gamma_{(k)N}}{T_{(k)}(\partial\rho_{(k)}/\partial T_{(k)})_{n_{(k)}}} + \frac{n_{(k)}\sigma_{(k)}(\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N})}{(\partial\rho_{(k)}/\partial T_{(k)})_{n_{(k)}}} + \\ &\quad - \frac{n_{(k)}\Gamma_{(k)N}}{T_{(k)}} \frac{(\partial\rho_{(k)}/\partial n_{(k)})_{T_{(k)}}}{(\partial\rho_{(k)}/\partial T_{(k)})_{n_{(k)}}}. \end{aligned}$$

Utilizando-se a identidade termodinâmica

$$T_{(k)} \left(\frac{\partial \hat{P}_{(k)}}{\partial T_{(k)}} \right) = \rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)} - n_{(k)} \left(\frac{\partial \rho_{(k)}}{\partial T_{(k)}} \right)_{T_{(k)}},$$

chega-se à seguinte forma final para $\dot{T}_{(k)}/T_{(k)}$:

$$\boxed{\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = \left(\frac{\partial \hat{P}_{(k)}}{\partial \rho_{(k)}} \right)_{n_{(k)}} (\Gamma_{(k)N} - \Theta) + n_{(k)} \sigma_{(k)} \left(\frac{\partial T_{(k)}}{\partial \rho_{(k)}} \right)_{n_{(k)}} (\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N})}. \quad (5.21)}$$

A principal consideração a ser feita ao final da presente seção é mencionar que o caso “adiabático” (pressão de criação e lei de evolução da temperatura) é imediatamente recuperado para $\Gamma_{(k)S} = \Gamma_{(k)N}$.

No próximo capítulo, trataremos da criação “adiabática” de fótons e a manutenção, neste caso, do espectro de corpo negro da CMB.

5.2 O caso “adiabático”, em que $\Gamma_{(k)N} = \Gamma_{(k)S}$

5.2.1 Formulação Macroscópica

Vimos nas seções anteriores que na presença de criação de partículas, a entropia específica de cada componente desacoplada, satisfaz a seguinte relação:

$$\dot{\sigma}_{(k)} = \sigma_{(k)} (\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N}). \quad (5.22)$$

Para o caso “adiabático”, $\Gamma_{(k)S} = \Gamma_{(k)N}$. Nestes termos, a relação para a pressão de criação (5.19) e lei de evolução de temperatura (5.20) ficam, respectivamente:

$$P_{c(k)} = -(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) \frac{\Gamma_{(k)N}}{\Theta} \quad (5.23)$$

e

$$\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = \left(\frac{\partial \hat{P}_{(k)}}{\partial \rho_{(k)}} \right)_{n_{(k)}} (\Gamma_{(k)N} - \Theta). \quad (5.24)$$

O objetivo dessa seção é obter da formulação anterior, os casos particulares referentes a produção adiabática de partículas. Como veremos, tal caso é muito importante do ponto de vista cinético.

- **O caso ultra-relativístico** ($\dot{\sigma}_{(k)} = 0$ e $m_{(k)} \ll T_{(k)}$)

Neste caso, $\rho_{(k)} \approx 3\hat{P}_{(k)}$. Então a relação (5.10) fica:

$$\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = \frac{\partial}{\partial \rho_{(k)}} \left(\frac{\rho_{(k)}}{3} \right) \left(\Gamma_{(k)} - 3 \frac{\dot{a}}{a} \right).$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Gamma_{(k)}}{3}}. \quad (5.25)$$

Note-se que, no caso $\Gamma_{(k)} = 0$, $T_{(k)} \propto a^{-1}$: radiação (ou outra qualquer componente ultrarelativística).

- **O caso não-relativístico** ($\dot{\sigma}_{(k)} = 0$ e $3m_{(k)} \gg T_{(k)}$)

Neste caso, da relação ⁵,

$$\rho_{(k)} = n_{(k)}m_{(k)} + \frac{3}{2}n_{(k)}T_{(k)} \Rightarrow T_{(k)} = \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_{(k)}}{n_{(k)}} - m_{(k)} \right),$$

e

$$\hat{P}_{(k)} = n_{(k)}T_{(k)};$$

então a (5.19) fica:

$$\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho_{(k)}} \left[n_{(k)} \frac{2}{3} \left(\frac{\rho_{(k)}}{m_{(k)}} - m_{(k)} \right) \right] \right\} (\Gamma_{(k)} - \Theta).$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = -\frac{2\dot{a}}{a} + \frac{2}{3}\Gamma_{(k)}} \quad (5.26)$$

Note-se que, no caso $\Gamma_{(k)} = 0$, $T_{(k)} \propto a^{-2}$: resultado esperado para a evolução térmica do Universo na Era da Matéria.

5.2.2 Formulação Cinética

Aqui será obtida uma generalização no formalismo da teoria cinética dos resultados obtidos com a teoria macroscópica de processos irreversíveis para a criação “adiabática” de todos os tipos de partículas desacopladas no multifluido cosmológico.

Considere, a partir daqui, que a concentração de cada tipo de partícula no multifluido cosmológico possa ser descrita a partir da sua respectiva “função distribuição de Boltzmann” ($f_{(k)}$)

$$dN_{(k)} \equiv f_{(k)}(x^\mu, P_{(k)}^\mu) d^3x d^3P_{(k)}. \quad (5.27)$$

6

⁵ $k_B \equiv 1$.

⁶Perceba que, bem como tem sido feito até aqui, se convencionou o índice (k) subscrito, como que se referindo ao tipo do multifluido cosmológico.

Seja a métrica FLRW espacialmente plana em coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

Os únicos símbolos de Christoffel $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu$ não-nulos associados à métrica $g_{\mu\nu}$ em qualquer sistema de coordenadas são:

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij} \quad (5.28)$$

e

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i. \quad (5.29)$$

Neste contexto, a equação de Boltzmann sob ação de um campo gravitacional fica:

$$\begin{aligned} \frac{df_{(k)}}{d\lambda} &= \frac{\partial f_{(k)}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^\mu} \frac{dP_{(k)}^\mu}{d\lambda} = \\ &= P_{(k)}^\mu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^0} \frac{dP_{(k)}^0}{d\lambda} + \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i} \frac{dP_{(k)}^i}{d\lambda} \stackrel{-\Gamma_{\mu\nu}^i P_{(k)}^\mu P_{(k)}^\nu}{=} = \mathcal{C}[f_{(k)}] \end{aligned} \quad (5.30)$$

em que $\mathcal{C}[f_{(k)}]$ corresponde a algum termo cinético a ser modelado considerando a contribuição quântico-gravitacional devida à criação de partículas por tipo de partícula.

Pensemos a princípio sobre o “Operador de Liouville”⁷ $L[f_{(k)}]$:

$$L[f_{(k)}] \equiv P_{(k)}^\mu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial x^\mu} + \frac{dP_{(k)}^0}{d\lambda} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^0} - \Gamma_{\mu\nu}^i P_{(k)}^\mu P_{(k)}^\nu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i}. \quad (5.31)$$

Se estar sobre a “mass shell”, *i.e.*, fixar $g_{\mu\nu} P_{(k)}^\mu P_{(k)}^\nu \equiv m_{(k)}^2 c^2$, permite, conforme feito anteriormente, sem perda de generalidade, considerar $\partial f_{(k)}/\partial P_{(j)}^0$ nulo. Assim, chega-se imediatamente à seguinte forma final para o operador de Liouville, por tipo de partícula, $L[f_{(k)}]$ na “mass shell”:

$$\boxed{L[f_{(k)}] \equiv P_{(k)}^\mu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i P_{(k)}^\mu P_{(k)}^\nu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i}}. \quad (5.32)$$

Pensemos, agora, sobre o “Termo Cinético” $\mathcal{C}[f_{(k)}]$ modificado pela criação de partículas.

A implementação do processo de produção/criação gravitacionalmente induzida de partículas será feita considerada a seguinte interpretação para o termo $\mathcal{C}[f_{(k)}]$:

$$\mathcal{C}[f_{(k)}] \equiv C_{\text{padrão}}[f_{(k)}] + \bar{C}[f_{(k)}],$$

⁷Vide dedução alternativa feita no apêndice D.

em que $C_{\text{padrão}}[f_{(k)}]$ representa o termo cinético (colisional) padrão; e $\bar{C}[f_{(k)}]$ o termo responsável pela descrição da criação de partículas devida à variação temporal do campo gravitacional do Universo em expansão.

A modelagem para o termo cinético $\mathcal{C}[f_{(k)}]$ adotado no presente trabalho, leva em conta as seguintes considerações [92]:

- $$\boxed{C_{\text{padrão}}[f_{(k)}] = 0} \quad .$$

As consequências físicas devidas ao termo colisional padrão já são bem conhecidas em literatura (além do que o processo de criação de partículas não tem, por construção, natureza colisional);

- $$\boxed{\bar{C}[f_{(k)}] \propto \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}} \quad .$$

O efeito do termo $\bar{C}[f_{(k)}]$ deve desaparecer na ausência de gravidade: na métrica de Minkowsky os símbolos de Christoffel são, todos eles, identicamente nulos;

- $$\boxed{\bar{C}[f_{(k)}] \propto -\frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta}} \quad .$$

Da formulação macroscópica:

$$N_{(k);\mu}^{\mu} = \dot{n}_{(k)} + n_{(k)}\Theta \equiv n_{(k)}\Gamma_{(k)} \Rightarrow \frac{\dot{n}_{(k)}}{n_{(k)}} = -\Theta \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) .$$

O *ansatz* mais simples satisfazendo as três condições anteriores; e levando em conta dever ser $\mathcal{C}[f_{(k)}]$, por construção, um escalar (o que justifica a contração dos índices) é:

$$\mathcal{C}[f_{(k)}] = -\frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} P_{(k)}^{\lambda} P_{(k)}^{\nu} L_{(k)\mu} , \quad (5.33)$$

em que $L_{(k)\mu}$ representa algum quadrivetor covariante a ser determinado em termos das condições de contorno respeitadas pela equação de Boltzmann.

Considere $L_{(k)\mu}$ da forma

$$L_{(k)\mu} \equiv A \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^{\mu}} + B P_{(k)\mu} .$$

A equação de Boltzmann padrão, sem colisões nem criação de partículas, implica dever ser $L_{(k)0} \equiv 0$. Então,

$$A \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^0} + B P_{(k)0} = 0 \Rightarrow B = -\frac{A}{P_{(k)0}} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^0} .$$

Logo,

$$L_{(k)i} = A \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i} - \frac{A}{P_{(k)0}} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^0} = A \left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i} - \frac{P_{(k)i}}{P_{(k)0}} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^0} \right)$$

Nestes termos, chega-se à seguinte forma final para o termo cinético $\mathcal{C}[f_{(k)}]$ (restrito exclusivamente à “mass shell”) e em qualquer métrica FLRW:

$$\boxed{\mathcal{C}[f_{(k)}] = -A \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \Gamma_{\mu\nu}^i P_{(k)}^\mu P_{(k)}^\nu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i}} \quad (5.34)$$

Logo, igualando-se as relações (5.32) e (5.34), chega-se a que:

$$\boxed{P_{(k)}^\mu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^i P_{(k)}^\mu P_{(k)}^\nu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i} = -A \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \Gamma_{\mu\nu}^i P_{(k)}^\mu P_{(k)}^\nu \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i}}. \quad (5.35)$$

Os únicos $\Gamma_{\lambda\nu}^i$ não-nulos são⁸

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i.$$

Levando este resultado na (5.35),

$$\begin{aligned} \cancel{P_{(k)}^0} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} - 2\Gamma_{0j}^i \cancel{P_{(k)}^0} P_{(k)}^j \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i} &= -2A \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \Gamma_{0j}^i \cancel{P_{(k)}^0} P_{(k)}^j \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i} \\ \Rightarrow \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} - 2 \frac{\dot{a}}{a} P_{(k)}^i \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i} &= -2A \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \frac{\dot{a}}{a} P_{(k)}^i \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}^i}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t}(t, P_{(k)}^i) &= \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t}(t, p_{(k)}^i) + \frac{\partial p_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}^i}(t, p_{(k)}^i) = \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t}(t, p_{(k)}^i) + \frac{\partial(aP_{(k)}^i)}{\partial t} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}^i}(t, p_{(k)}^i) \\ \therefore \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t}(t, P_{(k)}^i) &= \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t}(t, p_{(k)}^i) + \frac{\dot{a}}{a} p_{(k)}^i \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}^i}. \end{aligned}$$

Substituídos os dois últimos resultados na (5.36):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} p_{(k)}^i \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}^i} \right) - 2 \frac{\dot{a}}{a} p_{(k)}^i \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}^i} &= -2A \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \frac{\dot{a}}{a} p_{(k)}^i \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}^i} \\ \Rightarrow \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} &= \frac{\dot{a}}{a} \left(1 - 2A \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) p_{(k)}^i \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}^i}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

⁸Os Γ_{ij}^0 também são não nulos, mas como se está sobre a “mass shell”, isso não faz diferença.

Evocando-se novamente o “Princípio Cosmológico” ($p^i \rightarrow |p^i| \equiv p$)⁹ . chegamos à seguinte forma para a equação de Boltzmann:

$$\boxed{\frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} = \frac{\dot{a}}{a} \left(1 - 2A \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) p_{(k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}}} \quad (5.38)$$

A dedução completa para essa equação estará feita assim que determinarmos o valor para a constante “A”.

• **A constante “A”**

Seja, da expressão,

$$A_{;\mu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{g} A^{\mu}) ;$$

a quantidade “quadrifluxo do número de partículas por tipo de partícula” $N_{(k)}^{\mu}$:

$$N_{(k)}^{\mu} \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \int \mathcal{V}^{\mu} f_{(k)} P_{(k)}^{\mu} \frac{d^3 P_{(k)}}{P_{(k)}^0}, \text{ de modo que, } N_{(k)}^0 \equiv n_{(k)} = \int f_{(k)} d^3 P_{(k)}.$$

Feitas tais considerações, a derivada da quantidade definida anteriormente fica

$$\begin{aligned} N_{(k);\mu}^{\mu} = N_{(k);0}^0 &= \frac{1}{\sqrt{a^6}} \frac{\partial}{\partial x^0} \left(\sqrt{a^6} N_{(k)}^0 \right) = \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^3 \int f_{(k)} d^3 P_{(k)} \right) \\ &= 3H n_{(k)} + \int \left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} \right) d^3 P_{(k)} \equiv n_{(k)} \Gamma_{(k)}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Portanto,

$$3H n_{(k)} + \frac{\dot{a}}{a} \left(1 - 2A \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \int p_{(k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}} d^3 p_{(k)} = n_{(k)} \Gamma_{(k)}. \quad (5.40)$$

Aplicando-se o resultado

$$\int P_{(k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}} d^3 P_{(k)} = -3n_{(k)}, \quad (5.41)$$

então, a (5.40) fica:

$$n_{(k)} \Theta + \frac{H}{\Theta} \overset{\propto 1/3}{\left(\Theta - 2A \Gamma_{(k)} \right)} (-3n_{(k)}) = n_{(k)} \Gamma_{(k)} \quad \therefore \quad \boxed{A = \frac{1}{2}}.$$

⁹Consideraremos a partir daqui

$$P^i \frac{\partial f}{\partial P^i} = p \frac{\partial f}{\partial p}$$

Portanto, a ‘Equação de Boltzmann Modificada, em função dos “momentos físicos”’; em um universo FLRW espacialmente plano e na “mass shell” ’ assume a seguinte forma final:

$$\boxed{\frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} = \frac{\dot{a}}{a} \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) P_{(k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial P_{(k)}}} \quad (5.42)$$

A fim de recuperar, no formalismo da teoria cinética relativística, os mesmos resultados da seção 5.1 desenvolvidos via formulação macroscópica, sejam as quantidades cinéticas “quadrifluxo do número de partículas”; “quadrifluxo de entropia”¹⁰ e “ tensor energia-momento” respectivamente definidos segundo as relações:

$$N_{(k)}^\mu \equiv \int f_{(k)} P_{(k)}^\mu a^3 \frac{d^3 P_{(k)}}{P_{(k)}^0}, \quad (5.43)$$

$$S_{(k)}^\mu \equiv - \int (f_{(k)} \ln f_{(k)} - f_{(k)}) P_{(k)}^\mu a^3 \frac{d^3 P_{(k)}}{P_{(k)}^0}, \quad (5.44)$$

e

$$\Rightarrow T_{(k)}^{\mu\nu} \equiv \int f_{(k)} P_{(k)}^\mu P_{(k)}^\nu a^3 \frac{d^3 P_{(k)}}{P_{(k)}^0}, \quad (5.45)$$

de modo que as condições de “homogeneidade” e “isotropia” implicam serem não-nulos exclusivamente os elementos

$$N_{(k)}^0 \equiv n_{(k)} V = \int f_{(k)} a^3 d^3 P_{(k)} \int \cancel{d^3 x} \Rightarrow n_{(k)} = \int f_{(k)} d^3 p_{(k)},$$

$$S_{(k)}^0 \equiv s_{(k)} V = - \int (f_{(k)} \ln f_{(k)} - f_{(k)}) a^3 d^3 P_{(k)} \int \cancel{d^3 x} \Rightarrow s_{(k)} = - \int (f_{(k)} \ln f_{(k)} - f_{(k)}) d^3 p_{(k)},$$

e

$$T_{(j)}^{00} \equiv \rho_{(k)}.$$

A partir deste formalismo, calculem-se as quadridivergências referentes às duas primeiras quantidades anteriores. ¹¹

¹⁰A presente definição para S^μ implica, imediatamente, a validade do já mencionado **Teorema H de Boltzmann**; todas elas definidas no início do capítulo que garante ser sempre crescente a entropia associada à algum sistema físico.

¹¹Para os cálculos concernentes aos quadrifluxos de N^μ e S^μ , deverão ser levados em conta dois resultados da geometria diferencial:

- Considerada alguma métrica riemanniana g arbitrária, a quadridivergência de alguma quantidade tensorial (na notação de Einstein) fica:

$$A^\mu_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} A^\mu);$$

5.2.3 Fluxo do Número de Partículas

A representação matemática com as implicações do nosso modelo pode ser obtida para

$$N_{(k);\mu}^{\mu} = N_{(k);\mu}^0 = \frac{1}{\sqrt{a^6}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{a^6} N_{(k)}^0 \right) = \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial x^0} \left(a^3 \int f_{(k)} d^3 p_{(k)} \right),$$

então, da aplicação da “regra do produto”¹²:

$$\Rightarrow N_{(k);\mu}^{\mu} = \frac{1}{a^3} \left[\frac{\partial a^3}{\partial t} \int f_{(k)} d^3 p_{(k)} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \int f_{(k)} d^3 p_{(k)} \right) a^3 \right] = 3H n_{(k)} + \int \left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} \right) d^3 p_{(k)}$$

da relação (5.42),

$$\begin{aligned} N_{(k);\mu}^{\mu} &= 3H n_{(k)} + H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \int p_{(k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}} d^3 p_{(k)} \quad \text{13} \\ &= 3H n_{(k)} - H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) (-3n_{(k)}) = 3 \frac{H}{\Theta} \Gamma_{(k)} n_{(k)}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Como $\Theta = 3\dot{a}/a = 3H \Rightarrow H/\Theta \propto 1/3$. Portanto,

$$\boxed{N_{(k);\mu}^{\mu} = n_{(k)} \Gamma_{(k)}} \quad (5.47)$$

recuperando, assim, a relação (5.5) da seção 5.1.

5.2.4 Fluxo de Entropia

Analogamente a como foi dito anteriormente, a representação matemática com as implicações do nosso modelo pode ser obtida para

$$S_{(k);\mu}^{\mu} = S_{(k);\mu}^0 = \frac{1}{\sqrt{a^6}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{a^6} S_{(k)}^0 \right) = -\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial x^0} \left[a^3 \int (f_{(k)} \ln f_{(k)} - f_{(k)}) d^3 p_{(k)} \right],$$

então, novamente da aplicação da regra do produto:

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{(k);\mu}^{\mu} &= -\frac{1}{a^3} \left\{ 3a^2 \dot{a} \int (f_{(k)} \ln f_{(k)} - f_{(k)}) d^3 p_{(k)} + a^3 \int \left[\frac{\partial}{\partial t} (f_{(k)} \ln f_{(k)} - f_{(k)}) \right] d^3 p_{(k)} \right\} = \\ &= 3H S_{(k)} - \int \left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} \right) \ln f_{(k)} d^3 p_{(k)} \end{aligned}$$

que corresponde à equação (10.68) do livro “*The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*” - C. Cercignani e G. M. Kremer.

- na métrica FLRW, $g = a^6$.

¹²As integrais das relações (5.46), (5.48) e (5.56) estão detalhadamente calculadas no apêndice E.

¹³A integral acima está calculada nos apêndices.

usando-se, novamente, a relação (5.42),

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{(k);;\mu}^{\mu} &= 3Hs_{(k)} + H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \int p_{(k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}} \ln f_{(k)} d^3 p_{(k)} \quad {}^{14} = \\ &= 3Hs_{(k)} - H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) (-3s_{(k)}) = 3 \frac{H}{\Theta} \Gamma_{(k)} s_{(k)}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Mais uma vez, como $\Theta = 3\dot{a}/a = 3H \Rightarrow H/\Theta \propto 1/3$. Portanto,

$$\therefore \boxed{S_{(k);;\mu}^{\mu} = s_{(k)} \Gamma_{(k)}}. \quad (5.49)$$

recuperando, assim, a relação (5.2) da seção 5.1.

5.2.5 Tensor Energia-Momento: a Pressão de Criação ($\Delta\hat{P}_{(i)}$)

Para darmos início às investigações sobre o tensor energia-momento, devemos enunciar, primeiramente, a seguinte relação da geometria diferencial:

$$\boxed{B_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{g} B^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} B^{\mu\lambda}} \quad (5.50)$$

Podemos decompor $T_{(k)}^{\mu\nu}$ em termos da sua contribuição em equilíbrio termodinâmico, $T_{(k)}^{\mu\nu}|_E$, mais uma perturbação (fora do equilíbrio) arbitrária $\Delta T_{(k)}^{\mu\nu}$ ¹⁵ :

$$T_{(k)}^{\mu\nu} = T_{(k)}^{\mu\nu}|_E + \Delta T_{(k)}^{\mu\nu}.$$

Impondo-se o “princípio de conservação” de $T_{(k)}^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} u_{\mu} T_{(k);;\nu}^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{a^6}} u_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left[\sqrt{a^6} \left(T_{(k)}^{\mu\nu}|_E + \Delta T_{(k)}^{\mu\nu} \right) \right] + u_{\mu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} \left(T_{(k)}^{\mu\lambda}|_E + \Delta T_{(k)}^{\mu\lambda} \right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{a^3} 1 \frac{\partial}{\partial t} \left[a^3 \left(T_{(k)}^{00}|_E + \Delta T_{(k)}^{00} \right) \right] + 1 \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} \left(T_{(k)}^{\mu\lambda}|_E + \Delta T_{(k)}^{\mu\lambda} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Considerando não haver dissipação de energia, imediatamente $\Delta T_{(k)}^{00} = 0$.

Seja o termo,

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} \left(T_{(k)}^{\mu\lambda}|_E + \Delta T_{(k)}^{\mu\lambda} \right).$$

Como ν é um índice livre, faça-se $\nu = 0$ de modo que os únicos $\Gamma_{\lambda\nu}^0$ não-nulos são:

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}.$$

¹⁴Esta integral está calculada noos apêndices.

¹⁵Note-se que ao termo $\Delta T_{(k)}^{\mu\nu}$ estão associados: (i) à produção de entropia; (ii) à geração de um termo de pressão associado na presente modelagem ao processo à criação de partículas.

Como $T_{(k)}^{i0} = 0$, então

$$\Gamma_{\mu\lambda}^0 \left(T_{(k)}^{\mu\lambda}|_E + \Delta T_{(k)}^{\mu\lambda} \right) = a\dot{a}\delta_{ij} \left(T_{(k)}^{ij}|_E + \Delta T_{(k)}^{ij} \right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_\mu T_{(k);\nu}^{\mu\nu} &= \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left[a^3 (T_{(k)}^{00}|_E) \right] + a\dot{a}\delta_{ij} \left(T_{(k)}^{ij}|_E + \Delta T_{(k)}^{ij} \right) = 0 \\ \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^3 T_{(k)}^{00}|_E \right) + a\dot{a}\delta_{ij} T_{(k)}^{ij}|_E + a\dot{a}\delta_{ij} \Delta T_{(k)}^{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Seja a definição de pressão isotrópica ($\hat{P}_{(k)}$) por tipo de partícula:

$$\hat{P}_{(k)} \equiv -\frac{1}{3} g_{ij} T_{(k)}^{ij} \text{ em que } g_{ij} = -a^2(t)\delta_{ij} \Leftrightarrow \delta_{ij} = -\frac{g_{ij}}{a^2}. \quad (5.53)$$

Rearranjando as relações anteriormente expostas, chega-se imediatamente aos valores

$$a\dot{a}\delta_{ij} T_{(k)}^{ij}|_E = -a\dot{a} \left(\frac{g_{ij}}{a^2} \right) T_{(k)}^{ij}|_E = 3H\hat{P}_{(k)}$$

e

$$a\dot{a}\delta_{ij} \Delta T_{(k)}^{ij} = -a\dot{a} \left(\frac{g_{ij}}{a^2} \right) \Delta T_{(k)}^{ij} = 3H\Delta\hat{P}_{(k)}. \quad (5.54)$$

Nestes termos, a (5.52) passa a poder ser descrita na forma

$$\left[\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^3 T_{(k)}^{00}|_E \right) + 3H\hat{P}_{(k)} + 3H\Delta\hat{P}_{(k)} \right] = 0. \quad (5.55)$$

Pensemos, agora, sobre o termo:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^3 T_{(k)}^{00}|_E \right) = \frac{1}{a^3} \left[3a^2 \dot{a} T_{(k)}^{00}|_E + a^3 \frac{\partial}{\partial t} T_{(k)}^{00}|_E \right] = 3H\rho_{(k)} + \frac{\partial}{\partial t} T_{(k)}^{00}|_E.$$

Mais uma vez, da definição cinética para $T^{\mu\nu}$:

$$T_{(k)}^{\mu\nu} = \int f_{(k)} p_{(k)}^\mu p_{(k)}^\nu \frac{d^3 p_{(k)}}{p_{(k)}^0} \Rightarrow T_{(k)}^{00}|_E = \int p_{(k)}^0 f_{(k)} d^3 p_{(k)};$$

e

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(a^3 T_{(k)}^{00}|_E \right) = 3H\rho_{(k)} + \int p_{(k)}^0 \left(\frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} \right) d^3 p_{(k)}.$$

Implementando a equação de Boltzmann modificada

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial t} &= \dot{a} \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) p_{(k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}}, \\ \Rightarrow \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} (a^3 T_{(k)}^{00}|_E) &= 3H\rho_{(k)} + H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \int p_{(k)}^0 p_{(k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial p_{(k)}} d^3 p_{(k)}^{16}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

De modo que, calculando-se a integral na relação anterior¹⁷,

$$\Rightarrow \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} (a^3 T_{(k)}^{00}|_E) = 3H\rho_{(k)} + H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \left[-3(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) \right] \quad (5.57)$$

O que, por fim, levado na relação (5.52) fica:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3H\rho_{(k)} - 3H(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) - 3H\hat{P}_{(k)} - 3H\Delta\hat{P}_{(k)} &= 0 \\ \Rightarrow -3H\Delta\hat{P}_{(k)} = \rho_{(k)}\Gamma_{(k)} + \hat{P}_{(k)}\Gamma_{(k)} \end{aligned}$$

Lembrando ser esse resultado válido para todas as componentes do multifluido cosmológico:

$$\therefore \boxed{\Delta\hat{P}_{(k)} = -(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)}) \frac{\Gamma_{(k)}}{3H}} \quad (5.58)$$

Portanto, obtemos um tensor energia-momento total de divergência nula, tal como exigido pelas equações de campo de Einstein, somente se a pressão de criação for dada pela (5.58)

Note-se que esta expressão corresponde ao exato mesmo resultado associado à pressão de criação (5.23) obtido através do formalismo da teoria macroscópica de processos irreversíveis.

5.2.6 Evolução da Temperatura (Formulação Cinética)

Seja a função distribuição de equilíbrio $f_{0(k)} = e^{\alpha_{(k)}(t) - \beta_{(k)}(t)E_{(k)}}$. Então,

$$\frac{\partial f_{0(k)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (e^{\alpha_{(k)}(t) - \beta_{(k)}(t)E_{(k)}}) = (\dot{\alpha}_{(k)} - \dot{\beta}_{(k)}E_{(k)}) f_{0(k)}$$

e

$$\frac{\partial f_{0(k)}}{\partial p_{(k)}} = \frac{\partial}{\partial p_{(k)}} \left(e^{\alpha_{(k)}(t) - \beta_{(k)}(t) \frac{p_{(k)}^2}{2m}} \right) = -\beta_{(k)} \left(\frac{2p_{(k)}}{2m_{(k)}} \right) f_{0(k)} = -\beta_{(k)} \frac{p_{(k)}}{E_{(k)}} f_{0(k)}.$$

¹⁶Esta integral se encontra calculada no apêndice.

¹⁷Feito no apêndice E.

Usando as duas últimas relações na expressão (5.42):

$$\begin{aligned} \left(\dot{\alpha}_{(k)} - \dot{\beta}_{(k)} E_{(k)} \right) f_{0(k)} &= H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) p_{(k)} \left(-\beta_{(k)} \frac{p_{(k)}}{E_{(k)}} f_{(k)} \right) \\ \therefore \boxed{\dot{\alpha}_{(k)} - \dot{\beta}_{(k)} E_{(k)} + \beta_{(k)} H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \frac{p_{(k)}^2}{E_{(k)}} = 0} &. \end{aligned} \quad (5.59)$$

A partir daqui, vamos considerar que o multifluido cosmológico esteja em equilíbrio térmico.

- **O caso ultra-relativístico** ($m_{(k)} \ll T$)

Neste caso, $E_{(k)} \approx p_{(k)}$. Então a relação (5.59) fica:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{(k)} - \dot{\beta}_{(k)} + \beta_{(k)} H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \frac{E_{(k)}^2}{E_{(k)}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\dot{\alpha}_{(k)}}{\dot{\beta}_{(k)}} &= E_{(k)} \left[1 - \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \frac{\dot{\alpha}_{(k)}}{\dot{\beta}_{(k)}} \right] \end{aligned}$$

Fazendo,

$$\begin{aligned} \beta_{(k)} &= \frac{1}{T_{(k)}(t)} \Rightarrow \dot{\beta}_{(k)} = -\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}^2} \\ \Rightarrow -T_{(k)}^2 \frac{\dot{\alpha}_{(k)}}{\dot{T}_{(k)}} &= E_{(k)} \left[1 - \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \frac{\dot{\alpha}_{(k)}}{\dot{T}_{(k)}} \right] \end{aligned}$$

Definindo, sem perder generalidade, $\dot{\alpha}_{(k)} \equiv 0$, chega-se à seguinte forma para a lei de evolução da temperatura:

$$\therefore \boxed{\frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Gamma_{(k)}}{3}}, \quad (5.60)$$

resultado este idêntico ao obtido termodinamicamente (na seção 5.1).

- **O caso não-relativístico** ($m_{(k)} \gg T_{(k)}$)

Neste limite,

$$E_{(k)} = m_{(k)} + \frac{p_{(k)}^2}{2m_{(k)}}$$

o que, substituído na relação (5.59):

$$\dot{\alpha}_{(k)} - \dot{\beta}_{(k)} \left(m_{(k)} + \frac{p_{(k)}^2}{2m_{(k)}} \right) + \beta_{(k)} H \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \frac{p_{(k)}^2}{m_{(k)} + \frac{p_{(k)}^2}{2m_{(k)}}} = 0$$

dividindo por $\dot{\beta}_{(k)}$:

$$\Rightarrow \frac{\dot{\alpha}_{(i)}}{\dot{\beta}_{(i)}} - m_{(i)} = \frac{p_{(i)}^2}{m_{(i)}} \left[\frac{1}{2} - H \frac{\beta_{(i)}}{\dot{\beta}_{(i)}} \left(1 - \frac{\Gamma_{(i)}}{\Theta} \right) \frac{m_{(i)}}{m_{(i)} + \frac{p_{(i)}^2}{2m_{(i)}}} \right]$$

Como $m_{(k)}c^2 \equiv m_{(k)} \gg p_{(k)}^2/2m_{(k)}$ ¹⁸, chega-se a que:

$$\frac{\dot{\alpha}_{(k)}}{\dot{\beta}_{(k)}} - m_{(k)} = \frac{p_{(k)}^2}{m_{(k)}} \left[\frac{1}{2} - H \frac{\beta_{(k)}}{\dot{\beta}_{(k)}} \left(1 - \frac{\Gamma_{(k)}}{\Theta} \right) \right] \quad (5.61)$$

A equação anterior, tem por solução

$$\alpha_{(k)} - m_{(k)}\beta_{(k)} = \text{constante} .$$

Fazendo-se, novamente, $\beta_{(i)} = 1/T_{(i)}(t)$; chega-se à seguinte forma final para a lei de evolução da temperatura:

$$\therefore \frac{\dot{T}_{(k)}}{T_{(k)}} = -2 \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\Gamma_{(k)}}{3} \right)$$

relação esta que, por sua vez, é idêntica ao obtido termodinamicamente no caso “adiabático”.

5.3 O Modelo CCDM Estendido: Cosmologia com Criação de Todos os tipos de Partículas

Conforme observado anteriormente (vide introdução), um novo cenário emulando o modelo Λ CDM, a chamada cosmologia CCDM, é baseada na criação “adiabática” apenas de matéria escura fria [25]. Tentativas de considerar a criação de outras componentes dominantes (bárions + CDM) com diferentes taxas de criação também foram discutidas na literatura [7].

Este modelo CCDM tem uma evolução equivalente a Λ CDM tanto na métrica de fundo (história cósmica) quanto nos níveis perturbativos (lineares e não lineares) e também pode ser descrito de forma natural com base na formulação cinética desenvolvida na seção anterior.

¹⁸ $c \equiv 1$.

5.3.1 CCDM Estendido e o Setor Térmico

Para cada componente desacoplada, a razão geral $\Gamma_{(k)}/\Theta = \alpha_{(k)}\rho_{co}/\rho_{(k)}$ assume a seguinte forma (ver [7] para o modelo com Bárions + CDM)

$$\frac{\Gamma_{(b)}}{3H} = \alpha_{(b)} \frac{\rho_{co}}{\rho_{(b)}}, \quad \frac{\Gamma_{(dm)}}{3H} = \alpha_{(dm)} \frac{\rho_{co}}{\rho_{(dm)}}, \quad (5.62)$$

$$\frac{\Gamma_{(r)}}{3H} = \alpha_{(r)} \frac{\rho_{co}}{\rho_{(r)}}, \quad \frac{\Gamma_{(\nu)}}{3H} = \alpha_{(\nu)} \frac{\rho_{co}}{\rho_{(\nu)}}, \quad (5.63)$$

em que $\alpha_{(b)}$, $\alpha_{(dm)}$, $\alpha_{(r)}$ e $\alpha_{(\nu)}$ são parâmetros constantes correlatos à natureza do fluido a ser considerado; enquanto ρ_{co} representa o valor atual da densidade crítica do Universo. Similarmente, para cada componente, as pressões de criação $P_{c(k)} = -(\rho_{(k)} + \hat{P}_{(k)})\Gamma_{(k)}/3H$ se reduzem a:

$$P_{c(b)} = -\rho_{(b)}\Gamma_{(b)}/3H = -\alpha_{(b)}\rho_{co}, \quad (5.64)$$

$$P_{c(dm)} = -\rho_{(dm)}\Gamma_{(dm)}/3H = -\alpha_{(dm)}\rho_{co}, \quad (5.65)$$

$$P_{c(r)} = -\frac{4}{3}\rho_{(r)}\Gamma_{(r)}/3H = -\frac{4}{3}\alpha_{(r)}\rho_{co}, \quad (5.66)$$

$$P_{c(\nu)} = -\frac{4}{3}\rho_{(\nu)}\Gamma_{(\nu)}/3H = -\frac{4}{3}\alpha_{(\nu)}\rho_{co}, \quad (5.67)$$

em que, para simplificar, também supomos neutrinos sem massa. Observe ainda que todas as pressões de criação são moduladas por seu parâmetro livre de criação específico, $\Gamma_{(k)}$.

Sendo todos os termos de pressão aqui elencados de natureza negativa, pode-se, portanto, associá-lo à eventual justificação para a expansão acelerada do Universo

Em tempos tardios, todas essas componentes estão desacopladas e as radiação e neutrinos são subdominantes na era dominada pela matéria não-relativística. Embora dinamicamente irrelevante na ordem zero, é bem conhecido que os fótons da CMB (e neutrinos) desempenham um papel importante na abordagem perturbativa tanto do ponto de vista termodinâmico quanto do cinético; embora do ponto de vista dinâmico possamos desprezar essas componentes. Neste caso, $P_{c(\text{Total})} = -(\alpha_{(b)} + \alpha_{(dm)})\rho_{co}$, de modo que a pressão de criação depende apenas do parâmetro descrevendo a taxa de criação efetiva, $\alpha_{eff} = \alpha_{(dm)} + \alpha_{(b)}$. A dinâmica do modelo CCDM estendido é determinada pelas equações de campo da relatividade geral na geometria plana do tipo FLRW.

Combinando a equação de Friedmann

$$8\pi G(\rho_{(dm)} + \rho_{(b)}) = 3H^2, \quad (5.68)$$

com a lei de conservação de energia para ambas as componentes, chega-se a que

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{meff}(1+z)^3 + \alpha_{eff}, \quad (5.69)$$

em que $\Omega_{meff} = \Omega_{(dm)} + \Omega_{(b)} - \alpha_{eff} \equiv 1 - \alpha_{eff}$. A “ α_{eff} ” corresponde a matéria não relativística aglomerada. Observe que α_{eff} permite uma redução do setor escuro, emulando assim a dinâmica de Λ CDM com $\alpha_{eff} = \Omega_\Lambda = \alpha_{(b)} + \alpha_{(dm)}$.

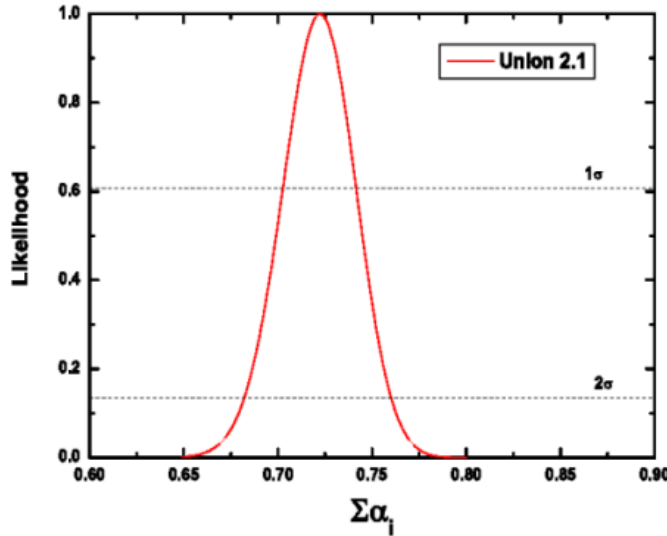


Figura 5.1: Probabilidade de que a quantidade $\sum_i \alpha_i$ seja igual a α_{eff} com base na Amostra Union 2.1 (SNe Ia). Análise estatística realizada para um modelo plano com criação de matéria obtendo-se $\sum_i \alpha_i = \alpha_{eff} = 0,722 \pm 0,021$ (1σ) de [7]. As linhas horizontais na figura são cortes nas regiões de 68,3% e 95,4% de probabilidade. Observe que a história cósmica é sensível apenas à contribuição líquida α_{eff} cujo melhor ajuste produz $\Omega_m^{eff} \sim 0.278$.

Perceba que, adotado este modelo, o fator de escala pode ser representado sob a seguinte forma

$$a(t) = \left(\frac{1 - \alpha_{eff}}{\alpha_{eff}}\right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3H_0\sqrt{\alpha_{eff}}}{2}t\right) \quad (5.70)$$

que é idêntica à prevista pelo modelo plano padrão Λ CDM e também com apenas um único parâmetro dinâmico livre, α_{eff} .

Na **figura 5.1** mostramos uma análise estatística do modelo em questão. Considerando a criação de todos os tipos de partículas do multifluido cosmológico e uma amostra de supernovas (Union 2), o melhor ajuste para o parâmetro efetivo de criação é $\alpha_{eff} = 0,722 \pm 0,021$ (1σ), resultado este também em acordo com o previsto pelo modelo Λ CDM. Tal resultado foi originalmente obtido por [7]. De fato, a analogia é perfeita ao identificarmos $\Omega_\Lambda \equiv \alpha_{eff}$. Na verdade, fazendo essa substituição, a função $a(t)$ acima transforma-se na solução do fator de escala para o modelo Λ CDM.

É amplamente conhecido que $a(t)$ não é diretamente observável. No entanto, para $a(t) = a(t_0) = 1$, a idade do Universo hoje, t_0 , pode ser calculada. Desta forma, um

limite inferior em α_{eff} pode ser obtido quando o comparamos com os valores dos objetos mais antigos de nossa galáxia ou mesmo em altos *redshifts*. Naturalmente, isso também pode ser feito usando a expressão (5.69) para o parâmetro Hubble, conforme discutido há muito tempo para o modelo Λ CDM [97].

Como vimos, quando a criação de fótons e neutrinos não é considerada, esse cenário de setor escuro reduzido imita o modelo de concordância cósmica tanto do ponto de vista dinâmico quanto do térmico, pois seu comportamento termodinâmico não é modificado. No entanto, quando há criação de fótons da CMB e neutrinos, o valor de $H(z)$ dado por (5.69) é modificado¹⁹. Em particular, a nível das equações de campo, o novo parâmetro de criação efetivo $\bar{\alpha}_{eff}$ não aparece aditivamente para que $\bar{\alpha} \neq \alpha_{(b)} + \alpha_{(dm)} + \alpha_{(r)} + \alpha_{(\nu)}$ e, como tal, a dinâmica do modelo também requer mais de um parâmetro livre.

Naturalmente, na fase dominada pela matéria a lei de temperatura da CMB depende apenas de α_r , como seria de se esperar de nossos resultados macroscópicos anteriores desse capítulo (ver também a derivação cinética). Neste caso, o valor do *redshift* de equilíbrio e outras propriedades relevantes do fluido de fóton-bárion também são ligeiramente modificados. Nesse caso o modelo torna-se ligeiramente diferente de Λ CDM.

Um efeito interessante para a estrutura de grande escala e anisotropias da CMB está também relacionado com o parâmetro $\alpha_{eff} = \alpha_{dm} + \alpha_b$ dirigindo a evolução da densidade de matéria não-relativística perturbada. Desprezando dinamicamente o efeito de fótons e neutrinos, pode-se determinar a equação de evolução para o contraste de densidade da matéria supondo que apenas as componentes não-relativísticas (CDM e bárions) sejam criadas. Neste caso é natural considerar que apenas uma parte da matéria seja vista aglomerada nos clusters, ou seja, apenas a parte $\rho_{(m)}^{eff} = \rho_{co}(1 - \sum_i \alpha_i)a^{-3}$ sente o processo de aglomeração. Assim, a contribuição da parte restante, $\rho_{(v)}^{eff} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_{co}$ representa uma densidade de energia efetiva do vácuo rígido e como tal, a equivalência com Λ CDM torna-se quase trivial [7].

Agora, assumindo a separação acima e lembrando que a gravidade newtoniana pode ser aplicada para perturbações bem dentro do horizonte, a evolução do contraste de densidade, $\delta_{(m)}^{eff} = \delta\rho_{(m)}^{eff}/\rho_{(m)}^{eff}$, é governada pela equação:

$$\ddot{\delta}_{(m)}^{eff} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{(m)}^{eff} - 4\pi G\rho_{(m)}^{eff}\delta_{(m)}^{eff} = 0. \quad (5.71)$$

É fácil também verificar que a solução do modo crescente em termos do fator de escala para a equação acima pode ser expressa como:

$$\delta_{(m)}^{eff}(a) = C(x)aF\left(\frac{1}{3}, 1; \frac{11}{6}; -\frac{a^3 \sum_i \alpha_i}{1 - \sum_i \alpha_i}\right), \quad (5.72)$$

em que $C(x)$ é uma quantidade local independente do tempo de integração e $F =$

¹⁹Esse tema será assunto do próximo capítulo.

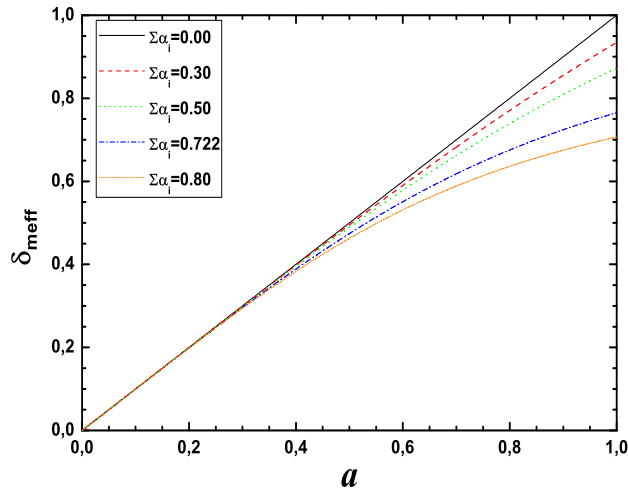


Figura 5.2: *Evolução do contraste efetivo da densidade de matéria no modelo CCDM estendido para diferentes valores de α_{eff} em função do fator de escala. A linha azul é obtida para o melhor valor de ajuste dos dados de SNe Ia para o único parâmetro livre efetivo, $\alpha_{eff} = \alpha_{dm} + \alpha_b$. Ele reproduz exatamente a previsão padrão Λ CDM para o contraste de densidade não-relativístico e também para o redshift de transição (ver Fig.5.1). Observe que $\delta_{(meff)}$ descreve apenas a contribuição das componentes não-relativísticas criadas (bárions + CDM), que é capaz de aparecer como matéria aglomerada. Este modelo CCDM estendido é diferente dos modelos anteriores, pois também inclui as componentes subdominantes criadas (CMB + neutrinos), alterando ligeiramente a lei de temperatura e outras propriedades relevantes do fluido de fóton-bárions.*

${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$ é a função hipergeométrica gaussiana. Como seria de esperar, se o parâmetro de criação líquida $\sum_i \alpha_i \rightarrow 0$ ou o fator de escala for muito pequeno, os resultados do modelo padrão de Einstein-de Sitter são recuperados ($\delta_{(m)}^{eff} \propto a$, $\Omega_{(m)}^{eff} \rightarrow 1$).

Na figura 5.2 mostramos a evolução do contraste densidade em função das componentes criadas que são dinamicamente relevantes. É interessante que o melhor ajuste para o parâmetro seja o de criação efetiva $\alpha_{eff} = \alpha_{(dm)} + \alpha_{(b)}$ para os dados de SNe Ia.

Com isso, se está garantindo a validade de dois resultados não triviais, a saber: (i) a relação para a **evolução do contraste de densidade** (linha azul) e também o valor para o **redshift de transição**, previstos pelo modelo plano Λ CDM [7], **são preservados**; (ii) a lei de evolução da temperatura da CMB modificada²⁰, obtida a partir de dados do COBE e WMAP, $T_0 = 2,72548 \pm 0,00057\text{K}$, aponta para uma nova física modificando o valor relativamente menor de H_0 conforme obtido pela análise da colaboração do Planck.

Em outras palavras, a criação de fótons satisfazendo a lei de temperatura modificada sugere um teste crucial no setor térmico envolvendo distorções, anisotropias de temperatura da CMB e o próprio valor de H_0 , mesmo considerando que a dinâmica de Λ CDM seja basicamente preservada em tempos tardios. Portanto, é natural perguntar como as distorções e anisotropias CMB seriam investigadas neste contexto ampliado emulando a

²⁰Essa lei de evolução de temperatura leva em conta haver criação apenas de fótons da CMB.

dinâmica Λ CDM, mas não sua abordagem termodinâmica e cinética (ver capítulo 6).

Conforme esperado, este modelo reproduz exatamente a previsão do modelo Λ CDM para o contraste de densidade de matéria não relativística. No entanto, aqui também é levado em conta o contraste de densidade correspondente à matéria criada devido à instabilidade gravitacional. A parte criada desempenha o papel de uma densidade de energia de vácuo constante imitando assim o modelo Λ CDM tanto em estágios lineares quanto em não lineares (mais detalhes em [7]).

5.4 Breves Considerações

Admitida a validade da Teoria da Relatividade Geral para a descrição do *cosmos*, a aceleração da expansão do Universo em seus últimos estágios, um fato observacional bem consolidado na comunidade científica, pode ser explicada a partir da existência de uma componente exótica de energia que, na literatura, aparece sob as mais diversas formas.

Mas como vimos neste capítulo, a aceleração do Universo também pode ser explicada pelo processo de criação cosmológica das componentes do multifluido cosmológico às custas da expansão do campo gravitacional do Universo.

O modelo aqui apresentado incorpora a criação de componentes do multifluido cosmológico, as equações de Einstein e a descrição do Universo; e tem nas suas taxas de criação $\Gamma_{(k)}$ seus principais ingredientes. As equações e soluções apresentadas e obtidas para este modelo nos permitem analisar, rapidamente, diversos aspectos do modelo que são testáveis e podem ser confrontados com o modelo Λ CDM [98]. No próximo capítulo, investigaremos com mais detalhes a criação de fótons e faremos algumas comparações com o modelo cosmológico padrão [99].

Capítulo 6

Criação de Fótons da CMB: Lei de Temperatura e Espectro de Corpo Negro

Neste capítulo investigaremos, a partir de uma rota menos conservadora (*i.e.*, considerando criação “adiabática” gravitacionalmente induzida de fótons da CMB¹), uma possível solução para a chamada “Tensão de Hubble”.

A visão cosmológica aceita tradicionalmente sugere que a lei para a evolução de temperatura da CMB respeita exclusivamente a relação

$$T(z) = T_0(1 + z). \quad (6.1)$$

Esta seria, então, a única forma possível para $T(z)$ capaz de preservar o espectro de corpo negro da CMB observado ao longo de toda a expansão cósmica [61].

Nesse contexto, tendo em vista os resultados obtidos no capítulo anterior, demonstraremos, de três maneiras distintas, que uma lei para $T(z)$, pode ser rigorosamente estabelecida considerando a produção “adiabática” de fótons. Além disso, apresentaremos ainda uma demonstração cinética que demonstra a preservação do espectro planckiano quando o processo de criação de fótons é “adiabático”.

Como veremos, o tratamento cinético modificado revela não apenas que o espectro do corpo negro é preservado considerando criação “adiabática” de fótons, mas também que anisotropias e distorções na CMB podem ser justificadas como efeitos adicionais neste contexto. O novo termômetro cósmico sugere um teste crucial para o modelo de concordância cósmica padrão no setor térmico. Também é argumentado que os presentes resultados podem abrir uma nova rota para o escrutínio da tensão SNe-CMB, desafiando o modelo Λ CDM.

¹A partir daqui, se entenderá $\Gamma_{(k)} = \Gamma_{(\text{CDM})} \equiv \Gamma$.

6.1 Formulação Heurística

Como uma espécie de aquecimento, vamos primeiro discutir a crítica básica aos modelos com criação de fótons e sua possível influência na determinação da lei de temperatura $T(z)$. Na métrica FLRW espacialmente plana, considere a existência de um fluido de fótons desacoplado, tal como acontece no modelo padrão Λ CDM. O número médio de fótons pode ser escrito como $N = na^3$ de modo que, considerada a criação de fótons, $\dot{N} \neq 0$. Além disso, supondo que o espectro é plackiano temos $\rho \propto T^4$ e $n \propto T^3$, de modo que $\rho \propto n^{4/3}$. Note que tais relações estão aqui sendo consideradas heurísticamente como verdadeiras, mesmo na presença do processo de criação.

Por outro lado, a relação *redshift* \times frequência dos fótons devida à expansão cósmica não é modificada. Na verdade, o que se observa é um efeito geodésico cinemático puro ($ds^2 = 0$) sobre frequências e comprimentos de onda [38]

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a_0}{a} = 1 + z. \quad (6.2)$$

Conforme observado anteriormente, a criação homogênea e isotrópica de fótons também implica não ser conservado o número médio de fótons em volumes comóveis, $N(t) = na^3$. Uma vez que estejamos considerando, por hipótese, $n \propto T^3$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{T}}{T} &= -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \frac{\dot{N}}{N} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Gamma}{3} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \ln T + \frac{d}{dt} \ln a = \frac{d}{dt} \ln N^{1/3}. \end{aligned}$$

Uma integração simples fornece:

$$\boxed{aTN(t)^{-1/3} = \text{constante}}. \quad (6.3)$$

Claramente, a lei padrão $aT = a_0T_0$ só é obedecida se $N = \text{constante}$, um resultado que pode ser prontamente obtido pela conservação da entropia no volume comóvel. No entanto, a natureza do processo termodinâmico que leva à lei de temperatura mais geral acima e também à forma do espectro não foram determinadas. Portanto, derivações mais rigorosas se fazem necessárias.

6.2 Formulação Macroscópica

No que se segue, em primeiro lugar estendemos a formulação obtida originalmente por [1] e reanalisada em [21] por meio de uma abordagem manifestamente covariante. Posteriormente, uma prova mais simples do espectro do corpo negro baseada no número de ocupação será apresentada [99].

Como foi visto no capítulo anterior, os estados de não-equilíbrio de um fluido de radiação ($\hat{P} = \rho/3$) considerando-se haver produção “adiabática” de fótons gravitacionalmente induzida e (considerando-se haver produção de) entropia podem ser caracterizados por três grandezas macroscópicas independentes: corrente do número de partículas N^μ ; corrente de entropia S^μ e o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, :

$$N^\mu = nu^\mu, \quad (6.4)$$

$$S^\mu = su^\mu, \quad (6.5)$$

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \hat{P} + P_c)u^\mu u^\nu - (\hat{P} + P_c)g^{\mu\nu}. \quad (6.6)$$

Na métrica de fundo FLRW, como exibido anteriormente, as equações de evolução temporal para tais quantidades tomam a forma

$$N^\mu_{;\mu} = \dot{n} + n\Theta = n\Gamma_N \Leftrightarrow \frac{\dot{N}}{N} = \Gamma_N, \quad (6.7)$$

$$S^\mu_{;\mu} = \dot{s} + s\Theta = s\Gamma_S \Leftrightarrow \frac{\dot{S}}{S} = \Gamma_S, \quad (6.8)$$

$$u_\mu T^\mu_{;\nu} = 0 \Leftrightarrow \dot{\rho} + (\rho + \hat{P} + P_c)\Theta = 0, \quad (6.9)$$

em que o escalar de expansão é $\Theta = 3H = 3\dot{a}/a$ e $(;)$ representa “derivada covariante”.

As quantidades Γ_N e Γ_S denotam as taxas de produção de fótons e entropia respectivamente. Observe a diferença entre os termos da fonte nas equações de balanço, (6.7) e (6.8).

Em princípio, existem duas taxas diferentes e ambas são nulas para estados de equilíbrio. O primeiro está claramente relacionado ao surgimento de partículas no espaço-tempo; enquanto o segundo se assemelha à taxa de variação da entropia específica, uma contribuição típica do mecanismo de “viscosidade volumar” (como discutido no capítulo 3: segunda viscosidade). Em geral $\Gamma_N \neq \Gamma_S$. No entanto, sua igualdade especifica o caso denominado criação “adiabática” [21], que é totalmente diferente do mecanismo de viscosidade volumar proposto há muito tempo por [100] como uma descrição fenomenológica da criação de matéria (para mais detalhes ver [95]).

Vamos lembrar que as quantidades termodinâmicas do fluido estão relacionadas à sua temperatura pela lei de Gibbs local

$$nTd\left(\frac{s}{n}\right) \equiv nTd\sigma = d\rho - \frac{(\rho + \hat{P})}{n}dn, \quad (6.10)$$

em que $\sigma = s/n = S/N$ é a entropia específica (por fóton), enquanto o potencial químico μ é determinado pela chamada relação de Euler, $n\mu = \rho - nT\sigma$. Observe também que

a expressão acima implica que a entropia específica em geral não é conservada².

$$\dot{\sigma} = \sigma \left(\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{N}}{N} \right) \equiv \sigma(\Gamma_S - \Gamma_N). \quad (6.11)$$

A criação “adiabática” é caracterizada por $\dot{\sigma} = 0$ e ocorre apenas se $\Gamma_N = \Gamma_S = \Gamma$. Nesse caso, tanto a entropia quanto o número total de partículas aumentam, mas a entropia específica permanece constante. Além disso, obtém-se o resultado interessante

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{N}}{N} \Rightarrow S = k_B N + \text{constante} \quad (6.12)$$

em que k_B é a “constante de Boltzmann”. Um ponto importante a se ter em mente é que a presença da pressão de criação nesta descrição macroscópica não é o resultado de processos colisionais como acontece, por exemplo, no mecanismo padrão de viscosidade volumar. A seguir, consideramos apenas a criação “adiabática” de fótons, o que significa $\Gamma_S = \Gamma_N \equiv \Gamma$.

Neste ponto, precisamos determinar a pressão de criação de fótons fora do equilíbrio, P_c . Em primeiro lugar, é fácil ver que o processo “adiabático” satisfaz a segunda lei da termodinâmica. A relação de Euler aplicada aos fótons ($\mu = 0$), implica que $nT\sigma \equiv sT = \rho + \hat{P}$. Agora, uma vez que estejamos descrevendo a criação “adiabática” de fótons, a equação de equilíbrio para a entropia dada por (6.9) se resume a³

$$S_{;\mu}^{\mu} = \dot{s} + s\Theta = n\sigma\Gamma \quad (6.13)$$

$$\therefore S_{;\mu}^{\mu} = n\sigma T = \frac{(\rho + \hat{P})}{T}\Gamma \geq 0,$$

conforme exigido pela segunda lei da termodinâmica. Além disso, sob condições “adiabáticas”, a lei de Gibbs (6.10) implica que

$$nTd\left(\frac{s}{n}\right) \Rightarrow nT\frac{d\sigma}{dt} = 0 = \frac{d\rho}{dt} - \frac{(\rho + P)}{n} \frac{dn}{dt} \quad (6.14)$$

$$\therefore \boxed{\frac{\dot{\rho}}{(\rho + P)} = \frac{\dot{n}}{n}}.$$

Finalmente, combinando este resultado com a com a lei de conservação de energia (6.7) e a equação de balanço para a densidade do número de partículas (6.8), a pressão de criação para os fótons é obtida:

$$\frac{\dot{\rho}}{(\rho + \hat{P})} + \left(1 + \frac{P_c}{(\rho + \hat{P})}\right) = 0 \Rightarrow \Gamma - \Theta + \left(1 + \frac{P_c}{(\rho + \hat{P})}\right) \Theta = 0. \quad (6.15)$$

²A equação (6.11) aparece com a ordem das quantidades Γ_S e Γ_N trocadas no artigo de [99]. O erro de impressão não altera os resultados subsequentes do artigo.

³No caso geral, as contas estão apresentadas com mais detalhes no capítulo anterior.

Nestes termos e formalismo, note que recupera-se a exata mesma relação para a pressão de criação obtida a partir dos formalismos das teorias cinética e macroscópica:

$$\boxed{P_c = -(\rho + \hat{P}) \frac{\Gamma}{\Theta}}. \quad (6.16)$$

Esta simples expressão permanece válida enquanto a condição “adiabática” for mantida. Observe também que uma integração de (6.14) resulta na relação de equilíbrio, $\rho \propto n^{4/3}$, sugerindo assim as seguintes questões: *Serão as relações de equilíbrio restantes ($n \propto T^3$, $\rho \propto T^4$) também respeitadas tal como suposto na derivação heurística? Ou equivalentemente: Como a lei de evolução da temperatura da radiação é modificada neste contexto?*

Para responder a tais questões, vamos assumir $\rho = \rho(T, n)$, $\hat{P} = \hat{P}(T, n)$ e a identidade termodinâmica bem conhecida:

$$T \left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial T} \right)_n = \rho + \hat{P} - n \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T. \quad (6.17)$$

Agora, com a pressão de criação dada por (6.15), pode-se reescrever a lei de conservação de energia (6.7) em termos de T, n e Γ . Além disso, usando a condição (6.14), a equação de balanço para a densidade numérica (6.8) e a identidade acima, a evolução da temperatura da radiação com a criação fica

$$\boxed{\frac{\dot{T}}{T} = \left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \rho} \right)_n \frac{\dot{n}}{n} = \frac{1}{3} \frac{\dot{n}}{n} \Leftrightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} = 4 \frac{\dot{T}}{T}}. \quad (6.18)$$

Portanto, como assumido sem prova na derivação heurística, vemos que $n \propto T^3$, $\rho \propto T^4$ e $\rho \propto n^{4/3}$. Todas as relações de equilíbrio de temperatura para ρ , n e σ são efetivamente satisfeitas no caso de criação “adiabática” de fótons. Curiosamente, a derivação heurística presente na seção passada, também está codificada na lei da temperatura acima.

Manuseando as equações anteriores, chegamos a que

$$\frac{\dot{T}}{T} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_n \frac{\dot{n}}{n} = \frac{1}{3} \frac{\dot{n}}{n} \quad \text{e} \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = 4 \frac{\dot{T}}{T}. \quad (6.19)$$

Primeiro, reescrevamos a equação (6.9) sob a forma

$$\frac{\dot{n}}{n} = \Gamma - \Theta. \quad (6.20)$$

Da (6.19)

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{1}{3} \frac{\dot{n}}{n} = \frac{1}{3} (\Gamma - \Theta) = \frac{\Gamma}{3} - \frac{1}{3} \beta \frac{\dot{a}}{a}. \quad (6.21)$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Gamma}{3}}, \quad (6.22)$$

resultado este que concorda exatamente com a equação (6.4) proveniente da formulação heurística.

Note ainda que

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Gamma}{3} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{3} \frac{\dot{N}}{N} \Leftrightarrow \boxed{TaN(t)^{-1/3} = \text{constante}}, \quad (6.23)$$

em que na segunda igualdade $\Gamma = \dot{N}/N$ foi substituída. Esta é exatamente a mesma lei de temperatura derivada a partir de argumentos heurísticos apresentados no aquecimento desta abordagem macroscópica irreversível.

Deve-se também enfatizar a generalidade dessa lei da temperatura. Em particular, usando as relações de equilíbrio acima, é prontamente verificado que todas as equações de equilíbrio geram a mesma lei de temperatura.

Portanto, a lei da temperatura com a criação de partículas não é apenas mais geral do que a lei de temperatura do modelo Λ CDM, $aT = \text{constante}$, mas também retém o mesmo grau de universalidade.

Também se acredita amplamente que a criação cosmológica de fótons no Universo em expansão não seja permitido porque a forma de corpo negro do espectro CMB deve ser inevitavelmente destruída. Portanto, é natural perguntar: *qual é a natureza do espectro para a criação “adiabática” de fótons?*

6.3 Formulação Cinética

Na verdade, tal questão foi discutida pela primeira vez há muito tempo [22], mas não foi completamente resolvida devido à falta de uma equação de Boltzmann devidamente modificada levando em consideração a criação de fótons. A seguir, uma resposta abrangente e mais completa, incluindo como tratar distorções neste contexto, será fornecida com base na equação de Boltzmann devidamente modificada para incluir produção “adiabática” de fótons.

Vamos agora concentrar nossa atenção na contraparte cinética da abordagem macroscópica irreversível para criação gravitacional “adiabática” conforme discutido acima. O objetivo principal agora é mostrar, de primeiros princípios, que sob condições “adiabáticas” o espectro de Planck também é preservado no curso da expansão. Como era de se esperar, isso acontece exatamente devido à validade da lei da temperatura estendida.

O campo de radiação é descrito pela densidade, no espaço de fase, dos fótons $f(x^\mu, p^\mu)$, ou equivalentemente, pelo número de ocupação $n_\gamma(t, \nu)$. A evolução de ambas as formas é governada pela mesma equação cinética relativística de Boltzmann, mas

agora levando em conta tão somente a criação de fótons. Então, a forma final para a equação de Boltzmann modificada (com criação de fótons) fica:

$$P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta \frac{\partial f}{\partial P^\mu} = \bar{C}_p[f], \quad (6.24)$$

A quantidade \bar{C}_p extra é um termo de fonte fenomenológica não colisional (de produção) que codifica o processo de criação “adiabática” de fótons devido à geometria cósmica variável no tempo. Tal termo de origem gravitacional é bastante distinto de qualquer contribuição colisional presente no tratamento padrão [56]. Tal termo também pode ser interpretado como uma nova contribuição de origem gravitacional atuando à esquerda da equação de Boltzmann.

Nestes moldes, o operador de Liouville estendido na camada de massa pode ser representado sob a forma

$$L[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - HP \frac{\partial f}{\partial P} + \frac{\Gamma}{3} P \frac{\partial f}{\partial P} = 0. \quad (6.25)$$

Observe que para $\Gamma \ll H$, a razão $\Gamma/3H$ é insignificante e o operador Liouville padrão é recuperado. Outro importante resultado a se ter em mente é que devido à instituição do princípio cosmológico, a mudança da descrição da equação de Boltzmann feita em termos dos momentos comóveis para a feita em termos dos momentos físicos não altera em nada os resultados aqui apresentados.

6.3.1 O “número de ocupação” n_γ

Usaremos, a partir daqui, a função distribuição de Boltzmann para determinar o número de ocupação n_γ dos modos no interior de uma caixa.

Para um gás relativístico em equilíbrio termodinâmico, a função de Boltzmann não-perturbada $f^{(0)}$ assume a forma [35]:

$$f^{(0)} = \frac{g_s}{h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\mu_e}{kT} + \frac{u^\alpha p_\alpha}{kT} + \epsilon\right)}, \quad (6.26)$$

em que $\epsilon = +1$ para fermions e $\epsilon = -1$ para bosons.

A distribuição relativística de Maxwell-Boltzmann ($\epsilon = 0$) pode ser, portanto, descrita em termos de

$$f^{(0)} = \frac{g_s}{h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\mu_e}{kT} + \frac{u^\alpha p_\alpha}{kT}\right)}, \quad (6.27)$$

em que g_s corresponde o fator de degenerescência:

$$\begin{aligned} g_s &= 2s + 1, \quad m \neq 0, \\ g_s &= 2s, \quad m = 0. \end{aligned}$$

Para o caso de fótons ($m = 0$):

$$\begin{aligned} s = 1 &\Rightarrow g_s = 2, \\ m = 0 &\Rightarrow \mu_e = 0, \\ &\epsilon = -1. \end{aligned}$$

Portanto, da (6.26) ficamos com

$$f^{(0)} = \frac{2}{h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{u^\alpha p_\alpha}{kT}\right) - 1}. \quad (6.28)$$

Como $u^\alpha p_\alpha = h\nu$, chegamos à seguinte relação entre a função distribuição de Boltzmann em equilíbrio e o número de ocupação:

$$\boxed{f^{(0)} = \frac{2}{h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \equiv n_\gamma(t, \nu)}. \quad (6.29)$$

Logo, em termos do número de ocupação $n_\gamma(t, \nu)$ a equação de Boltzmann também pode ser reescrita como

$$\frac{\partial n_\gamma}{\partial t} - \nu H \frac{\partial n_\gamma}{\partial \nu} + \frac{\Gamma}{3} \nu \frac{\partial n_\gamma}{\partial \nu} = 0. \quad (6.30)$$

Por questão de generalidade, consideremos agora um gás de radiação de bósons ou férmions sem massa com $\mu = 0$ (daqui em diante consideramos unidades com $h = k_B = c = 1$).

Para obter a condição sob a qual a densidade de espaço de fase em equilíbrio é uma solução da equação cinética do tipo Boltzmann, é conveniente instituir a quantidade [99]

$$B^2 \equiv \left[\frac{1}{e^{\nu/T} - \epsilon} \right]^2. \quad (6.31)$$

Como se pode verificar

$$\frac{\partial n_\gamma}{\partial t} = B^2 \frac{\nu}{T} e^{\dot{T}/T} \quad (6.32)$$

e

$$\nu \frac{\partial n_\gamma}{\partial \nu} = -B^2 \frac{\nu}{T} e^{\nu/T}. \quad (6.33)$$

Agora, inserindo esses resultados em (6.30), recuperamos o exato mesmo resultado para a lei de evolução da temperatura no formalismo da teoria macroscópica de processos irreversíveis:

$$B^2 \frac{\nu}{T} e^{\nu/T} \left[\frac{\dot{T}}{T} + \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\Gamma}{3} \right] = 0$$

$$\boxed{\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Gamma}{3}}, \quad (6.34)$$

um resultado, como dito anteriormente, em perfeita concordância com as deduções heurística e macroscópica. A condição necessária para que um espectro planckiano seja preservado no curso da expansão é apenas a validade da lei de temperatura estendida com a criação “adiabática” de fótons.

Para ilustrar o efeito da criação de fótons na lei de temperatura, vamos supor uma taxa de criação constante desde a recombinação. ($\Gamma \equiv \Gamma_0$) e uma evolução no modelo. Neste caso, o número móvel de fótons e a temperatura ficam

$$N(z) = N_0 e^{-\Gamma_0(t_0-t(z))} \Rightarrow T = T_0(1+z)e^{-\alpha F(\Omega_m, z)}, \quad (6.35)$$

em que $\alpha = \Gamma_0/3H_0$ e

$$F(\Omega_m, z) = \int_{1/(1+z)}^1 [\Omega_m x^{-1} + (1 - \Omega_m)x^2]^{-1/2} dx.$$

Como esperado, o processo de criação de fótons implica que $N(z) \leq N_0$. Ambas as quantidades $N(z)$ e $T(z)$ dependem do tempo de *lookback* cósmico $[t_0 - T(z)]$.

A Figura 6.1 mostra a função $T(z)$ para alguns valores selecionados do parâmetro livre α .

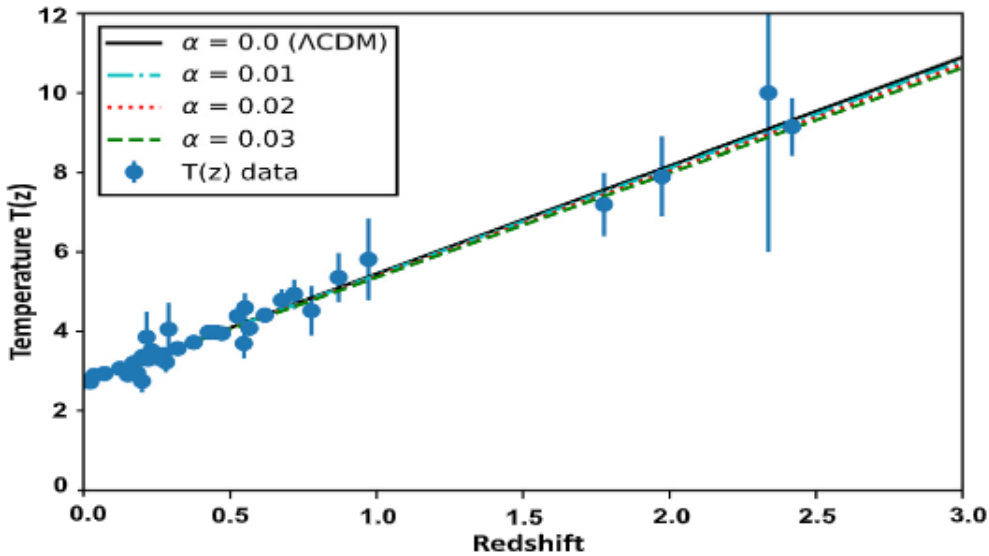


Figura 6.1: $T(z)$ para taxa de criação de fótons constante. A linha preta sólida ($\alpha = 0$) corresponde à lei da temperatura linear padrão ($\Gamma_0 = 0$). Para α e z diferentes de zero, a lei é não linear e depende da constante de Hubble H_0 . Tal conexão está ausente na lei linear (termômetro cósmico padrão) e pode ajudar a aliviar a tensão de corrente em H_0 .

As medições da temperatura da CMB são geralmente obtidas a partir do efeito de [101] e também por meio de estados de excitação de moléculas interestelares (por exemplo, C, CO, CNO). Para um determinado valor em $z = 0$, a temperatura é menor do que no modelo LambdaCDM padrão sem criação (linha preta sólida). Para α e z diferentes de zero, a lei é não linear e depende da constante de Hubble H_0 [89]. Tal conexão está

ausente na lei de Friedmann linear e pode ajudar a aliviar a tensão de corrente nos valores de H_0 .

Na Figura 6.2, para o mesmo conjunto de dados, mostramos também a probabilidade do parâmetro α adimensional definido em termos da taxa de criação Γ_0 .

Em nossa análise $\alpha = 0,0114^{+0,0174}_{-0,0176}$ em 1σ nível de confiança.

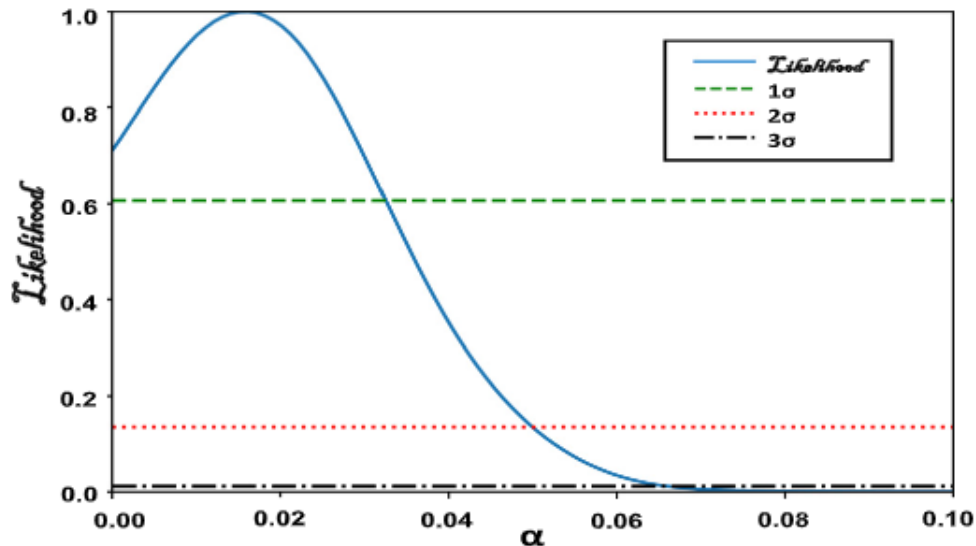


Figura 6.2: Probabilidade para taxa de criação de fótons constante. A segunda lei da termodinâmica restringe Γ_0 a valores positivos. Isso significa que o parâmetro livre $\alpha = \Gamma_0/3H_0$ também é positivo. Usando o melhor ajuste de α (ver texto), encontramos $\Gamma_0 \cong 0,04H_0$.

Resumindo, investigamos a possibilidade de um termômetro cósmico estendido (lei da temperatura da CMB) levando em consideração o conceito de criação “adiabática” de fótons. A lei de temperatura da CMB que descreve a história cósmica no nível não perturbado foi derivada com base em três abordagens distintas, a saber: heurística, macroscópica e uma abordagem teórico-cinética. O conceito “adiabático” aqui significa que a entropia aumenta com o passar do tempo, mas a entropia específica permanece constante durante o processo de criação dos fótons. Isso acontece quando as taxas de criação de partículas e entropia são iguais, $\dot{S}/S = \dot{N}/N = \Gamma$.

Mostramos também que o espectro no processo de criação “adiabática” para partículas quânticas sem massa é preservado ao longo da expansão cósmica [Planck e Fermi-Dirac ($\epsilon = \pm 1$)], respectivamente. Quando a taxa de criação é desprezível, a única diferença é que a lei de temperatura resultante descreve o processo de equilíbrio adiabático usual ao longo da expansão do universo [ver equação (??)].

O caso geral ($\Gamma_S \neq \Gamma_N$) não satisfaz a condição “adiabática” porque $\dot{\sigma} \neq 0$. A produção de entropia, neste caso, também é acompanhada pela produção de entropia específica (por fóton). Neste caso, a pressão de criação calculada e a lei da temperatura são modificadas. Os resultados preliminares sugerem que o espectro do corpo negro não é preservado no curso da expansão. Por fim, é importante notar que o processo de

criação "adiabática" de fótons e a lei de temperatura associada implicam que o padrão das anisotropias na CMB será ligeiramente modificado. Isso significa que mesmo o efeito Sachs-Wolfe integrado, conforme previsto pela cosmologia de concordância cósmica (Λ CDM), deve mudar em comparação com a abordagem padrão (sem criação "adiabática"). Potencialmente, a presente abordagem abre uma nova janela para examinar não apenas a tensão $H_0 \times$ SNe-CMB, mas também outras dificuldades da cosmologia Λ CDM. O resultado chave pertinente a este capítulo é o seguinte: a equação relativística geral de Boltzmann modificada, com criação "adiabática" de fótons, já sugere, por construção, uma modificação. Entretanto, tal modificação não implica que o espectro planckiano não seja preservado. Tal como no caso de equilíbrio, a preservação do espectro é também uma consequência da lei de temperatura estendida.

6.3.2 Distorções no Espectro Planckiano

Convém observar que as distorções no espectro planckiano com criação "adiabática" podem ser facilmente investigadas adicionando os termos colisionais convencionais à equação de Boltzmann sem colisão estendida. Nesse caso, em termos do número de ocupação, a equação geral regendo a evolução devida aos processos colisionais pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial n_\gamma}{\partial t} - \nu H \frac{\partial n_\gamma}{\partial \nu} + \frac{\Gamma}{3} \nu \frac{\partial n_\gamma}{\partial \nu} = \frac{dn_\gamma}{dt}|_C + \frac{dn_\gamma}{dt}|_{DC} + \frac{dn_\gamma}{dt}|_{BR}, \quad (6.36)$$

em que os termos à direita acima são as fontes mais comuns de distorções, a saber, "espalhamento Compton" (C), "emissão dupla Compton" (DC - "Double Compton") e "Bremsstrahlung" (B), respectivamente. A equação acima deve ser comparada com uma abordagem distinta [102], também adotada para tratar distorções no contexto de produção adiabática de fótons com decaimento do vácuo.

Observe que o espectro é de Planck, mas apenas quando essas fontes não são levadas em consideração. Portanto, está claro que a criação "adiabática" de fótons induzida gravitacionalmente, por si, só não provoca qualquer distorção. Fisicamente isto acontece porque os fótons são criados com a mesma temperatura do espectro existente.

Distorções e suas conexões com as anisotropias da CMB constituem um tópico atual na literatura [103; 104; 105]. De fato, vários projetos foram propostos para observar distorções espectrais na CMB com sensibilidade necessária para sondar esta fenomenologia (ver, por exemplo, Astro2020 APC White Paper [106]). Nesse contexto, a criação "adiabática" de fótons, conforme discutido aqui e adicionando-se os termos colisionais é uma possibilidade clara de uma nova física a luz da equação (6.36).

6.3.3 Breves Considerações

Os resultados deste capítulo são válidas não apenas para a criação gravitacionalmente induzida de fótons, mas também quando duas componentes estão trocando energia e partículas obedecendo à condição “adiabática” [22; 107]. Naturalmente, nesse caso geral também pode acontecer que a condição $\Gamma_S \neq \Gamma_N$ seja satisfeita e portanto a condição “adiabática” é violada e os resultados não se aplicam, pois a produção de entropia total é acompanhada pela produção de entropia específica (por fóton). Neste caso, a pressão de criação calculada e a lei da temperatura são modificadas. Resultados preliminares sugerem que o espectro do corpo negro não é preservado no curso da expansão. Por fim, é importante notar que o processo de criação "adiabática" de fótons e a lei de temperatura associada implicam que o padrão das anisotropias na CMB será ligeiramente modificado. Isso significa que mesmo o efeito Sachs-Wolfe integrado, conforme previsto pela cosmologia de concordância cósmica (Λ CDM), deve mudar em comparação com a abordagem padrão (sem criação "adiabática"). Tais considerações sugerem que a presente abordagem abre algumas trilhas de comparação entre o modelo CCDM estendido e o modelo de concordância cósmica no setor térmico.

Conclusões e Perspectivas

Conforme discutido nos capítulos anteriores da presente tese, ao objetivo central da cosmologia teórica moderna consiste obter uma descrição matemática consistente com as observações astronômicas. Uma vez em posse desse hipotético “modelo cosmológico definitivo”, seríamos capazes de descrever a evolução e formação de estruturas do Universo. Estamos vivenciando, no momento presente, a instituição de um paradigma na cosmologia, tanto do ponto de vista teórico quanto do observacional: o presente estado de expansão acelerada do Universo [46; 108].

Sabemos também que do ponto de vista observacional, um modelo cosmológico realístico deve primeiro satisfazer os seguintes requisitos: (i) ser aproximadamente plano, como indicam os dados da CMB; (ii) possuir uma componente de matéria escura não-relativística e não-bariônica, requerido, entre outras coisas, pelas curvas de rotação das galáxias; (iii) sua fase atual deve ser de expansão acelerada, de acordo com as observações sobre SNe Ia e (iv) ser capaz de compatibilizar uma constante de Hubble com a previsão de que o Universo deve ter uma idade superior a 12 bilhões de anos, para que acomode as estruturas mais antigas já observadas.

O Modelo Padrão de Concordância Cósmica (Λ CDM), embora se ajuste bem aos dados observacionais (considerando a expansão) e dependa de um único parâmetro livre (Λ), mostra-se desafiado por quatro importantes questões/problemas, a saber: (i) o problema da constante cosmológica; (ii) o problema da coincidência cósmica; (iii) a tensão de Hubble (SNe Ia \times CMB) referente às medidas de H_0 ; (iv) a tensão σ_8 que propõe discrepâncias entre cálculos de valores para aglomerados de galáxias baseados na CMB e valores baseados na observação direta destes mesmos aglomerados.

Por outro lado, quando adotamos a relatividade geral como teoria de gravidade, os modelos que possuam um termo de pressão negativa podem ser considerados alternativas ao modelo Λ CDM no que se refere à previsão de uma expansão acelerada nos últimos estágios. Nesse contexto, modelos com criação gravitacionalmente induzida de partículas, cuja implementação gera um termo de pressão negativo, vem sendo bastante investigados na última década. Portanto, mesmo não sendo a corrente principal (“*main stream*”), tais modelos vem adquirido relevância no cenário cosmológico recente.

Nesta tese, investigamos primeiramente as propriedades termodinâmicas e cinéticas de um multifluido desacoplado arbitrário: uma mistura de fluidos tratada como sendo um sistema aberto gerando entropia e partículas. A princípio, como discutido no capí-

tulo 5, a criação de partículas é gravitacionalmente induzida com diferentes taxas de criação. Nosso objetivo nesta altura do trabalho estava associado à generalização para multifluidos do modelo LJO (ver capítulo 3, seção 3.2). Este resultado deixou claro que o modelo Λ CDM pode ser estendido para um multifluido cosmológico sem perda de generalidade. Resultados como a expressão para a pressão de criação e lei de evolução da temperatura foram deduzidas. Mostramos que tanto do ponto de vista macroscópico quanto do cinético, as mesmas formas para a pressão de criação e lei de evolução da temperatura são recuperadas no caso “adiabático”.

Um resultado chave pertinente aos capítulos 5 & 6 é o caso particular para um fluido de radiação. A equação de Boltzmann estendida com criação “adiabática” de fótons da CMB é modificada pela taxa de criação, mas seu espectro planckiano é preservado, um resultado garantido pela lei de temperatura, tal como discutido com mais detalhes no capítulo 6. O mesmo resultado vale também para férmions sem massa.

Em linhas gerais, os principais resultados obtidos nesta tese estão elencados a seguir:

1) No capítulo 5, mostramos que no caso geral, isto é, quando a taxa de produção de entropia ($\Gamma_{(k)S}$) é diferente da taxa de produção do número de partículas ($\Gamma_{(k)N}$), existe uma variação temporal não nula da entropia específica $\sigma_{(k)}$ de cada componente (**Trevisani & Lima, 2023**). Particularmente, foi obtido o seguinte resultado (ver também capítulo 6 para um fluido simples):

$$\dot{\sigma}_{(k)} = \sigma_{(k)} (\Gamma_{(k)S} - \Gamma_{(k)N}) . \quad (6.37)$$

Note que $\dot{\sigma}_{(k)} = 0$ apenas para duas situações distintas: (i) estados de equilíbrio termodinâmico quando $\Gamma_{(k)S} = \Gamma_{(k)N} \equiv 0$, e (ii) estados de não-equilíbrio ($\dot{S}_{(k)}, \dot{N}_{(k)} \neq 0$), mas com ($\Gamma_{(k)S} = \Gamma_{(k)N}$). Este é o caso da “criação adiabática” discutido originalmente por [1], e esclarecido posteriormente em [21; 95] na formulação de fluido simples. Portanto, em geral $\dot{\sigma}_{(k)} \geq 0$ para modelos de criação de matéria, com a entropia específica sendo produzida a partir do “calor não-compensado”; sendo a entropia extra oriunda da termalização das partículas, para cada componente desacoplada. Também vale notar que para $\Gamma_{(k)N} \equiv 0$ mas $\Gamma_{(k)S} \neq 0$, estamos descrevendo (para cada componente) um puro fenômeno de viscosidade volumar (vide capítulo 3) devido à expansão do Universo [95]. Neste caso, $\dot{\sigma}_{(k)} > 0$ e o espectro térmico da CMB é destruído no decorrer da expansão. No entanto, isso não acontece no caso “adiabático”, como cineticamente demonstrado com base na equação de Boltzmann modificada. É interessante que a mesma lei de temperatura foi obtida no capítulo 6, seguindo três formulações distintas: a heurística, a macroscópica e a microscópica (cinética) (ver **Lima, Trevisani & Santos, 2021**).

2) Para cada componente k do multifluido cosmológico, a eficiência do fenômeno de criação depende da razão $\Gamma_{(k)}/H$. Obviamente, para uma determinada componente, o processo é desprezível se $\Gamma_{(k)} \ll H$. Os resultados macroscópicos irreversíveis são válidos para qualquer geometria do tipo FLRW e também para quaisquer valores de $\Gamma_{(k)N}$ e

$\Gamma_{(k)S} \geq 0$. No entanto, *por simplicidade, a contraparte cinética foi deduzida apenas para o caso plano ($k = 0$) e com criação “adiabática”* definida por $\Gamma_{(k)N} = \Gamma_{(k)S}$.

3) Todo o processo de criação de partículas como descrito aqui é irreversível, mas o ganho de entropia no caso “adiabático” (o mais interessante do ponto de vista físico), depende apenas das partículas criadas ($S_{(k)} = k_B N_{(k)}$). Isso acontece porque $\Gamma_{(k)N} = \Gamma_{(k)S} \equiv \Gamma_{(k)}$, de modo que $\dot{\sigma}_{(k)} = 0$. Assim, para cada componente desacoplada, isto significa que tanto a entropia total quanto o número de partículas aumentam, mas a entropia específica (por partícula), $\sigma_{(k)} = S_{(k)}/N_{(k)}$, permanece constante.

4) Nossa abordagem com criação de todas as componentes do multifluido desenvolvida nesta tese é de fato uma descrição de ordem zero, no sentido de que as distribuições relativísticas tem a mesma forma de equilíbrio. Este resultado foi também provado cineticamente. Em particular o espectro de corpo negro da CMB incluindo criação de partículas não é destruído no decorrer da expansão (**Lima, Trevisani & Santos, 2022**). Note também que em ordem zero, a equação de Boltzmann é isotrópica como acontece, por exemplo, no modelo Λ CDM. Nessa mesma ordem, a cosmologia CCDM estendida com criação de bárions, CDM, fótons e neutrinos é dinamicamente descrita por $H(t)$ e as diferentes taxas de criação $\Gamma_{(k)}$. Essas diferentes quantidades afetam a lei de temperatura de cada componente desacoplada do fluido.

5) Na cosmologia CCDM estendida existe um bônus extra: a componente correspondente à densidade de energia escura não é mais necessária (*i.e.*, $\Omega_{DE} \equiv 0$)⁴, resolvendo assim naturalmente dois mistérios básicos do modelo Λ CDM: os problemas da constante cosmológica e da coincidência cósmica. Além disso, a transição de uma fase desacelerada para um estágio acelerado (em *redshifts* intermediários) é possível devido à pressão de criação negativa e também ocorre na fase dominada pela matéria não-relativística (CDM e bárions) e no mesmo *redshift* do modelo Λ CDM. Esse resultado também está de acordo com as observações de supernovas.

6) Conforme discutido no capítulo 6, a criação “adiabática” de fótons da CMB a nível da história cósmica não pode ser descrita como uma fonte de distorções no espectro da CMB: a criação “adiabática” de fótons da CMB preserva o caráter Planckiano do espectro.

Além disso, como os fótons criados compartilham a mesma temperatura dos já existentes, todos os termos de colisão na presença de criação “adiabática” devem ser proporcionais a Θ e outras quantidades perturbativamente pequenas. Portanto, a contribuição da criação de fótons induzida pelo Universo em expansão não é equivalente (no caso “adiabático”) a um termo colisional por si só. em outras palavras, só é cineticamente relevante o operador de Liouville modificado, e não mais o colisional padrão.

7) Quando a criação de fótons é desprezada, o efeito Sachs-Wolfe Integrado (ISW) no modelo CCDM estendido é o mesmo da cosmologia Λ CDM. Isso ocorre porque o

⁴Com isso, se está procedendo de modo a promover a chamada “**redução do setor escuro**”.

potencial gravitacional é o mesmo nos dois cenários (os modelos são equivalentes a nível linear e não linear). No entanto, esse resultado é modificado quando fótons da CMB são criados, por dois motivos (i) a lei de temperatura é modificada e (ii) a equação de Boltzmann perturbada para os fótons da CMB adquire um termo adicional.

8) A presente análise, também aponta uma nova janela para investigar a tensão H_0 via espectro da CMB ou apontadores locais, em virtude de duas razões: (i) O modelo não perturbado CCDM estendido tem a mesma dinâmica de Λ CDM com a geometria perturbada sendo suportada por matéria não-relativística, (ii) A criação das componentes remanescentes (fótons da CMB e neutrinos) altera ligeiramente a história térmica da expansão em tempos iniciais e tardios. Esse último efeito deve modificar levemente o efeito Sachs-Wolfe (SWE) e como já foi observado (ver item 7), também a parte integrada deste efeito.

Acreditamos que nosso trabalho abre algumas perspectivas teóricas interessantes, pois a geração vindoura de novos telescópios e radio-telescópios (GMT, BINGO, SKA, etc.) e “*surveys*” mais profundos em andamento (extensões do DES, LSST & BOSS) nos conduzirá inexoravelmente a uma maior consolidação na era da precisão cosmológica. Isto significa que a cosmologia deverá readaptar-se a fim de responder um quadro mais complexo de perguntas, com análises de dados cada vez mais precisas, espaços de parâmetros cada vez mais restritos e um número crescente de modelos eliminados pelas observações.

Nesse sentido, devemos dar prosseguimento ao presente trabalho investigando alguns novos efeitos. Um deles é o espectro de potências das anisotropias de temperatura da CMB no contexto do modelo CCDM estendido. Em ordem zero a equação de Boltzmann também é isotrópica como acontece no modelo Λ CDM. Gravitacionalmente, o modelo em primeira ordem é também equivalente ao modelo de concordância cósmica. Assim, poderemos quantificar o efeito da criação de fótons e neutrinos e, eventualmente, identificar e analisar seu potencial como um teste crucial comparando Λ CDM e a cosmologia CCDM estendida. Naturalmente, esse efeito deve ser analisado no quadro geral aqui apresentado, por dois motivos: (i) o modelo CCDM estendido não perturbado (história cósmica), tem uma transição (desacelerado/aceleração) e reproduz exatamente a dinâmica de Λ CDM, e (ii) a hierarquia completa das equações de Boltzmann perturbadas para todas as componentes com criação deve também ser considerada.

A primeira condição é um tanto desejável por causa dos sucessos reconhecidos de Λ CDM para muitas sondas cósmicas. Implicitamente, isso também significa que qualquer cosmologia realista deve ser o mais próximo possível do modelo Λ CDM, mas ligeiramente diferente para apontar uma nova rota. Deve, ainda, lidar com as tensões enquanto lança simultaneamente alguma luz nos “mistérios teóricos” do modelo Λ CDM (problemas de Λ e da coincidência cósmica).

Outro importante processo a ser reinvestigado, associado com as distorções no es-

pectro da CMB, é o fenômeno conhecido como “Efeito Sunyaev-Zeldovich” (SZE). Nesse contexto, o estudo de tal distorção deve ser baseado na equação de Boltzmann modificada, mas agora incluindo um termo colisional, a chamada dispersão Compton:

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} - Hp \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\Gamma_r}{3} p \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{df}{dt}|_C,$$

em que no lado direito temos o termo colisional correspondente (ver capítulo 6).

Na equação acima, quando $\Gamma_r = 0$ temos o SZE padrão. Existem 2 tipos de efeito SZE: o térmico e o cinético. O SZE térmico é a distorção espectral da CMB causada pelo espalhamento Compton inverso de fótons pelos elétrons quentes de um gás ionizado ($T_e \sim 10^{78}\text{K}$) através da linha de visada. O número total de fótons em tais processos elementares é conservado e seu efeito é bastante simples, a saber: os fótons da CMB são espalhados pelos elétrons quentes, despovoando assim a região de baixa frequência (Rayleigh-Jeans) do espectro. Como resultado, os fótons espalhados se movem para as bandas de mais alta energia da distribuição de fótons. Ao assumir um espectro da CMB inicial de corpo negro, o efeito líquido após a dispersão é que o espectro fica ligeiramente distorcido. No tratamento padrão (sem criação de fótons) o SZE é simplificado porque não depende do desvio para o vermelho. No entanto, tal condição é violada na presente estrutura porque a lei de temperatura padrão ΛCDM não é obedecida. Portanto, reconsiderando o efeito com base na equação de Boltzmann acima modificada, o SZE pode também tornar-se um teste interessante para confrontarmos ΛCDM e a atual cosmologia CCDM estendida. Observamos também que o movimento dos aglomerados, em relação ao fluxo de Hubble, também produz um "efeito SZ cinemático ou Cinético (*Kinetic*)". Este efeito é geralmente muito menor do que o SZE térmico, mas também é bastante relevante no contexto atual pois pode ser usado para determinar o comportamento de clusters e até mesmo a própria constante de Hubble. Finalmente, informamos que além do SZE térmico e cinético, as consequências físicas do modelo CCDM estendido, relacionadas com as tensões H_0 e S_8 , estão presentemente sob investigação.

É de se esperar que quanto maior a relevância energética de um fluido cosmológico, maior deverá ser a contribuição em termos da pressão de criação com a qual a mesma contribuirá. Logo, à matéria escura (que corresponde com aproximadamente 23% da contribuição energética total do espaço-tempo) corresponde a maior contribuição na produção do termo de pressão negativa responsável pela aceleração. A este modelo, com criação apenas de CDM, há diversos modelos cosmológicos entre os quais cabe mencionar o modelo LJO.

Embora a distribuição da densidade sem energia escura ainda não seja uma questão totalmente resolvida, é de se esperar que valha a relação de proporcionalidade: quanto maior a relevância energética, maior será a ação da pressão de criação.

As maneiras melhores para se especular acerca de como os efeitos Sunyaev-Zeldovich

e Sachs-Wolfe contrangem o modelo obtido a partir da observação direta, devem levar em conta que lentes gravitacionais modificam fortemente os parâmetros sugeridos a partir da obtenção dos dados diretamente. Mas de qualquer maneira, dados obtidos a partir de SZE e SWE permitem uma consolidada hipótese sobre de que maneira os dados se ajustam aos modelos.

Apêndice A

O *Redshift* Cosmológico

Seja a métrica FLRW descrita espacialmente em coordenadas esféricas

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (\text{A.1})$$

Como, do “Princípio Cosmológico”, $d\theta^2 = d\phi^2 = 0$; e levando-se em conta ser luz a componente cosmológica aqui tratada ($ds^2 = 0$), fica-se apenas com

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (\text{A.2})$$

Considere que uma galáxia em r_* emita um sinal em $t = t_*$. Um observador em $r = 0$ recebe este mesmo sinal em $t = t_0$. Então,

$$\int_{t_*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (\text{A.3})$$

Considere, agora, que um segundo sinal seja emitido em $t = t_* + \delta t_*$. Este sinal será observado em $r = 0$ no instante $t = t_0 + \delta t_0$:

$$\int_{t_* + \delta t_*}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_*}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (\text{A.4})$$

Igualando-se as (A.3) e (A.4),

$$\int_{t_*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_* + \delta t_*}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{A.5})$$

Considerando que

$$\int_{t_*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_*}^{t_1 + \delta t_*} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_* + \delta t_*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (\text{A.6})$$

e que

$$\int_{t_* + \delta t_*}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_* + \delta t_*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo-se adequadamente os termos nas duas relações anteriores, chega-se a que:

$$\int_{t_*}^{t_*+\delta t_*} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (\text{A.8})$$

Considerando-se que $a(t) \approx$ constante para $\delta t_* \approx 0$,

$$\frac{1}{a(t_*)} \int_{t_*}^{t_*+\delta t_*} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} dt. \quad (\text{A.9})$$

Portanto,

$$\frac{\delta t_*}{a(t_*)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (\text{A.10})$$

Considerando-se

$$\lambda_j = \frac{c}{v_j} \text{ e } \delta t_j = \frac{1}{\nu_j} \Rightarrow \frac{\lambda_*}{a(t_*)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}. \quad (\text{A.11})$$

Da definição para o parâmetro z :

$$z = \frac{\lambda_{\text{observado}} - \lambda_{\text{emitido}}}{\lambda_{\text{emitido}}}$$

Portanto,

$$\boxed{1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_*)}}. \quad (\text{A.12})$$

Apêndice B

Inflação

No final da década de 70 do século passado, o modelo cosmológico do “*Big Bang*” já estava se consolidando conceitualmente. No entanto, o modelo padrão de então, enfrentava alguns desafios teóricos para explicar seu desenvolvimento quando da origem do Universo. São eles os chamados (i) problema da “planura” (*flatness problem*); (ii) problema do horizonte e, por fim, (iii) problema dos monopólos.

Em 1981 Alan H. Guth [109] propôs um cenário cosmológico em que todos estes problemas eram resolvidos: o cenário inflacionário, no qual, uma fração de segundo após o *Big Bang* (entre 10^{-36} s e 10^{-34} s) o Universo teria sofrido uma expansão que ampliou seu tamanho por um fator da ordem de 10^{60} .

O cenário inflacionário proposto por Guth resolveu os problemas das condições iniciais do Universo, mas trouxe consigo outros problemas. Segundo os proponentes da inflação cósmica, quando o Universo, ao esfriar, atingiu a temperatura de 10^{28} K - a temperatura da GUT (*Grand Unified Theory*) - ocorreu uma transição de fase e o conteúdo material e energético do *cosmos* passou a ser dominado por um falso vácuo de um campo quântico. O efeito dinâmico deste falso vácuo é equivalente ao da constante cosmológica, promovendo uma repulsão cósmica que fez o Universo expandir aceleradamente.

É esta repulsão que provoca o aumento abrupto no volume do Universo. Ao final da inflação houve um breve estágio de reaquecimento, e o Universo emergiu desta era inflacionária dominado por matéria relativística; e localmente quase isotrópico e homogêneo.

Para percebermos como o cenário inflacionário resolve os problemas das condições iniciais do Universo, explicaremos brevemente cada um destes problemas.

a) O “Problema da Planura”

O problema da planura vem do fato de que as estimativas da época mostravam que a mínima flutuação de densidade em relação à crítica (ρ_{cr}) na era da radiação, ou seja, se o parâmetro de curvatura fosse ainda que levemente diferente de zero, o nosso Universo não poderia existir. Como a inflação amplifica uma região do

espaço com dimensões da ordem de grandeza do tamanho de um próton (que seria obrigatoriamente euclídeana), para uma região com tamanho da ordem de 100Mpc, o espaço-tempo deve ser necessariamente plano.

b) **O “Problema do Horizonte”**

O problema do horizonte decorre da extrema uniformidade do Universo em grande escala, uniformidade esta que é evidenciada pela CMB mesmo quando observada em regiões diametralmente opostas do céu. Estas regiões, até o desacoplamento matéria-radiação, não estavam causalmente conexas; e só seria possível que elas tivessem desenvolvido condições quase idênticas se o Universo tivesse partido de um estado de uniformidade quase perfeita, Esse estado é possível devido ao reaquecimento ao final da era da inflação.

c) **O “Problema dos Monopólos”**

Segundo teorias de unificação, monopólos (como o magnético, *i.e.*) seriam gerados nas transições de fase do Universo primordial e deveriam ser observados nos dias de hoje ou, mais especificamente, teriam feito o Universo recolapsar antes da formação das primeiras estruturas. A inflação é o mecanismo que dilui tais monopólos, impedindo que eles fizessem o Universo recolapsar.

Após a inflação cósmica, o Universo teria evoluído como previsto pelo modelo do *Big Bang*.

No presente apêndice, não trataremos de todos os problemas relacionados ao cenário inflacionário; mas apenas do problema do horizonte.

O “Problema do Horizonte”: Revisitando o Conceito de Tempo Conforme

Seja a relação entre alguma **escala** (ou modo) k arbitrária e o **comprimento de onda comóvel** λ

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (\text{B.1})$$

Defina-se, ainda, por **horizonte comóvel** η a quantidade tal que

$$\eta \equiv \int \frac{dt'}{a'}. \quad (\text{B.2})$$

Se o produto $k\eta$ for muito menor do que 1, a escala em questão tem λ muito maior do que η : **LS**. Equivalentemente, $k\eta = 1$ corresponde a modos com $\lambda = \eta$; por fim, escalas para as quais $k\eta > 1$ correspondem a modos com λ no interior do horizonte η .

Note ainda que, por construção, η cresce durante toda a inflação. Desta maneira, convencionou-se redefinir η ignorando a parcela primordial η_* .

Então,

$$\eta \approx \int_t^{t_*} \frac{1}{a(t')} dt' \equiv \int_a^{a_*} \frac{1}{a'} \left(\frac{1}{a'H} da' \right).$$

Considerando H variar muito lentamente durante a inflação,

$$\begin{aligned} \eta &\approx \frac{1}{H} \int_a^{a_*} \frac{1}{(a')^2} da' = \\ &= -\frac{1}{H} \left(\frac{1}{a'} \right) \Big|_a^{a_*} = -\frac{1}{H} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_*} \right). \end{aligned}$$

Como $a_* \gg a$,

$$\eta \approx -\frac{1}{aH}. \quad (\text{B.3})$$

Nestes termos, define-se o **raio de Hubble** por

$$\boxed{R_H(t) = \frac{1}{a(t)H(t)}}; \quad (\text{B.4})$$

quantidade esta que deverá ser bastante usada no decorrer da presente seção.

O “Problema do Horizonte”: Enunciado

Por simplicidade, considere o Universo dominado energeticamente pela matéria desde o seu princípio/origem:

$$a_m(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}. \quad (\text{B.5})$$

Nestes termos, o horizonte (distância) comóvel quando da recombinação η_R pode ser calculada em termos de:

$$\begin{aligned} \eta_R &= \int_0^{t_R} \frac{1}{a(t')} dt' = \int_0^{t_R} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-2/3} dt' = 3t_0^{2/3} t_R^{1/3} \\ &\therefore \boxed{\eta_R = 3t_0^{2/3} t_R^{1/3}}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

No tempo presente, a região causalmente conexa quando da recombinação pode ser descrita em termos de $\eta_0 - \eta_R$; em que

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \int_0^{t_0} \frac{1}{a(t')} dt' = 3t_0^{2/3} t_0^{1/3} = 3t_0 \\ &\therefore \boxed{\eta_0 = 3t_0}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Logo,

$$\eta_0 - \eta_R = 3t_0 - 3t_0^{2/3}t_R^{1/3} = 3t_0 \left[1 - \left(\frac{t_R}{t_0} \right)^{1/3} \right];$$

de modo que a razão $\eta_R/(\eta_0 - \eta_R)$ nos permite concluir

$$\frac{\eta_R}{\eta_0 - \eta_R} \approx \frac{3t_0^{2/3}t_R^{1/3}}{3t_0} = \left(\frac{t_R}{t_0} \right)^{1/3} \approx \left(\frac{10^5}{10^{10}} \right)^{1/3} \approx 0,01.$$

Isso significa que regiões causalmente conexas do céu quando da LSS são subentendidas, no presente, por aproximadamente 1° .

Esta última afirmação é inconsistente com as observações, já que a CMB observada é isotrópica em todo o céu. Isto define o chamado “**Problema de Horizonte**”.

O “Problema do Horizonte”: Solução

• Inflação

O raio de Hubble $R_H = 1/(aH)$ decresceria com o tempo ($\dot{R}_H < 0$) durante algum intervalo quando nos primórdios do Universo.

Esta consideração implica

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{da/dt} \right) = -\frac{d^2a/dt^2}{(da/dt)^2} < 0 \\ \therefore \boxed{\frac{d^2a}{dt^2} > 0}. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Assim, neste contexto, o Universo se expandiria aceleradamente na fase inflacionária.

Considerado o modelo inflacionário, regiões causalmente conexas (originalmente) em algum momento perderiam este contato causal ao passo que R_H passasse a decrescer.

Entretanto, com a volta da expansão na era da radiação, estas mesmas regiões passam a reentrar gradativamente no horizonte; de maneira que, qualitativamente, se justificaria, assim, a isotropia do Universo em largas escalas (e não apenas em 1°).

Levando-se em consideração este modelo inflacionário, uma questão se impõe imediatamente: “Que tipo de substância seria capaz de justificar esta expansão acelerada do Universo (uma vez que matéria bariônica apenas atrai gravitacionalmente)?”

Para responder essa questão, voltemos às equações de Einstein (especialmente “flats” e sem Λ) não-perturbadas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= -8\pi G P; \end{aligned}$$

que, combinadas, resultam que

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (\text{B.9})$$

Então, para estados de expansão universal acelerada,

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow (\rho + 3P) < 0 \Rightarrow \boxed{P < \frac{\rho}{3}}. \quad (\text{B.10})$$

Logo, já que para bárions, $P = 0$ e para radiação $P = \rho/3 > 0$; essa substância responsável pela expansão acelerada do Universo deve ser diferente de todos os tipos de matéria/energia conhecidos pelo homem hoje.

Uma quantidade para a Inflação: os *e-foldings*

Seja a razão entre os raios de Hubble quando do final da inflação t_* e no tempo presente:

$$\frac{R_H(t_*)}{R_H(t_0)} = \frac{(H_* a_*)^{-1}}{(H_0 a_0)^{-1}} = \frac{H_0 a_0}{H_* a_*}, \quad (\text{B.11})$$

em que $a_* \equiv a(t_*)$.

Em um universo dominado pela radiação, $\rho \propto a^{-4}$.

$$\begin{aligned} H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho &\Rightarrow H \propto \sqrt{\rho} \propto a^{-2} \\ &\Rightarrow H_* \propto a_*^{-2} \equiv a_*^{-2} H_0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Logo,

$$\frac{H_0 a_0}{H_* a_*} = \frac{a_*^2 H_*}{H_* a_*} \propto a_*. \quad (\text{B.13})$$

Considerando-se, ainda, que $T_* \approx 10^{15}\text{Gev}$ e $T_0 \approx 10^{-4}\text{ev}$,

$$\frac{a_*}{a_0} \propto \frac{(1/T_*)}{(1/T_0)} \approx 10^{-28}. \quad (\text{B.14})$$

Então, para o modelo inflacionário funcionar, o raio de Hubble deve decrescer 28 ordens de grandeza do final na inflação até o momento presente.

Como $R_H \propto a^{-1}$, define-se por **número de e-foldings** $N(t)$ o logaritmo (neperiano) da razão $R_H(t_0)/R_H(t_*)$:

$$\boxed{N(t) \equiv \ln \left[\frac{(H_0 a_0)^{-1}}{(H_* a_*)^{-1}} \right]}. \quad (\text{B.15})$$

Considerando-se que $H \approx \text{constante} \equiv H_0$ quando da inflação.

$$N(t) \approx \ln \left(\frac{a_0}{a_*} \right) \approx 60 . \quad (\text{B.16})$$

Em outras palavras, o modelo inflacionário funciona (*i.e.*, resolve o problema de horizonte quando da época inflacionária) se, quando da inflação, o Universo se expande exponencialmente com mais de 60 e-folds.

Apêndice C

O “Teorema H de Boltzmann”

Considere (110)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_0}{\partial t}(v_\alpha) &= \int_{\Omega} \int_{v_\beta} [f_0(v'_\alpha) f_0(v'_\beta) - f_0(v_\alpha) f_0(v_\beta)] g\sigma(\Omega) d^3 v_\beta d\Omega = \\ &\equiv \int_{\Omega} \int_{v_\beta} (f'_{0\alpha} f'_{0\beta} - f_{0\alpha} f_{0\beta}) g\sigma(\Omega) d^3 v_\beta d\Omega = \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial t}\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

Defina a função

$$H(t) \equiv \int f_{0\alpha} \ln f_{0\alpha} d^3 v_\alpha. \quad (\text{C.2})$$

Calcule-se, então,

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \int_{v_\alpha} (1 + \ln f_{0\alpha}) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial t} d^3 v_\alpha \quad (\text{C.3})$$

Substituindo-se a (C.1) na anterior:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int_{\Omega} \int_{v_\beta} \int_{v_\alpha} (1 + \ln f_{0\beta}) (f'_{0\beta} f'_{0\alpha} - f_{0\beta} f_{0\alpha}) g\sigma(\Omega) d\Omega d^3 v_\alpha d^3 v_\beta \quad (\text{C.4})$$

Somando as equações anteriores e dividindo por 2:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{v_\alpha} \int_{v_\beta} [2 + \ln(f_{0\alpha} f_{0\beta})] (f'_{0\alpha} f'_{0\beta} - f_{0\alpha} f_{0\beta}) g\sigma(\Omega) d^3 v_\beta d^3 v_\alpha d\Omega \quad (\text{C.5})$$

Substituindo v_α e v_β por v'_α e v'_β ; e lembrando-se que

$$d^3 v'_\alpha d^3 v'_\beta = d^3 v_\alpha d^3 v_\beta \quad \text{e} \quad g' = g, \quad (\text{C.6})$$

Então,

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{v_\alpha} \int_{v_\beta} [-2 - \ln(f_{0\alpha} f_{0\beta})] (f'_{0\alpha} f'_{0\beta} - f_{0\alpha} f_{0\beta}) g\sigma(\Omega) d^3 v_\beta d^3 v_\alpha d\Omega \quad (\text{C.7})$$

Somando-se as (C.5) e (C.7); e dividindo por 2:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_{v_{\alpha}} \int_{v_{\beta}} \left[\ln \left(\frac{f_{0\alpha} f_{0\beta}}{f'_{0\alpha} f'_{0\beta}} \right) \right] (f'_{0\alpha} f'_{0\beta} - f_{0\alpha} f_{0\beta}) g\sigma(\Omega) d^3 v_{\beta} d^3 v_{\alpha} d\Omega} \quad (\text{C.8})$$

Perceba que se

$$f'_{0\alpha} f'_{0\beta} > f_{0\alpha} f_{0\beta} \Rightarrow \ln \left(\frac{f_{0\alpha} f_{0\beta}}{f'_{0\alpha} f'_{0\beta}} \right) < 0 \therefore \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} < 0}. \quad (\text{C.9})$$

Por outro lado,

$$f'_{0\alpha} f'_{0\beta} < f_{0\alpha} f_{0\beta} \Rightarrow \left[\ln \left(\frac{f_{0\alpha} f_{0\beta}}{f'_{0\alpha} f'_{0\beta}} \right) \right] (f'_{0\alpha} f'_{0\beta} - f_{0\alpha} f_{0\beta}) < 0 \therefore \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} < 0}. \quad (\text{C.10})$$

Por fim, quando $f'_{0\alpha} f'_{0\beta} = f_{0\alpha} f_{0\beta}$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} = 0}. \quad (\text{C.11})$$

Com isso, concluem-se as dedução e prova do chamado “**Teorema H de Boltzmann**”:

$$\therefore \boxed{\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0, \forall t}. \quad (\text{C.12})$$

Apêndice D

Dedução alternativa para o Operador de Liouville

Os passos seguidos na presente dedução foram baseados no texto (111).

A variação da função distribuição acima definida pode ser descrita em termos de

$$\begin{aligned}\frac{df(x^\mu, P^\mu)}{d\lambda} &= P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \frac{dP^\mu}{d\lambda} = \\ &= P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu P^\nu P^\lambda,\end{aligned}\tag{D.1}$$

de modo que os símbolos de Christoffel não-nulos que respeitam a métrica FLRW em coordenadas quasi-cartesianas planas valem:

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij};\tag{D.2}$$

e

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i.$$

Nestes termos,¹

$$\frac{df}{d\lambda} = P^0 \frac{\partial f}{\partial t} - 2\frac{\dot{a}}{a} P^0 P^i \frac{\partial f}{\partial P^i} - \dot{a} a P^2 \frac{\partial f}{\partial P^0}.\tag{D.3}$$

Defina-se, por conveniência, a função (111)

$$\bar{f} = \bar{f}(P, t) = \int f(P^i, P^0, t) \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] dP^0.$$

¹Aqui foi levado em conta a função distribuição (f) não depender da posição.

Calcule-se, daí, $\partial \bar{f} / \partial t$:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] dP^0 + \int f \frac{\partial}{\partial t} \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] dP^0. \quad (D.4)$$

Usando-se as propriedades

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] &= \\ &= \frac{\partial P^0}{\partial t} \Big|_{P^0=(m^2+a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial P^0} [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}]; \end{aligned} \quad (D.5)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P^0}{\partial t} \Big|_{P^0=(m^2+a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}} = \dot{a} a \frac{P^2}{P^0}; \quad (D.6)$$

e

$$\Rightarrow \int \delta'(x) f(x) dx = - \int \delta(x) f'(x) dx; \quad (D.7)$$

chega-se a que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] dP^0 - \dot{a} a \frac{\partial f}{\partial P^0} \frac{P^2}{P^0} \Big|_{P^0=(m^2+a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}}. \quad (D.8)$$

Isolando-se o termo integral:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] dP^0 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \dot{a} a \frac{\partial f}{\partial P^0} \frac{P^2}{P^0} \Big|_{P^0=(m^2+a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}}. \quad (D.9)$$

Nosso interesse maior é integrar a função $(df/d\lambda)$ sobre a “camada de massa”:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{df}{d\lambda} \right) \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] \frac{dP^0}{P^0} &= \\ &= \int \frac{\partial f}{\partial t} \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] dP^0 - \dot{a} a \frac{\partial f}{\partial P^0} \frac{P^2}{P^0} \Big|_{P^0=(m^2+a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}} - 2 \frac{\dot{a}}{a} P^i \frac{\partial \bar{f}}{\partial P^i}. \end{aligned} \quad (D.10)$$

Substituindo a integral (à direita da) anterior pela (F.9), chega-se, finalmente, à seguinte relação para o operador de Liouville,

$$\begin{aligned} L[f] &= \int \left(\frac{df}{d\lambda} \right) \delta [P^0 - (m^2 + a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}] \frac{dP^0}{P^0} = \\ &= \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \dot{a} a \frac{\partial f}{\partial P^0} \frac{P^2}{P^0} \Big|_{P^0=(m^2+a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}} \right) - \dot{a} a \frac{\partial f}{\partial P^0} \frac{P^2}{P^0} \Big|_{P^0=(m^2+a^2 h_{ij} P^i P^j)^{1/2}} \end{aligned} \quad (D.11)$$

$$- 2 \frac{\dot{a}}{a} P^i \frac{\partial \bar{f}}{\partial P^i} \quad (D.12)$$

Portanto, abandonadas as barras sobre as f 's, chega-se à seguinte forma final para o operador de Liouville na “camada de massa”:

$$\boxed{L[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - 2\frac{\dot{a}}{a}P^i \frac{\partial f}{\partial P^i}}. \quad (\text{D.13})$$

Considerando-se o momento físico p^i ,

$$p^i \equiv aP^i \Rightarrow P^i = \frac{p^i}{a}.$$

$$\Rightarrow P^i \frac{\partial f}{\partial P^i} = \left(\frac{p^i}{a}\right) \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{p^i}{a}\right)} = p^i \frac{\partial f}{\partial p^i}.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t, P^i) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, p^i) + \frac{\partial p^i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p^i}(t, p^i) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, p^i) + \frac{\partial(aP^i)}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial p^i}(t, p^i)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial t}(t, P^i) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, p^i) + \frac{\dot{a}}{a}p^i \frac{\partial f}{\partial p^i}$$

Portanto, levando em conta a isotropia do espaço, chega-se à mesma forma (4.36) para $L[f]$:

$$\boxed{L[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}p \frac{\partial f}{\partial p}}. \quad (\text{D.14})$$

Apêndice E

Alguns Resultados Relevantes

E.1 O cálculo da integral na (5.46)

Algumas equações e desenvolvimentos são significativos para o bom entendimento do capítulo 5. Assim, exporemos agora essas quantidades. Iniciaremos pela integral no espaço dos momentos

$$\int p \frac{\partial f}{\partial p} d^3 p = \int p \frac{\partial f}{\partial p} (p^2 \sin \theta dp d\theta d\phi) = 4\pi \int p^3 \frac{\partial f}{\partial p} dp. \quad (\text{E.1})$$

Integrando “por partes”,

$$\begin{aligned} u = p^3 &\Rightarrow du = 3p^2 dp, \\ dv = \frac{\partial f}{\partial p} &\Rightarrow v = f. \end{aligned}$$

teremos a solução da integral acima

$$4\pi \left[\cancel{p^3 f} \Big|_{p=0}^{\infty} - \int f 3p^2 dp \right] = -3 \cancel{4\pi} \int f \frac{p^2 \sin \theta dp d\theta d\phi}{4\pi} = -3 \int f d^3 p = -3 \int f d^3 p, \quad (\text{E.2})$$

em que o primeiro termo da integração por partes se cancela pelo fato de que p^3 é rapidamente suprimido por f para altos valores de p . Portanto,

$$\boxed{\int p \frac{\partial f}{\partial p} d^3 p = -3n}. \quad (\text{E.3})$$

E.2 O cálculo da integral na (5.48)

Outra integral importante surge na sequência do mesmo capítulo 5.

$$\begin{aligned} \int p \frac{\partial f}{\partial p} \ln f d^3 p &= 4\pi \int p^3 \frac{\partial f}{\partial p} \ln f dp = 4\pi \int \left(\frac{\partial f}{\partial p} \ln f + \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \right) p^3 dp = \\ &= 4\pi \int \frac{\partial}{\partial p} (f \ln f - f) p^3 dp. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Seguindo passos equivalentes, integramos “por partes”

$$u = p^3 \Rightarrow du = 3p^2 dp, \quad (\text{E.5})$$

e

$$dv = \frac{\partial}{\partial p} (f \ln f - f) dp \Rightarrow v = f \ln f - f.$$

Então,

$$4\pi \left[\cancel{p^3 (f \ln f - f)} - 3 \int (f \ln f - f) p^2 dp \right] = -3 \int (f \ln f - f) d^3 p = -3s.$$

em que, novamente, o primeiro termo da integração por partes se cancela devido ao fato de que p^3 é rapidamente suprimido por f 's para altos valores de p .

$$\therefore \boxed{\int p \frac{\partial f}{\partial p} \ln f d^3 p = -3s}. \quad (\text{E.6})$$

E.3 O cálculo da integral na (5.56)

Por fim, à terceira e última integral utilizada no capítulo 5 corresponde

$$\int p^0 p \frac{\partial f}{\partial p} d^3 p = \int p^0 p \frac{\partial f}{\partial p} (p^2 \sin \theta dp d\theta d\phi) = 4\pi \int p^0 p^3 \frac{\partial f}{\partial p} dp. \quad (\text{E.7})$$

Integrando, mais uma vez, “por partes”,

$$u = p^0 p^3 \rightarrow du = d(p^0 p^3) = p^3 dp^0 + p^0 dp^3; \quad (\text{E.8})$$

$$dv = \frac{\partial f}{\partial p} dp \rightarrow v = f. \quad (\text{E.9})$$

Então,

$$\frac{du}{dp} = p^3 \frac{dp^0}{dp} + p^0 \frac{d}{dp} p^3 = p^3 \frac{dp^0}{dp} + p^0 3p^2. \quad (\text{E.10})$$

Na “mass shell”,

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = m^2 c^2 \Rightarrow g_{00} p^0 p^0 + g_{ij} p^i p^j = (p^0)^2 + p^2 = m^2 c^2$$

$$\therefore \boxed{p^0 = \sqrt{m^2 c^2 - p^2}}. \quad (\text{E.11})$$

Logo,

$$\frac{dp^0}{dp} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{m^2 c^2 - p^2}} \frac{d}{dp} (m^2 c^2 - p^2) = \frac{1}{2p^0} (-2p) = -\frac{p}{p^0}.$$

O que, substituído na relação para du/dp :

$$\frac{du}{dp} = p^3 \left(\frac{p}{p^0} \right) + p^0 3p^2$$

$$\therefore du = \left(-\frac{p^4}{p^0} + 3p^0 p^2 \right) dp. \quad (\text{E.12})$$

Retomando a integral por partes:

$$4\pi \int p^0 p^3 \frac{\partial f}{\partial p} dp = 4\pi \left[p^0 p^3 f \Big|_{p=0}^{\infty} - \int f \left(-\frac{p^4}{p^0} + 3p^0 p^2 \right) dp \right] = \quad (\text{E.13})$$

$$= -4\pi \int f \left(-\frac{p^4}{p^0} + 3p^0 p^2 \right) dp = 4\pi \int f \frac{p^4}{p^0} dp - 4\pi 3 \int f p^0 p^2 dp = \quad (\text{E.14})$$

$$= 4\pi \int f \frac{p^2}{p^0} \frac{(p^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi)}{4\pi} - 4\pi \int f \frac{p^2}{p^0} \frac{(p^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi)}{4\pi}. \quad (\text{E.15})$$

Voltando às coordenadas cartesianas:

$$4\pi \int p^0 p^3 \frac{\partial f}{\partial p} dp = \int f \frac{p^2}{p^0} d^3 p - 3 \int p^0 f d^3 p.$$

Das definições cinéticas para densidade de energia e pressão isotrópica:

$$T^{00} \equiv \rho = \int p^0 f d^3 p$$

e

$$\hat{P} = -\frac{1}{3} g_{ij} T^{ij} = -\frac{1}{3} g_{ij} \int f p^i p^j \frac{d^3 p}{p^0} = -\frac{1}{3} g_{ij} \int f (g_{ij} p^i p^j) \frac{d^3 p}{p^0} \therefore \int f p^2 \frac{d^3 p}{p^0} = -3\hat{P}, \quad (\text{E.16})$$

chega-se a que:

$$\boxed{\int p^0 p^3 \frac{\partial f}{\partial p} d^3 p = -3(\rho + \hat{P})}. \quad (\text{E.17})$$

Referências Bibliográficas

- [1] I. Prigogine, J. Geheniau, E. Gunzig, and P. Nardone, “Thermodynamics and cosmology,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 21, pp. 767–776, Aug. 1989.
- [2] S. Dodelson, *Modern cosmology*. San Diego, CA: Academic Press, 2003.
- [3] R. P. Kirshner, “Hubble's diagram and cosmic expansion,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 101, pp. 8–13, Dec. 2003.
- [4] B. Ryden, *Introduction to cosmology*. Addison-Wesley, 2003.
- [5] W. Freedman, “Cosmology at a crossroads,” *The Astrophysical Journal*, May 2017.
- [6] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*. Edusp, 2005.
- [7] J. A. S. Lima, R. C. Santos, and J. V. Cunha, “Is Λ CDM an effective $CCDM$ cosmology?,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, pp. 027–027, Mar. 2016.
- [8] D. Soderblom, “Hubble’s famous plate of 1923: A story of pink polyethylene,” *Journal of the American Association of Variable Star Observers (JAAVSO)*, pp. 321–, 06 2012.
- [9] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,” vol. 15, pp. 168–173, Mar. 1929.
- [10] A. Friedmann, “Über die krümmung des raumes,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 10, pp. 377–386, Dec. 1922.
- [11] A. Friedmann, “Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 21, pp. 326–332, Dec. 1924.
- [12] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow, “The origin of chemical elements,” *American Physical Society (APS)*, vol. 73, pp. 803–804, Apr. 1948.
- [13] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s,” vol. 142, p. 419, July 1965.
- [14] P. J. E. Peebles, “Primordial helium abundance and primordial fireball. ii,” *The Astrophysical Journal*, May 1966.
- [15] D. J. Fixsen, “The temperature of the cosmic microwave background,” *The Astrophysical Journal*, vol. 707, pp. 916–920, Nov. 2009.
- [16] S. T. Luca Amendola, *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, 2010.

- [17] J. Santos, J. Alcaniz, F. Carvalho, and N. Pires, “Latest supernovae constraints on $f(r)$ cosmologies,” vol. 669, pp. 14–18, oct 2008.
- [18] V. Miranda, S. E. Jorás, I. Waga, and M. Quartin, “Viable singularity-free $f(r)$ gravity without a cosmological constant,” *Physical Review Letters*, vol. 102, jun 2009.
- [19] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(r)$ theories of gravity,” 2008.
- [20] P. C. W. Davies, “Cosmological horizons and the generalised second law of thermodynamics,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 4, pp. L225–L228, nov 1987.
- [21] M. Calvão, J. Lima, and I. Waga, “On the thermodynamics of matter creation in cosmology,” *Physics Letters A*, vol. 162, pp. 223–226, feb 1992.
- [22] J. A. S. Lima, A. S. M. Germano, and L. R. W. Abramo, “FRW-type cosmologies with adiabatic matter creation,” *Physical Review D*, vol. 53, pp. 4287–4297, Apr. 1996.
- [23] L. R. W. Abramo and J. A. S. Lima, “Deflation and matter creation,” *Physics Letters A*, vol. A257, p. 123, 1999.
- [24] J. A. S. Lima and J. S. Alcaniz, “Flat frw cosmologies with adiabatic matter creation: Kinematic tests,” *Astronomy and Astrophysics*, Feb. 1999.
- [25] J. A. S. Lima, J. F. Jesus, and F. A. Oliveira, “CDM accelerating cosmology as an alternative to Λ CDM model,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2010, pp. 027–027, Nov. 2010.
- [26] R. O. Ramos, M. Vargas dos Santos, and I. Waga, “Matter creation and cosmic acceleration,” *Physical Review D*, vol. 89, Apr 2014.
- [27] M. V. d. Santos, I. Waga, and R. O. Ramos, “Degeneracy between ccdm and Λ CDM cosmologies,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, p. 127301, Dec 2014.
- [28] I. Baranov, *Formulação Cinética para Cosmologias com Criação de Matéria e Aplicações*. PhD thesis, University of São Paulo, 2015.
- [29] A. Einstein, “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie,” *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pp. 142–152, Jan. 1917.
- [30] S. Carroll, *Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2004.
- [31] H. P. Robertson, “Kinematics and world-structure III.,” *The Astrophysical Journal*, vol. 83, p. 257, May 1936.
- [32] A. G. Walker, “Completely symmetric spaces,” *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 19, pp. 219–226, Oct. 1944.
- [33] G. Lemaître, “Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques,” *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, vol. 47, pp. 49–59, Jan 1927.

- [34] A. G. Walker, "The boltzmann equations in general relativity," vol. 4, pp. 238–253, Apr. 1936.
- [35] C. Cercignani and G. M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. 2002.
- [36] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford University Press, USA, 2008.
- [37] A. Einstein and W. de Sitter, "On the relation between the expansion and the mean density of the Universe," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 18, no. 3, pp. 213–214, 1932.
- [38] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: principles and applications of GR*. John Wiley & Sons, Inc., first edition ed., 1972.
- [39] W. de Sitter, "On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. third paper.," vol. 78, pp. 3–28, Nov. 1917.
- [40] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, "Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background," vol. 147, p. 73, Jan. 1967.
- [41] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [42] F. Zwicky, "Republication of: The redshift of extragalactic nebulae," vol. 41, pp. 207–224, Nov. 1933.
- [43] S. Smith, "The mass of the virgo cluster," vol. 83, p. 23, Jan. 1936.
- [44] E. T. Vandenberg, L. Bertilsson, B. Liedberg, *et al.*, "Structure of 3-aminopropyl triethoxy silane on silicon oxide," *Journal of colloid and interface science*, vol. 147, no. 1, pp. 103–118, 1991.
- [45] V. Sahni and I. Alexei Starobinsky, title = The case for a positive cosmological Λ term vol. 09, pp. 373–443, Aug. 2000.
- [46] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, *et al.*, "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," *The Astrophysical Journal*, vol. 116, pp. 1009–1038, Sept. 1998.
- [47] R. A. Alpher and R. C. Herman, "Remarks on the evolution of the expanding universe," *American Physical Society (APS)*, vol. 75, pp. 1089–1095, Apr. 1949.
- [48] G. Gamow, "Expanding universe and the origin of elements," vol. 70, pp. 572–573, Oct. 1946.
- [49] G. Gamow, "The origin of elements and the separation of galaxies," vol. 74, pp. 505–506, Aug. 1948.
- [50] S. Weinberg, "The cosmological constant problem," *Reviews of Modern Physics*, vol. 61, pp. 1–23, Jan. 1989.
- [51] I. Zlatev, L. Wang, and P. J. Steinhardt, "Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 896–899, Feb 1999.

- [52] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, and *et al.* Ashdown, “Planck 2018 results. vi. cosmological parameters,” 2018.
- [53] W. L. Freedman, B. F. Madore, B. K. Gibson, and *et al.*, “Final results from the hubble space telescope/ikey project to measure the hubble constant,” *The Astrophysical Journal*, vol. 553, pp. 47–72, may 2001.
- [54] W. L. Freedman and B. F. Madore, “The hubble constant,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 48, pp. 673–710, Aug. 2010.
- [55] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, “Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond λ CDM,” *The Astrophysical Journal*, vol. 876, p. 85, May 2019.
- [56] J. A. S. Lima and J. V. Cunha, “A 3% determination of H_0 at intermediate redshifts,” *The Astrophysical Journal*, vol. 781, p. L38, Jan. 2014.
- [57] J. A. S. Lima and R. C. Santos, “Do eclipse solar de 1919 ao espetáculo das lentes gravitacionais,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 41, no. suppl 1, 2019.
- [58] M. M. Ivanov, Y. Ali-Haïmoud, and J. Lesgourgues, “ H_0 tension or t_0 tension?,” *Physical Review D*, vol. 102, Sept. 2020.
- [59] M. Asgari, C.-A. Lin, and B. J. et al., “KiDS-1000 cosmology: Cosmic shear constraints and comparison between two point statistics,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 645, p. A104, Jan. 2021.
- [60] M. C. J.A.S. Lima, , and I. Waga, *Frontiers Physics, Essays in Honor of Jayme Tiomno - Cosmology, Thermodynamics and Matter Creation*. World Scientific, Singapore, 1990.
- [61] S. Weinberg, “Entropy generation and the survival of protogalaxies in an expanding universe,” *The Astrophysical Journal*, vol. 168, p. 175, Sept. 1971.
- [62] J. A. S. Lima, F. E. Silva, and R. C. Santos, “Accelerating cold dark matter cosmology ($\omega_\Lambda \equiv 0$),” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 25, p. 205006, Sept. 2008.
- [63] G. Steigman, R. C. Santos, and J. A. S. Lima, “An accelerating cosmology without dark energy,” 2008.
- [64] S. W. Allen, D. A. Rapetti, and R. W. S. *et al.*, “Improved constraints on dark energy from chandra X-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 383, pp. 879–896, dec 2007.
- [65] J. A. S. Lima, J. V. Cunha, and J. S. Alcaniz, “Constraining the dark energy with galaxy cluster x-ray data,” *Physical Review D*, vol. 68, July 2003.
- [66] D. Rapetti, S. W. Allen, and A. Mantz, “The prospects for constraining dark energy with future x-ray cluster gas mass fraction measurements,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 388, pp. 1265–1278, Aug. 2008.

- [67] L. M. Krauss, “Old galaxies at high redshift and the cosmological constant,” *The Astrophysical Journal*, vol. 480, pp. 466–469, may 1997.
- [68] E. Komatsu, J. Dunkley, M. R.olta, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. Limon, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, S. S. Meyer, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright, “Five year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological interpretation,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 180, pp. 330–376, Feb. 2009.
- [69] J. V. Cunha and J. A. S. Lima, “Transition redshift: new kinematic constraints from supernovae,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 390, pp. 210–217, Oct. 2008.
- [70] P. C. W. D. N. D. Birrell, *Quantum fields in curved space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, cup ed., 1984.
- [71] F. Jüttner, “Das maxwellsche gesetz der geschwindigkeitsverteilung in der relativtheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 339, no. 5, pp. 856–882, 1911.
- [72] A. Lichnerowicz and R. Marrot, “Propriétés statistiques des ensembles de particule en relativité restreinte.,” Apr. 1940.
- [73] R. Marrot, “Sur l’équation intégrodifferentielle de boltzmann,” Apr. 1940.
- [74] J. Ehlers, “Contributions to the relativistic mechanics of continuous media,” vol. 25, pp. 1225–1266, Dec. 1993.
- [75] G. E. Tauber and J. W. Weinberg, “Internal state of a gravitating gas,” vol. 122, pp. 1342–1365, May 1961.
- [76] N. A. Chernikov, “The relativistic gas in the gravitational field,” *Acta Physica Polonica*, vol. 23, pp. 629–645, 1963.
- [77] G. M. Kremer, *Uma introdução à Teoria Cinética Relativística*. Editora UFPR, 1998.
- [78] G. M. Kremer, *Uma introdução à Equação de Boltzmann*. Edusp, 2005.
- [79] T. M. C. Abbott, S. Allam, P. Andersen, and *et al.*, “First cosmology results using type *Ia* supernovae from the dark energy survey: Constraints on cosmological parameters,” *The Astrophysical Journal*, vol. 872, p. L30, feb 2019.
- [80] R. P. Kirshner, “Foundations of supernova cosmology,” in *Dark Energy*, pp. 151–176, Cambridge University Press, Mar. 2010.
- [81] J. C. Carvalho, J. A. S. Lima, and I. Waga, “Cosmological consequences of a time-dependent Λ term,” *Phys. Rev. D*, vol. 46, pp. 2404–2407, Sep 1992.
- [82] P. J. E. Peebles and B. Ratra, “The cosmological constant and dark energy,” 2002.
- [83] J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, “Interpreting cosmological vacuum decay,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 063516, Sep 2005.

- [84] T. Padmanabhan, “Cosmological constant—the weight of the vacuum,” *Physics Reports*, vol. 380, pp. 235–320, July 2003.
- [85] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(r)$ theories of gravity,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 451–497, Mar 2010.
- [86] S. Capozziello and M. De Laurentis, “Extended theories of gravity,” 2011.
- [87] J. A. S. Lima and J. S. Alcaniz, “Thermodynamics and spectral distribution of dark energy,” *Phys. Lett.*, vol. B600, p. 191, 2004.
- [88] E. Kolb and Turner, *The early universe*. Addison Wesley, 1990.
- [89] L. Parker, “Particle creation in expanding universes,” *Physical Review Letters*, vol. 21, pp. 562–564, Aug. 1968.
- [90] I. Prigogine, J. Geheniau, E. Gunzig, and P. Nardone, “Thermodynamics of cosmological matter creation,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 85, pp. 7428–7432, Oct. 1988.
- [91] M. V. dos Santos, I. Waga, and R. O. Ramos, “Degeneracy between Λ CDM and Λ CDM cosmologies,” *Physical Review D*, vol. 90, Dec. 2014.
- [92] J. Lima and I. Baranov, “Gravitationally induced particle production: Thermodynamics and kinetic theory,” *Physical Review D*, vol. 90, Aug. 2014.
- [93] I. P. R. Baranov, J. F. Jesus, and J. A. S. Lima, “Testing creation cold dark matter cosmology with the radiation temperature–redshift relation,” 2019.
- [94] S. A. Fulling, L. Parker, and B. L. Hu, “Conformal energy-momentum tensor in curved spacetime: Adiabatic regularization and renormalization,” vol. 10, pp. 3905–3924, Dec. 1974.
- [95] J. Lima and A. Germano, “On the equivalence of bulk viscosity and matter creation,” *Physics Letters A*, vol. 170, pp. 373–378, nov 1992.
- [96] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen, and C. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory - Principles and Applications*. North-Holland, 1980.
- [97] J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, “Galaxy luminosity function: a new analytic expression,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 34, pp. 455–458, June 2004.
- [98] **S. R. G. Trevisani, and J. A. S. Lima, “Gravitational Matter Creation, Multi-fluid Cosmology and Kinetic Theory,”** *European Physical Journal C*, 2023.
- [99] **J. A. S. Lima, S.R.G. Trevisani, and R. C. Santos, “Cosmic “adiabatic” photon creation: Temperature law and blackbody spectrum,”** *Physics Letters B*, vol. 820, p. 136575, Sept. 2021.
- [100] Y. B. Zel'dovich and I. I. Sobel'man, “Stimulated light scattering induced by absorption,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 13, pp. 307–317, Mar. 1970.
- [101] R. Sunyaev and Y. B. Zeldovich, “Small-scale fluctuations of relic radiation,” *Springer link*, 1970.

- [102] J. Chluba, “Tests of the CMB temperature-redshift relation, CMB spectral distortions and why adiabatic photon production is hard,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 443, pp. 1881–1888, July 2014.
- [103] H. Fu, M. Lucca, S. Galli, E. S. Battistelli, D. C. Hooper, J. Lesgourgues, and N. Schöneberg, “Unlocking the synergy between cmb spectral distortions and anisotropies,” 2020.
- [104] A. Ota, “Statistical anisotropy in CMB spectral distortions,” *Physics Letters B*, vol. 790, pp. 243–247, Mar. 2019.
- [105] Y. Ali-Haïmoud, “Testing dark matter interactions with *CMB* spectral distortions,” *Physical Review D*, vol. 103, Feb 2021.
- [106] A. Kogut, M. H. Abitbol, J. Chluba, J. Delabrouille, D. Fixsen, J. C. Hill, S. P. Patil, and A. Rotti, “Cmb spectral distortions: Status and prospects,” 2019.
- [107] J. A. S. Lima, A. I. Silva, and S. M. Viegas, “Is the radiation temperature-redshift relation of the standard cosmology in accordance with the data?,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 312, pp. 747–752, Mar. 2000.
- [108] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, *et al.*, “Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 517, pp. 565–586, June 1999.
- [109] A. H. Guth, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems,” *Physical Review D*, vol. 23, pp. 347–356, Jan. 1981.
- [110] L. Rezzolla and O. Zanotti, *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford, 2013.
- [111] J. Bernstein, *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1988.