ONDAS SÍSMICAS E O INTERIOR DA TERRA

4 TÓPICO

Fernando Brenha Ribeiro
Eder Cassola Molina

4.1 Ondas sísmicas e o interior da Terra
4.2 Modelos
4.3 Construção de frentes de onda e traçado de raios sísmicos – o princípio de Huygens e o princípio de Fermat
4.4 As leis de Snell
4.5 Raios sísmicos e a variação da velocidade das ondas sísmicas no interior da Terra
4.6 Uma palavra final

4.1 Ondas sísmicas e o interior da Terra

A estrutura do interior da Terra começou a ser desvendada a partir do início do século XX quando se reconheceu ser possível estimar a variação da velocidade das ondas sísmicas como função da profundidade no interior da Terra. Uma vez que as velocidades das ondas sísmicas são definidas pela densidade e pelos parâmetros elásticos do material atravessado pelas ondas, é possível, utilizando os resultados da teoria da elasticidade, estimar a variação desses parâmetros também em função da profundidade no interior da Terra. Uma vez estimados esses parâmetros, pode-se inferir a distribuição de massa e de pressão no interior do planeta.

A interpretação desses resultados, junto com outras fontes de informação igualmente importantes, permitiu estabelecer um modelo detalhado da estrutura e da composição interna da Terra. Por volta da década de 1940 esse modelo já apresentava um grau de detalhamento bastante grande. No entanto, o modelo continua sendo aprimorado até hoje.

4.2 Modelos

Um médico, quando interpreta uma chapa de raios X, observa as variações de atenuação que um feixe desse tipo de radiação sofre ao atravessar o corpo do paciente. Essas variações de atenuação se manifestam na variação da transparência do filme radiográfico utilizado, que representa projeções de uma estrutura tridimensional que se superpõem em um único plano. A interpretação dessa observação é feita com base no conhecimento que o médico tem da anatomia humana e das suas variações em função de diferentes patologias. Quando Wilhelm Conrad Röntgen, em 1895, viu a primeira radiografia, feita por ele mesmo da mão da Sra. Röntgen, não teve dificuldade em reconhecer os ossos da mão, mas ficou nisso. Com o passar do tempo, a comparação das chapas feitas em muitos e diferentes pacientes com observações clínicas permitiu aos médicos estabelecer os critérios de interpretação para esse tipo de exame.

Os geofísicos desvendaram a estrutura do interior da Terra de forma, até certo ponto, análoga. A observação básica feita pelos geofísicos é o que se chama tempo de percurso de uma onda sísmica, definido como sendo o intervalo de tempo necessário para que as ondas sísmicas percorram a distância que separa o epicentro do terremoto do ponto da superfície onde elas são registradas através de um sismógrafo. O número de observações de tempo de percurso que podem ser feitas depende da frequência com que os terremotos ocorrem na Terra, que é muito grande. Entre 1900 e 2000 foram registrados 699.049 terremotos de magnitude m_b maior do que 5. A

distribuição desses eventos não é, como já foi mencionado antes, homogênea sobre a superfície da Terra, o que pode introduzir algum viés na observação. Além disso, as observações dependem do número de estações sísmicas existentes. Hoje em dia existem cerca de 11.956 estações catalogadas, fornecendo dados para os principais bancos de dados sísmicos. Essas estações também não são homogeneamente distribuídas na superfície da Terra, mas, de qualquer forma, existe um número muito grande de observações disponíveis para se investigar o interior do planeta.

A interpretação das observações sísmicas é, no entanto, feita em uma base muito diferente da interpretação de uma chapa de raios X. Enquanto a medicina tem acesso direto ao interior do corpo humano, a Terra não permite quase nenhuma intimidade com o geofísico. Com a exceção de observações feitas em umas poucas perfurações com profundidades da ordem de 10km, o interior da Terra é essencialmente inatingível a qualquer tipo de observação direta. Como consequência, os geofísicos são forçados a criar modelos sobre o interior da Terra.

Nas ciências naturais, modelos são abstrações feitas com o objetivo de permitir o estudo de sistemas naturais que são conhecidos de forma parcial e empírica. Os modelos devem explicar de forma lógica e coerente a essência do comportamento de um sistema natural em condições conhecidas, e fornecer previsões sobre o comportamento desse sistema em situações novas e não observadas. Com o termo "essência do comportamento" queremos dizer que os modelos não precisam ser perfeitos em todos os aspectos, mas devem reter aqueles aspectos do fenômeno estudado, que são mais importantes em um determinado estágio de conhecimento. Quando as previsões são confirmadas, o modelo é mantido; mas, se as previsões não se concretizam ou aspectos inicialmente não considerados essenciais demonstram a sua relevância, os modelos devem ser alterados.

Um exemplo simples de modelo pode ser dado pela forma da Terra. Na descrição do movimento da Terra ao redor do Sol, a forma da Terra pode ser considerada uma esfera perfeita, embora ela não o seja, como todos sabem. A superfície da Terra tem uma topografia variável e a superfície de uma esfera não tem topografia alguma. No entanto, considerando as maiores profundidades dos oceanos e as maiores alturas das cordilheiras, a variação de topografia da Terra não supera 15km ou 16km. Comparada com o raio médio da Terra (6.371km), a diferença máxima de topografia é uma fração muito pequena - 0,0025, distribuída ao longo de milhares de quilômetros quadrados, o que impõe, pelo menos na maior parte da superfície, uma certa suavidade.

A rotação da Terra faz com que ela tenha o raio equatorial (6.378km) ligeiramente maior do que o raio polar (6.357km). A diferença entre o raio equatorial e o raio polar

em relação ao raio médio é 0,0033, ou seja, da mesma ordem de grandeza que a diferença máxima de topografia. Hélio, o deus Sol, que vê e sente os efeitos gravitacionais dos domínios de Gaia, a deusa Terra, a uma distância de 150 milhões de quilômetros, certamente a imagina com a forma de uma pequena, perfeita e homogênea esfera. Por outro lado, se Hélio resolvesse passear em um satélite artificial girando ao redor da Terra a uma altura de 600km acima da superfície, a descrição da forma do planeta como uma esfera seria insatisfatória. No mínimo, mesmo considerando a possibilidade de o deus Sol ser pouco atento, a forma de um elipsoide de rotação teria de ser considerada, porque a órbita do satélite é afetada pelas diferenças do campo de gravidade geradas, entre outras causas, pelo afastamento da forma esférica.

Os primeiros modelos feitos para interpretar a estrutura da Terra, a partir dos dados de tempo de percurso, consideram a Terra como uma esfera onde a densidade e os parâmetros elásticos variam exclusivamente como função da profundidade. No entanto, antes de descrever esse tipo de modelo e os motivos que levaram à sua concepção, há um aspecto da física das ondas que deve ser considerado.

4.3 Construção de frentes de onda e traçado de raios sísmicos – o princípio de Huygens e o princípio de Fermat

Um pedaço de madeira comprido, movimentado de forma cíclica e lenta dentro de um tanque de lavar roupa ou de uma caixa de plástico retangular não muito pequena, produz uma sequência ou, como se diz algumas vezes, um trem de ondas na superfície da água, que, com boa aproximação, representam ondas planas. Quanto mais o comprimento do pedaço de madeira for próximo da dimensão de um dos lados do tanque, mais a onda produzida se aproxima de uma onda plana.

Se no caminho do trem de ondas planas for interposto um obstáculo, por exemplo, um pedaço de papelão grosso com uma abertura pequena na altura do nível da água, o trem de onda plana é refletido, com exceção de um pedaço da frente de onda que atravessa a abertura. O termo "abertura pequena" deve ser entendido como a abertura sendo bem menor do que o comprimento de onda da onda gerada. A fração da frente de onda que passa para o lado oposto do obstáculo (**Figura 4.1**) perde o caráter de onda plana, tornando-se uma onda com aspecto circular. Se o anteparo for substituído por outro com duas aberturas iguais afastadas uma da outra, duas frentes de onda com o mesmo aspecto circular serão geradas por cada abertura.

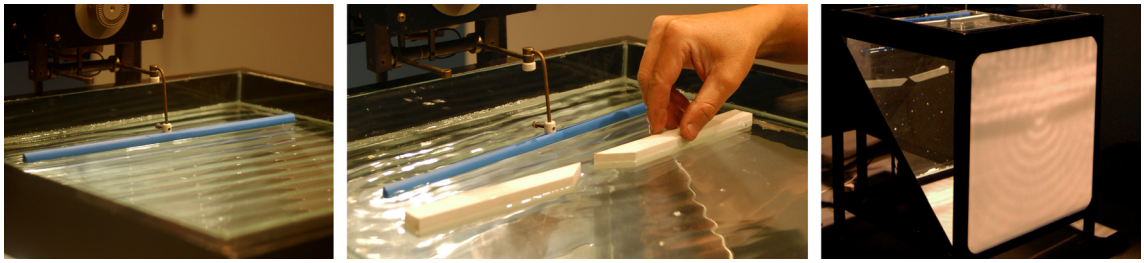

Figura 4.1: Esquema de tanque com água para demonstrar a formação de ondas secundárias. Um trem de ondas planas incide sobre um anteparo rígido com uma pequena fenda central. Essa fenda atua como fonte pontual que gera ondas secundárias circulares na região posterior ao anteparo. Na figura da direita um espelho permite visualizar em um anteparo branco as ondas produzidas.

Fixando, por cima do tanque, um fio fino esticado paralelamente ao anteparo, fica marcada uma distância do anteparo. Olhando as frentes de onda geradas no mesmo instante em cada abertura, percebe-se que elas passam pelo fio também no mesmo instante. Se o anteparo tivesse três aberturas, o mesmo resultado seria observado. Por outro lado, se a posição do anteparo for marcada por outro fio esticado e o anteparo for removido, é possível verificar que a frente de onda plana percorre a distância entre os fios no mesmo intervalo de tempo que as ondas produzidas nas aberturas. Isso significa que a presença do anteparo não altera a velocidade da onda.

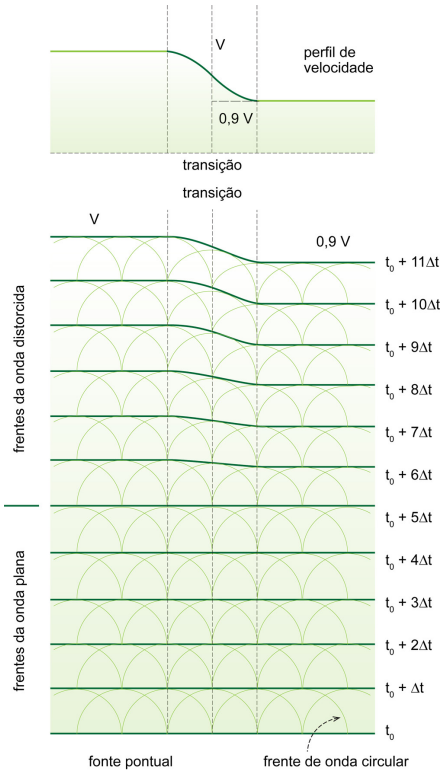

Figura 4.2: Aplicação do princípio de Huygens na construção de uma frente de onda. Entre os instantes t_o e t_o+5Δt a onda se propaga em um meio com velocidade constante v. As frentes de onda circulares representadas no diagrama têm raio igual a $v\Delta t$ e a envoltória dessas frentes é uma linha reta que representa uma onda plana. A partir de t_o+6Δt a velocidade deixa de ser constante e é definida na inserção na parte superior da figura. A aplicação do princípio de Huygens gera uma onda distorcida, na parte central do trem de onda.

Esses resultados sugerem algo que foi percebido pela primeira vez por Christiaan Huygens no final do século XVII. Huygens estudando a propagação da luz, propôs um princípio[1] que leva o seu nome. O princípio de Huygens estabelece cada ponto de uma frente de onda se comporta como uma fonte pontual que gera novas ondas, chamadas de ondas secundárias, e que se propagam em todas as direções com a velocidade da onda naquele ponto. Huygens era um defensor da teoria ondulatória da luz e se referia, ao propor o se princípio, a ondas de luz, mas o princípio se aplica a qualquer tipo de onda. Considerando a frente de onda em um determinado instante t_0, a frente de onda em um instante posterior t_1 pode ser obtida, traçando uma linha, ou uma superfície no caso de ondas em três dimensões, que é tangente a todas as frentes de onda das ondas secundárias em t_0. A linha ou a superfície tangente às frentes de onda envolve as ondas secundárias e, por isso, recebe o nome de envoltória das ondas secundárias. A **figura 2** ilustra como o princípio de Huygens é aplicado para construir uma frente de onda.

Um pouco mais sobre Princípio

[1] Na física, o termo "princípio" é utilizado para expressar um fato da natureza cujo conhecimento decorre da observação e que não pode ser demonstrado ou explicado partindo de conhecimento ou de argumentos anteriores. Trata-se de uma afirmação derivada exclusivamente da observação e que se verifica independentemente da condição em que a observação é feita. A conservação da energia, por exemplo, é um princípio da física. Ela não pode ser demonstrada e deriva do fato de que em todos os processos físicos conhecidos a energia total se conserva. Ela pode se transformar de uma forma de energia para outra. Por exemplo, na presença de atrito a energia mecânica se transforma em calor, mas em qualquer instante a soma da energia mecânica com a quantidade total de calor gerada pelo atrito é constante.

A **figura 4.2** representa a propagação de uma onda em duas dimensões, de forma que a frente de onda é representada por uma linha. Na figura, a posição de uma mesma frente de onda é indicada para diferentes instantes contados a partir de t_o e separados por um intervalo de tempo Δt. Impondo que a frente de onda no instante t_o seja uma linha reta e que a velocidade da onda em todos os pontos atingidos pela frente de onda seja constante (v), a frente de onda no instante seguinte pode ser obtida aplicando-se o princípio de Huygens. Por cada ponto da frente de onda em to traça-se uma circunferência, cujo raio é $v\Delta t$. Traçando uma linha tangente a todas as frentes de onda secundárias obtém-se a frente de onda em $t_o+\Delta t$. É fácil ver que, nesse caso, a envoltória das frentes de onda secundária é uma linha reta paralela a frente de onda em to. Mais do que isso, a onda se propaga na direção perpendicular á frente de onda, sendo, portanto, uma onda plana. Na **figura 4.2** nada se altera até a frente de onda correspondente ao instante $t_o+5\Delta t$.

A partir da posição correspondente ao instante $t_o+5\Delta t$, a velocidade das ondas secundárias deixa de ser constante e passa a ser dada pelo perfil representado na inserção da **figura 4.2**. A mudança brusca no comportamento da velocidade da onda gera mais de um efeito, como se verá mais adiante. No entanto, o que importa agora é a forma da frente de onda que avança pelo meio.

Aplicando o princípio de Huygens, a posição da frente de onda no instante $t_o+5\Delta t$ é construída traçando, por cada ponto da frente de onda $t_o+5\Delta t$, circunferências com raio $v(p)\Delta t$, onde p indica que é a velocidade da onda no ponto considerado. Como agora as velocidades são diferentes, os raios são diferentes e a linha tangente deixa de ser reta. À medida que o tempo passa, aumenta a distorção da frente de onda em relação ao que seria a frente de onda de uma onda plana, e a direção de propagação da onda se altera a cada instante e também para cada ponto.

Logo nos primórdios da Física como ciência bem estabelecida e tal qual a conhecemos hoje, os fenômenos ópticos começaram a ser estudados com algum detalhe. Uma das preocupações daquele tempo foi a de descrever a forma com que a luz se propaga em diferentes meios, o que levou ao desenvolvimento daquilo que hoje é chamado de óptica geométrica. Um dos conceitos fundamentais da óptica geométrica é o de raio de luz, que é definido como sendo o caminho que a luz segue para, partindo de uma fonte luminosa, atingir um ponto qualquer do meio atravessado. Sem entrar em detalhes uma vez que a óptica não é o assunto deste curso, os raios de luz podem ser traçados como sendo linhas orientadas perpendicularmente às frentes de onda e indicam a direção em que a luz está sendo propagada.

Uma das perguntas feitas naquela época foi a seguinte: considerando que a luz emitida por uma fonte atravessa um meio qualquer, qual é o caminho que ela segue? A resposta a essa pergunta foi fornecida por Fermat na forma de um princípio que pode ser assim expresso: para partir de um ponto A e atingir um ponto B de um meio qualquer, a luz percorre o caminho que corresponde ao menor tempo de percurso possível. Considerando, por exemplo, um meio onde a velocidade de propagação da luz é constante, o trajeto seguido pela luz emitida em um ponto A e que atinge um ponto B qualquer é o segmento de reta $\overline{AB}$. Qualquer outra trajetória ou linha contínua, que possa ser traçada entre A e B é maior do que o segmento de reta $\overline{AB}$ e, como a velocidade do meio é constante, o tempo para percorrer essa linha é maior do que o tempo para percorrer o segmento de reta. Se a velocidade do meio não for constante, de forma geral, o caminho mais rápido entre dois dos seus pontos não será um segmento de reta.

A óptica geométrica descreve uma aproximação muito útil para a descrição dos fenômenos ópticos, mas ela é limitada, uma vez que não permite representar fenômenos como a difração da luz[2]. Em geral, os princípios de Huygens e de Fermat podem também ser aplicados a outros

fenômenos ondulatórios como a propagação do som e das ondas elásticas, desde que processos de difração não estejam presentes.

Difração da Luz

[2] Difração é o termo que se utiliza para descrever a capacidade de uma onda de contornar um obstáculo interposto no seu caminho. O fenômeno só ocorre quando o obstáculo tem dimensões comparáveis com o comprimento de onda da onda incidente. Para levar em consideração os efeitos da difração, o princípio de Huygens teve de ser modificado por Fresnel, dando origem ao princípio de Huygens-Fresnel, que é mais geral..

Como exemplo, considere que uma onda elástica plana se propaga em um meio caracterizado por uma velocidade da onda igual a v_1. A direção de propagação dessa onda, indicada na **figura 3** por um único raio que, como prevêem os princípios de Huygens e de Fermat, tem a forma de uma linha reta. Considere agora que esse meio no qual a onda se propaga está em contato com um segundo meio, caracterizado por uma velocidade v_2, diferente de v_1. O contato entre os dois meios é um plano, cujo traço representado na figura 3 é o eixo das abscissas (x), e a direção de propagação da onda no meio com velocidade v_1 é oblíqua a esse eixo. Se a onda incidente passar para o meio caracterizado por ter velocidade de propagação v_2, o que acontece com o raio da onda?

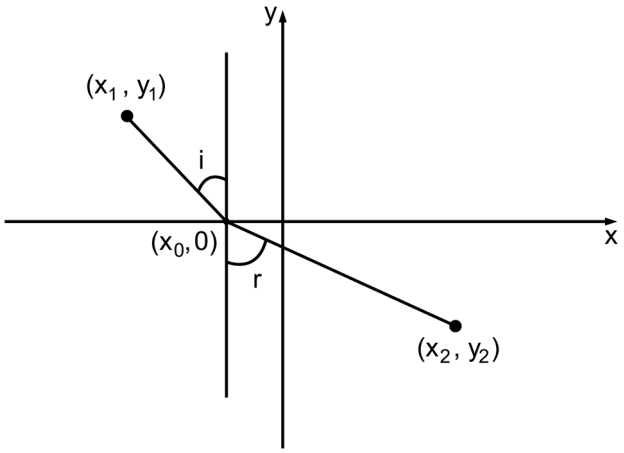

Figura 4.3: Mudança na direção de propagação de uma onda plana devido a uma mudança brusca de velocidade em uma interface plana e a definição dos ângulos de incidência '*i*' e de refração '*r*'.

A **figura 4.3** esquematiza a forma do raio. Como a velocidade v_2 também é constante, o raio de onda no segundo meio também é uma linha reta. A única coisa que pode mudar, nesse caso, é a direção do raio. Na **figura 4.3**, o ângulo com que o raio de onda incide *(i)* sobre a interface entre os dois meios é definido como sendo o ângulo entre a direção do raio e a direção normal (perpendicular) à interface. O ângulo (r) com que o raio emerge no meio caracterizado por uma velocidade de onda v_2 é definido como sendo o ângulo entre essa direção e a direção normal à interface. Identificando dois pontos pertencentes ao caminho seguido pela onda, um no meio

caracterizado por v_1 (x_1, y_1) e o outro no meio caracterizado por v_2 (x_2, y_2), a posição do ponto $(x_0, 0)$ onde os raios se encontram na interface é determinada impondo o prescrito pelo princípio de Fermat, ou seja, o intervalo de tempo Δt para que a onda saia de (x_1, y_1) e atinja (x_2, y_2) é dado por

$$\Delta t = \frac{\sqrt[2]{(x_1 - x_0)^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt[2]{(x_2 - x_0)^2 + y_2^2}}{v_2} \qquad 4.1$$

A figura 4 representa Δt como função de x_0, na forma prevista pela equação (1), para duas situações diferentes: $v_1 = 2v_2$ e $v_1 = 0{,}5v_2$. Nos dois casos, o menor intervalo de tempo Δt não corresponde a $(x_0, 0)$ alinhado a (x_1, y_1) e a (x_2, ψ_2).

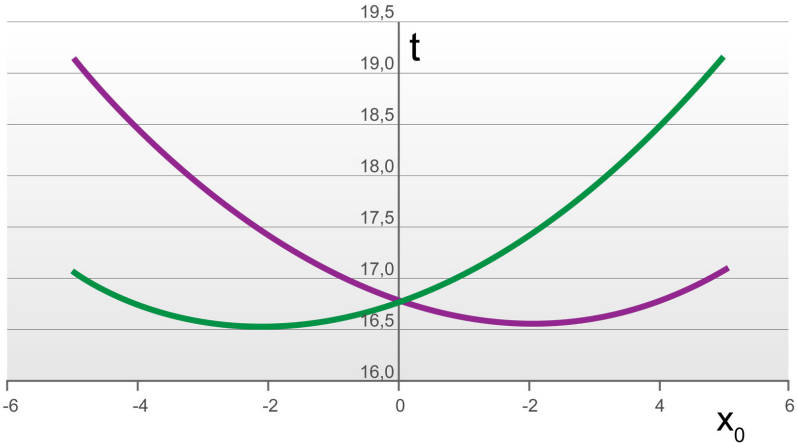

Figura 4.4: Variação do tempo de propagação de dois pontos fixos, um em cada lado da interface onde ocorre uma mudança brusca de velocidade. A curva azul corresponde ao caso em que a velocidade da onda refratada é o dobro da velocidade da onda incidente. A curva vermelha corresponde ao caso em que a velocidade da onda incidente é o dobro da velocidade da onda refratada.

A **figura 4.5** mostra o resultado para os dois casos. No entanto, nos dois casos, a relação

$$\frac{\text{sen}(i)}{v_1} = \frac{\text{sen}(r)}{v_2} \qquad 4.2$$

é sé satisfeita. Quando a velocidade v_1 é maior do que a velocidade v_2, o raio no segundo meio desvia em direção à normal. Na situação oposta, o raio no segundo meio desvia em direção à interface. O fenômeno de mudança de direção em consequência da mudança de meio onde a onda se propaga é conhecido como refração da onda e é observado experimentalmente.

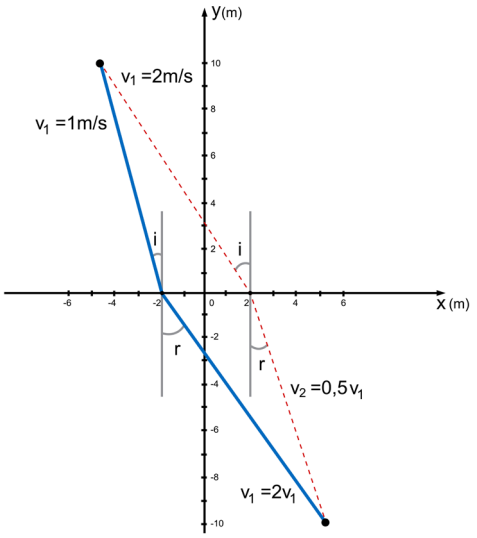

Figura 4.5: Esquema representando os raios de onda nas duas situações consideradas na figura 4.4.

O resultado expresso pela equação (2) é conhecido como lei de Snell e será demonstrado de forma mais rigorosa logo a seguir. No entanto, é bom que fique claro desde já que esse resultado, por mais bonito que seja e por mais elegante que alguém possa considerar a sua demonstração, tem sentido por uma única e exclusiva razão: ele está em perfeito acordo com a experiência. Se não estivesse, os pressupostos utilizados na demonstração teriam de ser revistos.

A **figura 4.6** esquematiza um meio elástico formado por n camadas horizontais, cada uma delas caracterizada por uma velocidade (v_i). Em cada camada, o raio proveniente da camada superior é refratado ao passar para a camada inferior de forma que a trajetória seguida pela onda entre dois pontos '*f*' e '*g*' é uma poligonal aberta. Considere agora que, mantendo a espessura total do meio, as camadas se tornam cada vez mais delgadas e as variações de velocidade cada vez menores, de forma a manter sempre a velocidade em torno do ponto *f* e em torno do ponto *g* constantes. O resultado é uma poligonal com lados cada vez menores, mas com os extremos fixos entre *f* e *g*. O aspecto da poligonal variará com o aumento do número de camadas até um ponto em que as variações serão pequenas e pouco nítidas.

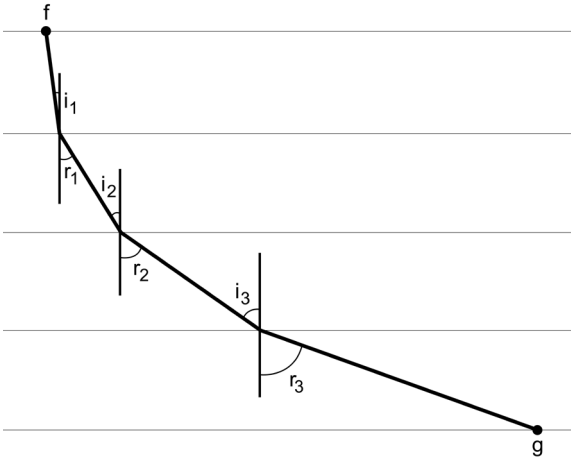

Figura 4.6: Meio elástico estratificado caracterizado por camadas com velocidades vi constantes dentro de cada camada, mas crescentes em função da profundidade. Os raios sísmicos entre os pontos '*f*' e '*g*' e os ângulos de incidência (i_i) e de refração (r_i) estão indicados na figura.

Imagine uma pessoa de visão ruim, um míope, por exemplo, olhando alguém subdividir e traçar as poligonais sucessivamente em um mesmo diagrama (**Figura 4.7**). A forma de poligonal parecerá cada vez menos nítida ao observador no diagrama desenhado e, a partir de certo instante, poligonal e velocidade da onda passarão a parecer curvas contínuas de forma fixa. Além disso, o tempo de percurso entre os pontos será o menor possível. Nesse instante, foi atingido o limite da acuidade visual do observador.

Matematicamente é possível obter de forma exata o resultado simulado no exemplo dado. O método utilizado para demonstrar esse resultado, conhecido como método das variações, é uma ferramenta importante da Física matemática, mas está fora do propósito deste curso.

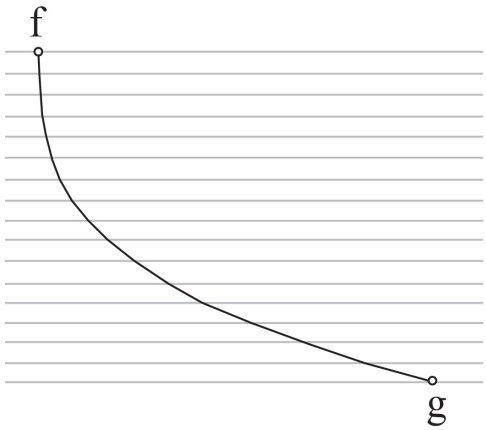

Figura 4.7: Meio elástico estratificado formado por muitas camadas delgadas com velocidades constantes dentro de cada camada, mas crescentes em profundidade. Quanto mais delgadas forem as camadas, mais a poligonal, que une os pontos '*f*' e '*g*' se aproxima de uma curva contínua.

4.4 As leis de Snell

A **figura 8** apresenta esquematicamente uma frente de onda plana, proveniente de um meio caracterizado por uma velocidade v_1, atingindo obliquamente uma interface plana que separa esse meio de outro caracterizado por uma velocidade de onda v_2. A distância $\overline{OB}$ equivale à distância entre os raios de onda correspondentes aos pontos O e A de uma mesma frente de onda da onda incidente.

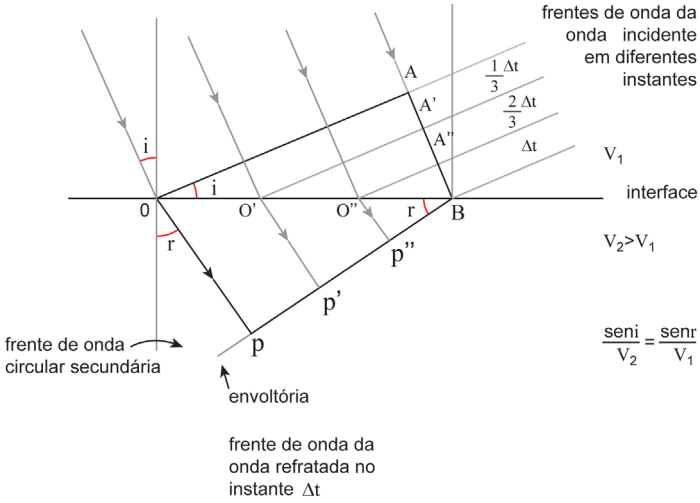

Figura 4.8: Esquema para a demonstração da lei de Snell para o caso de refração (ver o texto).

Como a direção de propagação da onda no primeiro meio é inclinada em relação à interface, o ponto A da frente de onda toca a interface em um instante Δt, posterior ao momento em que o ponto O toca a interface. Dois raios de onda auxiliares, que tocam a interface nos pontos *O*' e *O*'' foram traçados para auxiliar a construção da frente de onda no meio caracterizado pela velocidade v_2. Os pontos *O*' e *O*'' dividem a distância $\overline{OB}$ em três segmentos de igual comprimento. Consequentemente, a frente de onda atinge o ponto *O*' no instante $\Delta t/3$ e o ponto O'', no instante $2\Delta t/3$.

Aplicando o princípio de Huygens, centrado no ponto *O*, é traçada a frente de onda circular da onda secundária no instante de tempo Δt. Da mesma forma, centrado nos pontos *O*' e *O*'', são traçadas as frentes de onda secundária nesse mesmo instante. A reta que, partindo do ponto B, tangencia as frentes de onda das ondas secundárias é a frente de onda construída para a onda refratada no meio caracterizado pela velocidade v_2. Com essa construção, ficam desenhados dois triângulos retângulos que têm em comum a hipotenusa, que é o segmento $\overline{OB}$. O ângulo do triângulo *OAB* com vértice em *O* é igual ao ângulo de incidência *i*. Por outro lado, o ângulo do triângulo *OBP* com vértice em *B* é igual ao ângulo de refração *r*.

A distância $\overline{AB}$ é igual a

$$\overline{AB} = v_1 \Delta t \tag{4.3}$$

e a distância $\overline{OP}$ é igual a

$$\overline{OP} = v_2 \Delta t \tag{4.4}$$

Por outro lado,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \text{sen}(i), \text{ de onde } v_1 \Delta t = \overline{OB}\,\text{sen}(i) \tag{4.5}$$

e

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \text{sen}(r), \text{ de onde } v_2 \Delta t = \overline{OB}\,\text{sen}(r) \tag{4.6}$$

Dividindo a equação (5) pela equação (6) tem-se

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\text{sen}(i)}{\text{sen}(r)} \qquad 4.7$$

que é outra forma de escrever a equação (2).

Quando uma onda incide em uma interface entre meios diferentes, um dos efeitos que podem ser observados é a onda ser refratada. Outro é a onda ser refletida, ou seja, tocar na interface e ser direcionada de volta para o meio de incidência. A **figura 4.9** esquematiza a construção da frente de onda refletida.

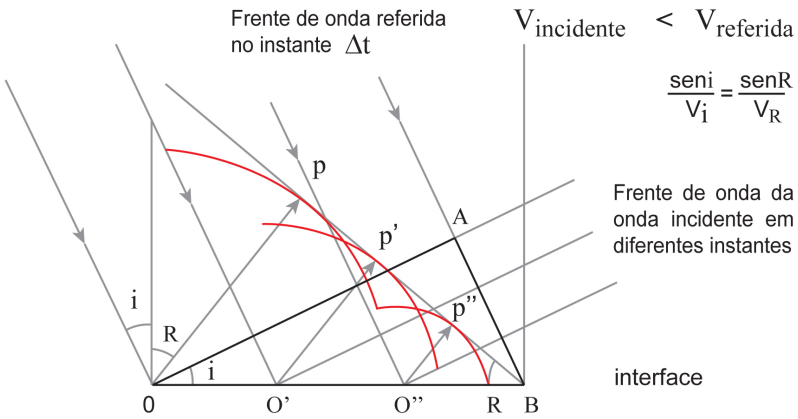

Figura 4.9. Esquema para a demonstração da lei de Snell para o caso de reflexão (ver o texto).

O ângulo de reflexão (R) é definido como sendo o ângulo que o raio refletido forma com a normal da interface. A frente de onda da onda refletida é obtida de forma absolutamente análoga à construção da frente de onda refratada. Não é difícil ver, no caso de reflexão, que

$$\frac{\text{sen}(i)}{v_i} = \frac{\text{sen}(R)}{v_r} \qquad 4.8$$

onde v_i e v_R são as velocidades das ondas incidente e refletida, respectivamente. Se a onda refletida for do mesmo tipo da onda incidente, por exemplo, se ambas forem ondas de compressão, v_i e v_R serão iguais e

$$\text{sen}(i) = \text{sen}(R) \tag{4.9}$$

Nesse caso, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. As ondas secundárias, provocadas pelo movimento da interface atingida obliquamente por uma onda de compressão, não são, necessariamente, ondas de compressão no caso de o segundo meio elástico ser dotado de rigidez. A reflexão pode converter parte da energia elástica transportada por uma onda de compressão em ondas de cisalhamento e, nesse caso, a velocidade da onda incidente é diferente da velocidade da onda refletida. As equações (7) e (8) são expressões das leis de Snell[3] para refração e reflexão.

A equação (7) mostra que, quando o ângulo de refração é de 90º, o que só pode ocorrer quando a velocidade v_2 é maior do que a velocidade v_1, o ângulo de incidência é

$$\text{sen}(i_r) = \frac{v_1}{v_2}$$

O ângulo ir recebe o nome de ângulo crítico de refração. Para ângulos de incidência maiores do que i_r não há onda refratada, e a interface produz apenas reflexões. O ângulo i_r recebe o nome de ângulo crítico de refração.

A onda refratada produzida por uma onda que incide com ângulo de incidência igual a ir, algumas vezes chamada de onda criticamente refratada, se propaga no meio caracterizado pela velocidade v_2 na direção paralela à interface, gerando ondas que retornam para o meio caracterizado pela velocidade v_1 partindo da interface com inclinação igual a i_r (**Figura 4.10**).

Leis de Snell

[3] Na Física, o termo "lei" é utilizado para se referir a uma expressão matemática ou lógica que expresse um princípio, ou possa ser deduzida a partir da aplicação de um princípio. Por exemplo, a primeira lei da termodinâmica, que estabelece que a variação da energia interna de um sistema (ΔU) é igual à soma do trabalho mecânico feito sobre o sistema (W) e da quantidade de calor trocada pelo sistema durante o processo (ΔQ), é uma das muitas expressões matemáticas do princípio de conservação de energia. Por outro lado, as leis de Snell são expressões matemáticas decorrentes da aplicação dos princípios de Huygens e Fermat, cuja previsão pode ser verificada experimentalmente.

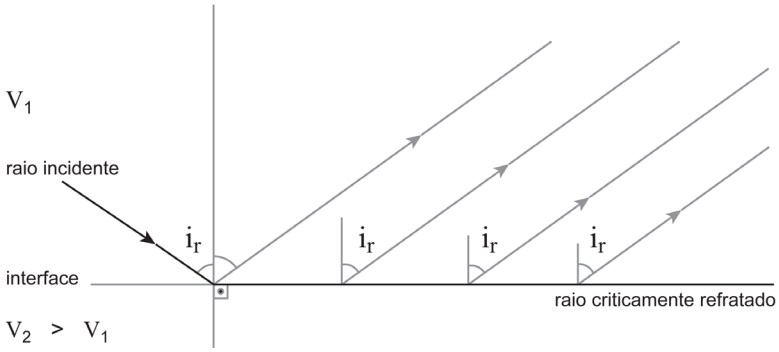

Figura 4.10: Raio de onda incidente sobre uma interface com ângulo crítico de refração *ir* e ondas secundárias geradas na interface entre os meios.

4.5 Raios sísmicos e a variação da velocidade das ondas sísmicas no interior da Terra

A estrutura do interior da Terra começou a ser desvendada através do estudo da propagação das ondas sísmicas logo no início do século XX. Em um intervalo de tempo relativamente curto, pouco mais de trinta anos, foi estabelecido um modelo que descreve as principais características da estrutura da Terra. O passo inicial para o estabelecimento desse modelo foi a compilação dos tempos de percurso de todas as fases sísmicas identificadas nos sismogramas registrados na maioria dos observatórios sismológicos.

O termo "fases sísmicas" se refere aos diferentes tipos de onda, P, S e ondas de superfície identificadas em um sismograma. A **figura 4.11** apresenta, esquematicamente, um sismograma onde estão marcados o instante de chegada da onda P, o instante de chegada da onda S e os instantes de chegada das ondas *LR* e *LG*.

Esses instantes marcam as chegadas das "fases" *P, S* e das ondas de superfície. No entanto, escondidos no meio do traçado do

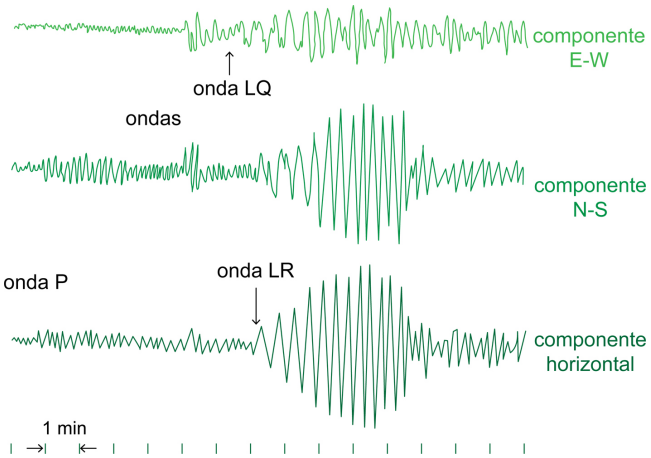

Figura 4.11. Representação esquemática de um registro em uma estação com um sismômetro vertical e dois sismômetros horizontais em direções perpendiculares. A escala na base da figura é a escala de tempo e o intervalo entre cada marca é de um minuto. Os instantes de chegada das ondas *P, S, LQ* e *LR* estão indicadas pelas pequenas setas.

sismograma estão registradas as chegadas de outras fases que percorreram um caminho diferente ao da onda P, que marca o início do registro no nosso sismograma. A identificação das diversas fases sísmicas exige muita experiência do analista, uma vez que a chegada dessas fases é, frequentemente, observada como uma variação sutil, na amplitude, no período dominante ou na regularidade do traçado em meio a um registro ruidoso.

1970

[4] H. Jeffreys, K.E. Bullen, "Seismological tables", British Association for the Advancement of Sciences, Gray-Milne trust, Londres, 1970.

A **figura 4.12** apresenta graficamente parte da compilação de tempos de percurso publicada por Jeffreys e Bullen em 1970[4], que corresponde aos tempos de percurso das ondas *P* no intervalo de distâncias epicentrais entre 10º e 90º. A curva traçada na **figura 4.12** corresponde a uma curva média que melhor representa os diversos tempos de chegada, que, se fossem representados, apareceriam como uma nuvem de pontos em torno da curva traçada. Como tempo de percurso é definido como sendo o tempo necessário para uma onda percorrer a distância entre o epicentro e o ponto onde o sismógrafo é instalado, existe uma variação desse tempo associada à profundidade do foco. A **figura 4.12** corresponde a focos superficiais.

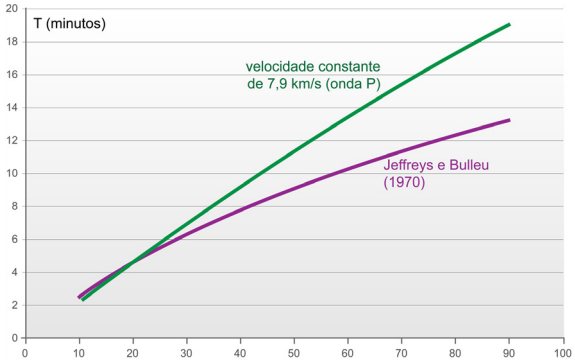

Figura 4.12: Representação gráfica dos tempos de percurso das ondas P compilados por Jeffreys e Bullen (1970), para o intervalo de distâncias epicentrais entre 10º e 90º (curva vermelha). Para comparação, a curva azul representa o tempo de chegada que seria observado caso o interior da Terra fosse caracterizado por ondas *P* com velocidade constante de 7,9 km/s.

A forma da **figura 4.12** fornece alguma informação sobre a velocidade da onda *P* no interior da Terra, desde que se admita, como ponto de partida, que a propagação das ondas sísmicas possa ser descrita usando a teoria dos raios sísmicos. Se a Terra fosse um meio com velocidade de onda P constante (v_P), o raio sísmico entre o foco, que se confunde com o epicentro no caso de um sismo superficial, e a estação sismográfica seria uma linha reta[5]. A **figura 4.13** indica esse raio e, a partir dessa

Linha reta

[5] O argumento apresentado a seguir é, em parte, baseado em Frank D. Stacey, em "Physics of the Earth", John Wiley & Sons, New York, 1977.

figura, não é difícil verificar que o tempo de percurso (T) deveria variar como função da distância epicentral (Δ) seguindo a expressão

$$T = 2\frac{R}{v_P}\text{sen}\left(\frac{\Delta}{2}\right) \qquad 4.10$$

onde R é o raio da Terra, considerada esférica.

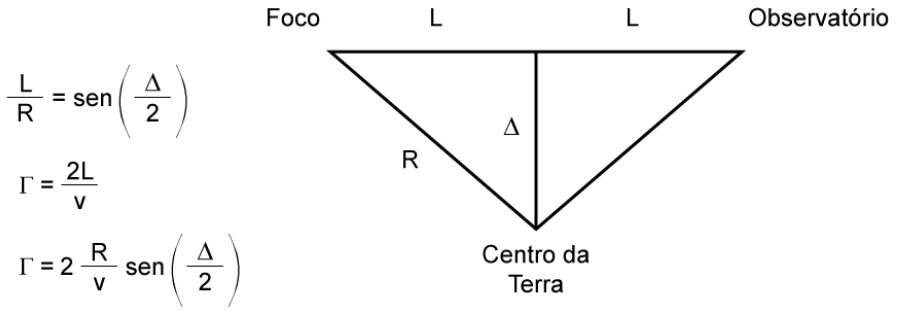

Figura 4.13: Esquema para o cálculo do tempo de percurso de uma onda sísmica como função da distância epicentral admitindo que a sua velocidade seja constante no interior da Terra.

A curva de tempo de chegada prevista pela equação (10), calculada usando uma velocidade de onda P de 7,8km/s, é comparada com a curva real de tempo de percurso das ondas P na **figura 4.12**. A comparação mostra que o tempo de percurso das ondas P cresce mais lentamente que o tempo de percurso previsto pela equação (10). Não adianta variar o valor da velocidade das ondas P utilizada na equação (10) porque a forma da curva real não se ajusta à forma prevista pela equação.

O fato de a curva do tempo de percurso variar mais lentamente do que a previsão feita pela equação (10) mostra que a velocidade das ondas P não é constante no interior da Terra. A velocidade aumenta com a profundidade e, por isso, os tempos de chegada são menores do que os tempos previstos pela nossa equação.

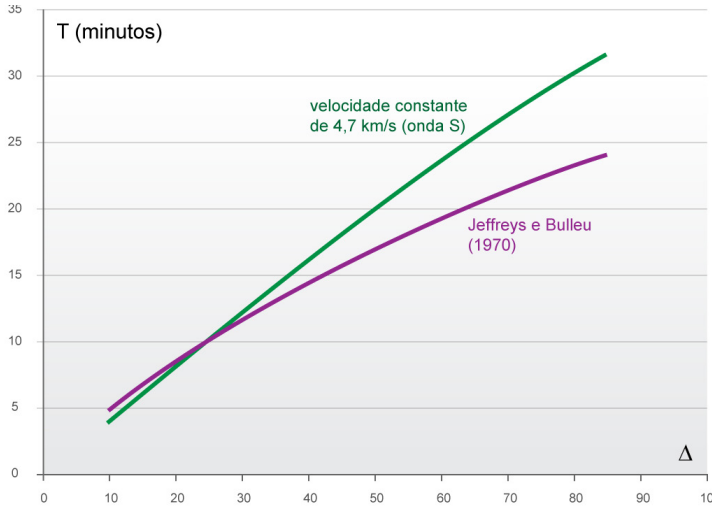

Figura 4.14. Representação gráfica dos tempos de percurso das ondas S compilados por Jeffreys e Bullen (1970), para o intervalo de distâncias epicentrais entre 10° e 90° (curva vermelha). Para comparação, a curva azul representa o tempo de chegada que seria observado caso o interior da Terra fosse caracterizado por ondas S com velocidade constante de 4,7 km/s.

O comportamento do tempo de percurso das ondas *P* é repetido no caso das ondas *S* (**Figura 4.14**).

Uma vez que tanto a **figura 4.12** quanto a **figura 4.14** foram construídas com dados de uma tabela de tempo de percurso que compila dados do mundo todo, é de se supor que a variação de velocidade representada em cada curva seja uma boa aproximação para todo o interior da Terra, independentemente tanto da posição do foco do epicentro quanto do observatório sismológico. Essas curvas sugerem, que, pelo menos em primeira aproximação, o interior da Terra, atravessado pelas ondas sísmicas que atingem distâncias epicentrais entre 10° e 90°, pode ser representado por um modelo onde a variação da velocidade das ondas sísmicas depende apenas da profundidade. De forma equivalente, se supusermos a Terra como tendo forma esférica, a velocidade das ondas sísmicas pode ser considerada como função apenas da distância ao centro do planeta. Por outro lado, a suavidade das curvas, sem a presença de interrupções e mudanças bruscas de inclinação, indica que a variação das velocidades deve ser contínua e suave.

O fato de as velocidades das ondas *P* e *S* variarem como função da profundidade implica que as ondas são continuamente refratadas no material atravessado pelos raios sísmicos. Considerando uma esfera de raio A formada por n camadas esféricas, cada uma delas caracterizada por uma velocidade v_i ($i = 1,2,3,.....,n$) e separadas por superfícies esféricas de raio a_i (**Figura 4.15**), os raios sísmicos em cada camada são linhas retas e, nas interfaces, pode-se definir um ângulo de incidência i_i e um ângulo de refração r_i.

No ponto g_i, onde o raio sísmico cruza a interface, continua valendo a lei de Snell (equação 8)

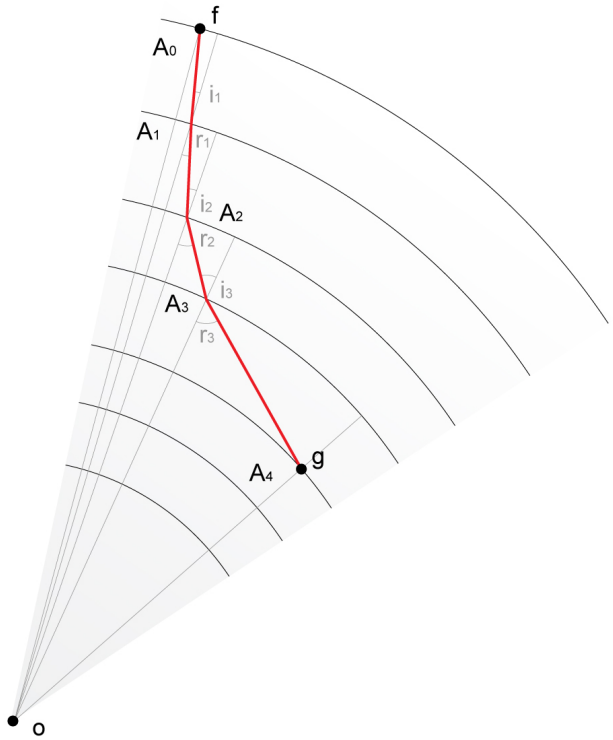

Figura 4.15. Representação gráfica dos tempos de percurso das ondas *S* compilados por Jeffreys e Bullen (1970), para o intervalo de distâncias epicentrais entre 10° e 90° (curva vermelha). Para comparação, a curva azul representa o tempo de chegada que seria observado caso o interior da Terra fosse caracterizado por ondas *S* com velocidade constante de 4,7 km/s.

$$\frac{\text{sen}(i_i)}{v_i} = \frac{\text{sen}(r_{i+1})}{v_{i+1}} \tag{4.11}$$

onde a descontinuidade plana é representada pelo plano tangente a cada superfície esférica. Da figura 15 pode-se ver que

$$l = a_i \text{sen}(r_{i+1}) = a_{i+1} \text{sen}(i_{i+1}) \tag{4.12}$$

que, combinado com a equação (11), fornece

$$\frac{a_i \text{sen}(i_i)}{v_i} = \frac{a_i \text{sen}(r_{i+1})}{v_{i+1}} = \frac{a_{i+1} \text{sen}(i_{i+1})}{v_{i+1}} = \text{constante} \tag{4.13}$$

que é válida para qualquer par de interfaces entre camadas. Fazendo as camadas progressivamente mais delgadas de forma que a variação da velocidade se aproxime cada vez mais de uma função suave, a equação (13) se aproxima de uma expressão contínua em relação à distância ao centro da Terra, dada por

$$\frac{a \text{sen}\left(i(a)\right)}{v(a)} = p = \text{constante} \tag{4.14}$$

onde $i(a)$ é o ângulo formado pela direção do raio sísmico com a direção radial, na distância 'a' ao centro da Terra, e $v(a)$ é a velocidade da onda sísmica nessa posição. A constante p recebe o nome de parâmetro sísmico do raio. A equação (14) mostra que, se p for conhecido, a razão entre a posição do ponto mais profundo atingido pelo raio sísmico, nesse caso, i é igual a 90º, e a velocidade da onda nessa posição pode ser calculada. Pode-se demonstrar que

$$\frac{dT}{d\Delta} = p \tag{4.15}$$

A demonstração desse resultado não é difícil, mas não é importante que ela seja feita agora.

Com base nesses dados, distância epicentral e parâmetro do raio sísmico, é possível obter a distribuição radial de velocidades $v(a)$. O processo para se obter a distribuição de velocidade das ondas sísmicas é um processo matemático elaborado, algumas vezes chamado de inversão das curvas de tempo de percurso, que envolve uma série de condições e cuja apresentação foge ao propósito deste curso.

Nem todas as curvas de tempo de percurso são simples de serem interpretadas. A **figura 4.16** resume a tabela de tempo de percurso de Jeffreys e Bullen (1970), mostrando a complexidade do problema de se identificar e interpretar esses dados.

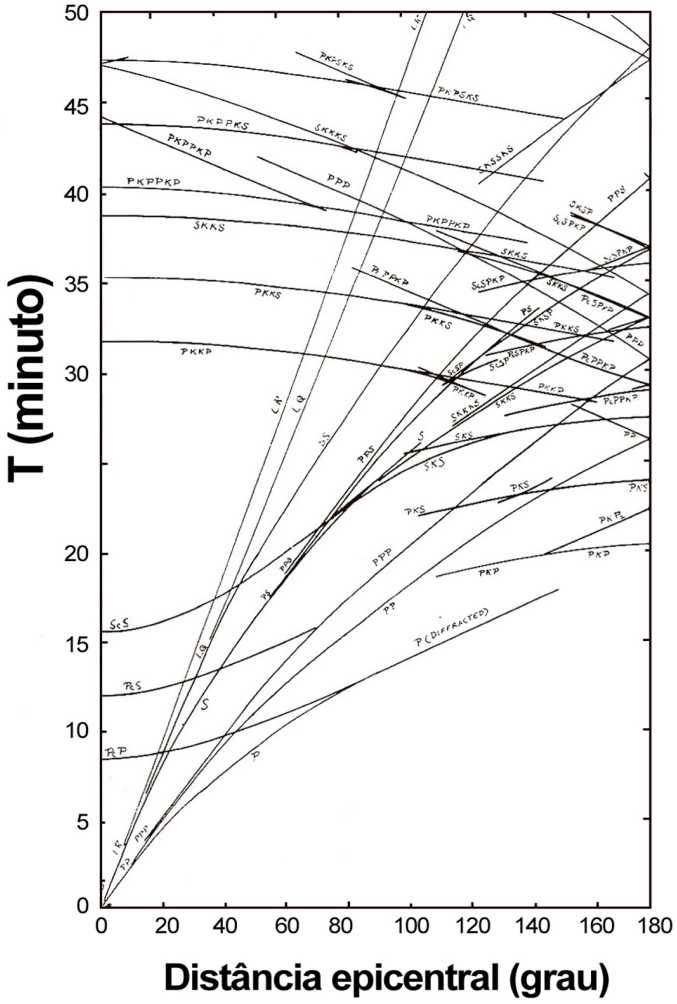

Figura 4.16: Curvas de tempo de percurso para diferentes fases sísmicas construída com os dados compilados por Jeffreys e Bullen (1970). Os tempos de percurso das ondas I e J foram omitidos.

Algumas conclusões simples podem ser obtidas diretamente da observação da curva. Por exemplo, a curva correspondente à onda *S* é interrompida bruscamente a uma distância epicentral um pouco maior do que 100º. Essa interrupção brusca indica que os raios sísmicos encontram, a partir de certa profundidade, um meio com rigidez nula, ou seja, um fluido. A posição onde o meio passa a ser fluido pode ser calculada e é marcada por uma descontinuidade bem definida na profundidade de 2.885km. Essa descontinuidade recebe o nome de descontinuidade de Gutenberg, em homenagem ao geofísico Beno Gutenberg que a identificou.

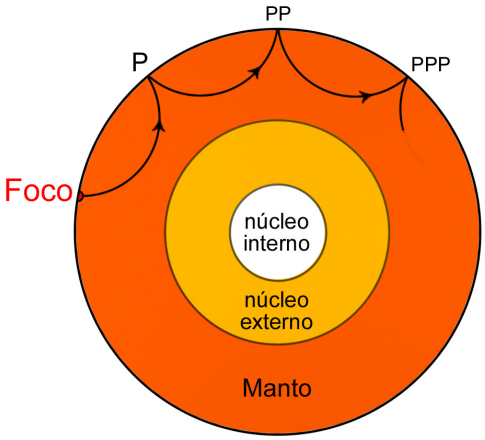

Figura 4.17: Definição das fases sísmicas de compressão *P*, *PP* e *PPP*.

A **figura 4.16** mostra que, entre as curvas de tempo de percurso das ondas *P* e *S*, existem fases sísmicas que foram identificadas no conjunto dos sismogramas utilizado na construção das tabelas de tempo de percurso. Trata-se de ondas do tipo *P*, que percorrem caminhos que permitem que o tempo de chegada seja inferior ao tempo de chegada da onda *S*. Fases identificadas como *PP* e *PPP* são ondas do tipo *P* que sofreram uma e duas reflexões, respectivamente, na superfície da Terra, antes de atingirem a posição de um observatório sismológico (**Figura 4.17**).

A descontinuidade de Gutenberg marca uma transição brusca, onde o material que compõe o interior da Terra perde a rigidez. Sendo uma descontinuidade brusca, que tem reflexo sobre a velocidade das ondas *P*, o que se espera é que a curva de tempo de percurso perca, pelo menos, a suavidade na distância epicentral correspondente. Observando a **figura 4.16,** pode-se ver que a curva de tempo de percurso da onda *P* se estende de forma suave para além da distância epicentral de 100º, chegando até 150º. Costuma-se referir às ondas *P* com tempo de percurso registrado para distância epicentrais maiores do que 100º como ondas refratadas. O termo refratado é, neste caso, um termo impróprio, uma vez que o contorno da camada fluida pelas ondas *P* não é induzido por uma irregularidade

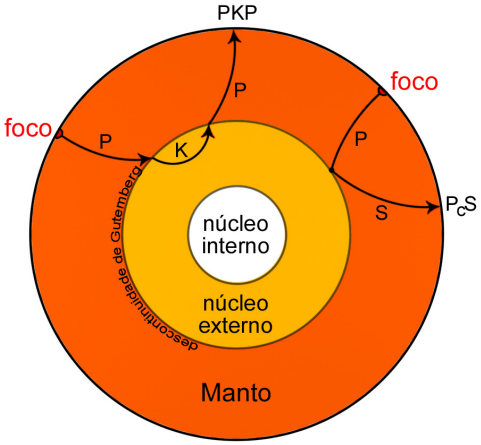

Figura 4.18: Definição da fase sísmica de compressão *PKP* e da fase sísmica *PcS* correspondente a uma onda de compressão que, na reflexão na descontinuidade de Gutenberg, é convertida em onda de cisalhamento.

com dimensão característica pequena em relação ao comprimento da onda *P*. O que ocorre é que, nessa região, a velocidade das ondas *P* apresenta variações na sua inclinação como função da profundidade, que permitem às ondas *P* contornarem parcialmente essa região. Ondas *P* aparecem para distâncias maiores do que 100º com uma curva própria de tempos de percurso. Essa curva identificada como *PKP* corresponde a tempos de chegada de ondas *P* que penetraram na camada líquida abaixo da descontinuidade de Gutemberg (**Figura 4.18**).

A **figura 4.16** apresenta também curvas que indicam tempos de percurso diferentes de zero para a distância epicentral igual a zero, com valores crescentes para distâncias epicentrais crescentes até, aproximadamente, 60º. Essas fases (existem três bem claras no intervalo de tempo de percurso entre 8 segundos e 16 segundos, aproximadamente), identificadas pelos símbolos PcP, PcS e ScS, correspondem a reflexões na descontinuidade de Gutenberg. A fase PcS corresponde a uma reflexão onde parte da energia da onda P incidente foi convertida em onda *S* (ver **Figura 4.18**).

A análise das curvas de tempo de percurso permitiu construir o modelo para a distribuição de velocidades das ondas sísmicas no interior da Terra apresentado na **figura 4.19**.

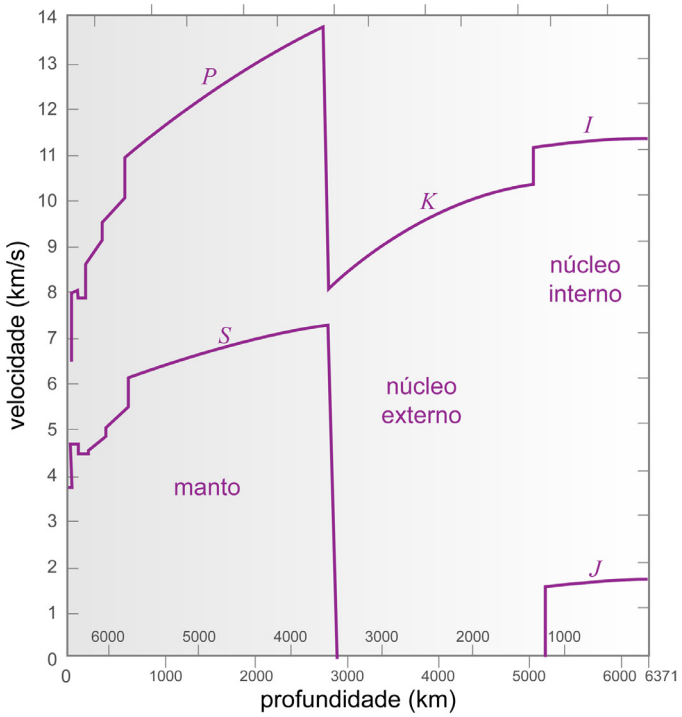

Figura 4.19: Variação das velocidades das ondas sísmicas compressionais *P* (chamadas de *K* no núcleo externo e de *I* no núcleo interno) e das ondas e de cisalhamento *S* (chamadas de *J* no núcleo interno) e a identificação do manto terrestre, do núcleo externo e do núcleo interno a partir dessas velocidades.

A partir dessa distribuição de velocidade das ondas sísmicas e de considerações sobre a distribuição de massa na Terra, densidade média, massa total e momento de inércia, três grandes regiões foram definidas no interior do planeta: manto, que corresponde ao intervalo de distâncias ao centro da Terra entre 3.486km e, aproximadamente, 6.352km; núcleo externo, correspondendo a distâncias ao centro da Terra entre 1.217km e 3.486km; e o núcleo interno, correspondendo ao intervalo de distâncias ao centro da Terra de 0 a 1.217km.

O manto da Terra é caracterizado por duas regiões distintas. O manto inferior, que se estende desde a descontinuidade de Gutenberg até uma distância radial de 5.701km (670km de profundidade). Nesse intervalo de profundidades, as velocidades das ondas *P* e *S* decrescem como função da distância ao centro da Terra, de forma regular e suave, partindo de 13,8km/s até 11km/s e de 7,1km/s até 6km/s, respectivamente. O manto superior é separado do manto inferior por uma descontinuidade a 670km de profundidade, onde a velocidade das ondas *P* cai bruscamente para 10km/s e a velocidade das ondas S cai para 5,5km/s. Logo acima dessa descontinuidade existe uma segunda descontinuidade à profundidade de 420km. Entre essas duas descontinuidades, as velocidades das ondas *P* e *S* decrescem, suavemente, como função da distância ao centro da Terra até 9,5km/s e 5km/s, respectivamente. Na descontinuidade a 420 km de profundidade, a velocidade das ondas *P* cai bruscamente até 7,8km/s e a velocidade das ondas *S* cai para 4,5km/s, e permanecem em torno desse valor até uma profundidade entre 60km e 220km de baixo dos oceanos e entre 120km e 220km abaixo dos continentes. A partir dessa camada, algumas vezes chamada de zona de baixa velocidade, o modelo de Terra com simetria esférica perde muito do seu sentido. A estrutura abaixo dos continentes é bem diferente da estrutura abaixo dos oceanos. Uma descrição mais detalhada das estruturas dessas regiões será apresentada mais adiante no curso. Acima da zona de baixa velocidade, a velocidade das ondas P passa de forma que, por enquanto, será considerada brusca, para valores médios de 7,9km/s abaixo dos oceanos e de 8km/s abaixo dos continentes. As velocidades das ondas S pulam para 4,6km/s abaixo dos oceanos e para 4,7km/s abaixo dos continentes.

Abaixo dos oceanos, o limite superior do manto superior é marcado por uma transição brusca das velocidades das ondas P para valores médios de 6,4km e das ondas S para valores médios de 3,7km/s. Nas regiões continentais, o limite é marcado por uma transição brusca para velocidades médias de 6,5km/s e de 3,8km/s para as ondas *P* e *S*, respectivamente.

A característica mais marcante do núcleo externo da Terra é a ausência de rigidez, o que acarreta a impossibilidade de propagação de ondas de cisalhamento. Além disso, devido ao fato de a rigidez cair para zero, a descontinuidade de Gutenberg é marcada por uma queda brusca na velocidade das ondas *P* de 13,8km/s, no lado do manto inferior, e para 8km/s no lado do núcleo

interno. As ondas de compressão que se propagam no núcleo externo são chamadas ondas *K*. A velocidade das ondas *K* cresce suavemente com o aumento da profundidade até 10,1km/s a uma distância ao centro da Terra de 1.217km, e a velocidade das ondas de compressão salta bruscamente para 11km/s. A variação brusca marca a posição de uma descontinuidade conhecida como descontinuidade de Lehmann, em homenagem a Inge Lehmann, que a identificou pela primeira vez em 1930. Essa descontinuidade marca a posição do topo do núcleo externo.

Abaixo da descontinuidade de Lehmann, as ondas de compressão são identificadas como onda *I*, cuja velocidade cresce de forma suave em direção ao centro da Terra, mas com uma variação muito pequena. A análise dos tempos de percurso das ondas sísmicas que atingem a região central da Terra sugere que o núcleo interno seja sólido, o que significa que ondas de cisalhamento, que nessa região são chamadas de ondas *J*, devem se propagar no seu interior. A velocidade das ondas *J* é estimada em torno de 1,6 a 1,7km/s.

4.6 Uma palavra final

A tradução das variações das velocidades das ondas sísmicas em termos da variação da densidade do material que compõe o interior da Terra é um processo que envolve o conhecimento da teoria da elasticidade, da termodinâmica dos sólidos e um pouco de matemática, acima do que se espera que tenha um aluno de um curso introdutório. Por isso, apenas o resultado final será apresentado.

A **figura 4.20** apresenta a variação da densidade como função da profundidade no interior da Terra. As três regiões principais do interior do planeta bem como a separação entre o manto superior e o manto inferior são facilmente reconhecíveis nesse diagrama.

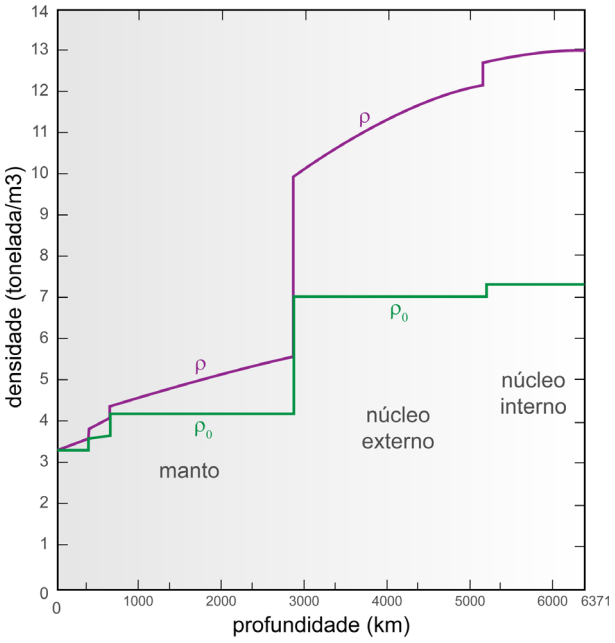

Figura 4.20. Variação da densidade do material que compõe o interior da Terra. A curva identificada por ρ corresponde à densidade nas condições de pressão e temperatura existentes no interior da Terra. A curva identificada por ρ_o corresponde à densidade desse material extrapolada para a condição de pressão zero e temperatura de 25º C.

A curva traçada em linhas cheias indica a variação da densidade tal como ela deve ocorrer no interior da Terra, variação que se deve a mudanças na composição química do material e aos efeitos da compressão devido ao peso das camadas superiores. A linha tracejada mostra a variação da densidade do material que compõe o interior da Terra com o efeito da compressão corrigido. Os valores indicados correspondem aos valores de densidade que o material deveria ter se a pressão que age sobre ele fosse igual a zero.

A **figura 4.20** mostra que o manto inferior, o núcleo externo e o núcleo interno são caracterizados por valores constantes de densidade à pressão zero, sugerindo que se trata – cada uma dessas camadas – de um meio, até onde se pode perceber, homogêneo. O manto superior também é dividido em camadas caracterizadas por densidades constantes, separadas pelas descontinuidades localizadas a 420km de profundidade e a 670km de profundidade.

Interpretar as densidades do material que compõe o interior da Terra, em termos de composição química, é um problema da geoquímica, que vamos deixar para os textos de geoquímica e de geodinâmica entendida de forma ampla. No entanto, muito mais para estimular a imaginação e despertar o interesse do leitor do que para realmente transmitir alguma informação, alguma coisa pode ser dita.

A densidade de 7.000kg/m^3 para o núcleo externo e de 7.200kg/m^3 para o núcleo interno sugere que ambos sejam metálicos. Além disso, dados sobre a composição química média de alguns meteoritos, que parecem representar a composição química do material que deu origem à Terra, sugerem que o núcleo externo seja composto por uma liga de ferro e níquel onde estão dissolvidos elementos mais leves. Ligas de Fe e Ni são observadas em alguns meteoritos, chamados meteoritos ferrometálicos. A densidade de pouco mais de 4.200kg/m^3 sugere que o manto inferior seja composto, principalmente, por uma mistura de óxidos de ferro e magnésio, enquanto o manto superior deva ser composto, principalmente, por silicatos desses metais. As diferenças de densidade entre as camadas definidas pelas descontinuidades de 420km e de 670km sugerem que o material com essa composição se apresente como fases mineralógicas diferentes.